УДК 536.12:620.198

В. А. Шевчук[✉]

УЗАГАЛЬНЕНІ ГРАНИЧНІ УМОВИ РАДІАЦІЙНО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ ТІЛ ЗІ СЕРЕДОВИЩЕМ ЧЕРЕЗ БАГАТОШАРОВІ НЕПЛОСКІ ПОКРИТТЯ

Запропоновано підхід до побудови узагальнених граничних умов радіаційно-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через неплоскі багатошарові покриття, який ґрунтується на використанні точного рівняння теплопровідності в шарах покриття та розвиненні функції температури за координатою вздовж нормалі до поверхні поділу тіло–покриття у степеневий ряд. Отримано розрахункові варіанти узагальнених граничних умов з різною точністю. Виведено формули відновлення для розподілу температури за товщиною покриття через граничні значення температури та її похідної в тілі.

***Ключові слова**: теплопровідність, тонке покриття, багатошарове покриття, узагальнені граничні умови, радіаційно-конвективний теплообмін*

Вступ. Побудову узагальнених граничних умов (УГУ) теплообміну тіл зі середовищем через тонкі покриття розглядали у багатьох працях [1, 2, 4–6, 9–14, 17–20, 23–26, 28–32, 34–36, 38–42]. Виведення таких УГУ для неплоских покрить базується або на апріорному припущенні про постійний [1, 2, 9, 32] чи лінійний [6, 9, 14] розподіли температури за товщиною покриття, або на використанні наближеного рівняння теплопровідності тонких оболонок [18, 22], як у працях [4, 10, 13, 26, 28, 30, 31, 40, 42], що дає можливість отримати наближені УГУ лише з точністю до доданків, які містять лінійні члени за товщиною покриття. Показано [29] необхідність застосування точнішого рівняння теплопровідності та побудовано УГУ для одношарового однорідного покриття.

Нижче, використовуючи точне рівняння теплопровідності, отримали УГУ довільної точності для багатошарового покриття та на прикладі тестової задачі конвективного нагріву циліндра з покриттям проілюстровали випадки, коли важливі додаткові члени вищого порядку в розрахункових варіантах УГУ.

1. **Формулювання задачі**. Досліджували тіло з багатошаровим покриттям товщиною $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$, шари якого виготовлені з різних ізотропних матеріалів. При цьому n-шарове покриття розглядали як тонку оболонку, віднесену до триортогональної змішаної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, що є лініями головних кривин поверхні поділу тіло–покриття й нормаллю до неї (рис. 1). Припускали, що поверхня краю Σ такої оболонки лінійчата, для якої контур Γ, який обмежує поверхню поділу тіло–покриття S, є напрямною, а нормаль до S у кожній точці контуру – твірною.

Загальне рівняння тривимірної теорії теплопровідності для i-го шару покриття в криволінійній ортогональній змішаній системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ має вигляд [18, 22]

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{H_{2i} H_{3i}}{H_{1i}} \frac{\partial t_i}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{H_{1i} H_{3i}}{H_{2i}} \frac{\partial t_i}{\partial \alpha_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{H_{1i} H_{2i}}{H_{3i}} \frac{\partial t_i}{\partial \gamma}\right) = \frac{H_{1i} H_{2i} H_{3i}}{a_i} \frac{\partial t_i}{\partial \tau}, \qquad (1)$$

[✉] shevchuk@iapmm.lviv.ua

де t_i – температура i-го шару; τ – час; H_{ji} – коефіцієнти Ляме; $a_i = \lambda_i / \omega_i$, λ_i, ω_i – коефіцієнти температуропровідності, теплопровідності та теплоємність i-го шару.

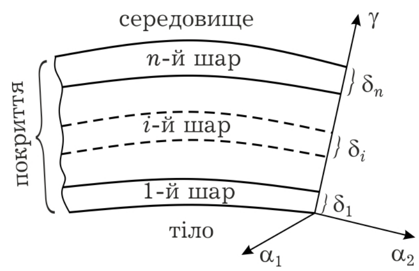

Рис. 1

Подамо формули, які пов’язують коефіцієнти Ламе з коефіцієнтами першої квадратичної форми A_{1i}, A_{2i} поверхонь поділу i-го та $(i-1)$-го шарів, $i = 2,\ldots,n$, а також поділу тіло–покриття, $i = 1$, і кривинами k_{1i}, k_{2i} координатних ліній ($\gamma_0 = 0$ при $i = 1$ та $\gamma_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j$ при $i = 2,\ldots,n$)

$$H_{1i} = A_{1i}(1 + k_{1i}(\gamma - \gamma_{i-1})), \quad H_{2i} = A_{2i}(1 + k_{2i}(\gamma - \gamma_{i-1})), \quad H_{3i} = 1. \tag{2}$$

Враховуючи формули (2), запишемо рівняння теплопровідності (1) так:

$$\frac{1}{A_{1i}A_{2i}}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}}\frac{1 + k_{2i}(\gamma - \gamma_{i-1})}{1 + k_{1i}(\gamma - \gamma_{i-1})}\frac{\partial t_i}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}}\frac{1 + k_{1i}(\gamma - \gamma_{i-1})}{1 + k_{2i}(\gamma - \gamma_{i-1})}\frac{\partial t_i}{\partial \alpha_2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left[(1 + k_{1i}(\gamma - \gamma_{i-1}))(1 + k_{2i}(\gamma - \gamma_{i-1}))\frac{\partial t_i}{\partial \gamma}\right] = \frac{(1 + k_{1i}(\gamma - \gamma_{i-1}))(1 + k_{2i}(\gamma - \gamma_{i-1}))}{a_i}\frac{\partial t_i}{\partial \tau}. \tag{3}$$

Для однорідних шарів покрить (оболонок) таке подання використовували в працях [7, 21].

Уводячи позначення

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \gamma_{i-1}, \tag{4}$$

перепишемо рівняння (3) у вигляді

$$\frac{1}{(1 + k_{1i}\tilde{\gamma})(1 + k_{2i}\tilde{\gamma})}\frac{1}{A_{1i}A_{2i}} + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}}\frac{1 + k_{2i}\tilde{\gamma}}{1 + k_{1i}\tilde{\gamma}}\frac{\partial t_i}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}}\frac{1 + k_{1i}\tilde{\gamma}}{1 + k_{2i}\tilde{\gamma}}\frac{\partial t_i}{\partial \alpha_2}\right)\right] + 2k_i\frac{1 + k_{1i}k_{2i}\tilde{\gamma} / k_i}{(1 + k_{1i}\tilde{\gamma})(1 + k_{2i}\tilde{\gamma})}\frac{\partial t_i}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 t_i}{\partial \gamma^2} = \frac{1}{a_i}\frac{\partial t}{\partial \tau},$$

$$k_i = \frac{k_{1i} + k_{2i}}{2}, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{5}$$

Для особливо тонких шарів покриття ($k_{1i}(\gamma - \gamma_{i-1}) << 1$, $k_{2i}(\gamma - \gamma_{i-1}) << 1$) рівняння (5) можна спростити:

$$\Delta_i t_i + 2k_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 t_i}{\partial \gamma^2} = \frac{1}{a_i}\frac{\partial t_i}{\partial \tau}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$\Delta_i = \frac{1}{A_{1i}A_{2i}}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\right)\right]. \tag{7}$$

Для променево-конвективного нагрівання (охолодження) тіла з багатошаровим покриттям задача теплопровідності для покриття в контакті з тілом включатиме рівняння теплопровідності (5) або (6), граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну на межі покриття–середовище

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial \gamma} = \mu(t_{II} - t_n) + \sigma_0 \varepsilon (t_{II}^4 - t_n^4), \quad \gamma = \gamma_n = \delta, \tag{8}$$

$$\lambda_i \Lambda_i t_i = \mu_i (t_{\Sigma i} - t_i) + \sigma_0 \varepsilon_i (t_{\Sigma i}^4 - t_i^4) \quad \Big|_{\Sigma}, \tag{9}$$

$$\Lambda_i = \frac{n_1}{A_{1i}}\frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{n_2}{A_{2i}}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

умови ідеального теплового контакту між шарами покриття і покриттям та тілом

$$t_i = t_{i-1}, \quad \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} = \lambda_{i-1}\frac{\partial t_{i-1}}{\partial \gamma}, \quad \gamma = \gamma_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n,$$

$$t_1 = t_I, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial \gamma} = \lambda_I \frac{\partial t_I}{\partial \gamma}, \quad \gamma = \gamma_0 = 0 \tag{10}$$

та початкову умову

$$t_i = t_{i0}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma), \quad \tau = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Тут t_{II}, t_Σ – температури середовищ, які омивають поверхні покриття $\gamma = \delta$ і Σ; μ – коефіцієнт теплообміну між поверхнею покриття і навколишнім середовищем; σ_0 – стала Стефана – Больцмана; ε – ступінь чорноти поверхні покриття; n_1, n_2 – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні краю Σ. Індексами i та I позначено величини, що відносяться до i-го шару покриття та тіла відповідно.

2. **Узагальнені граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну тіл через багатошарові покриття**. Будуємо УГУ так. Температуру t_i подамо у вигляді розвинення

$$t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} t_i^{(m)}(\alpha_1, \alpha_2, \tau)(\gamma - \gamma_{i-1})^m,$$

$$\gamma_{i-1} \le \gamma \le \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Підставляємо розвинення (12) у рівняння теплопровідності (5), ураховуючи позначення (4) і формули

$$\frac{1 + k_{qi}\tilde\gamma}{1 + k_{si}\tilde\gamma} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde\gamma^m (-1)^m k_{si}^{m-1}(k_{si} - k_{qi}), \quad q = 1, 2, \quad s = 3 - q,$$

$$\frac{1}{(1 + k_{1i}\tilde\gamma)(1 + k_{2i}\tilde\gamma)} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m k_{i(m)} \tilde\gamma^m,$$

$$\frac{1 + k_{1i}k_{2i}\tilde\gamma / k_i}{(1 + k_{1i}\tilde\gamma)(1 + k_{2i}\tilde\gamma)} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(k_{i(m)} - \frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i} k_{i(m-1)}\right)\tilde\gamma^m,$$

і отримаємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m \sum_{j=0}^{m} k_{i,(m-j)} \sum_{\lambda=0}^{j} (-1)^{m-\lambda} \Delta_{i,j-\lambda} t_i^{(\lambda)} +$$

$$+2k_i \left[\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\gamma^m t_i^{(m+1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^m \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{m-j} \times \right.$$

$$\left. \times \left(k_{i,(m-j)} - \frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i} k_{i,(m-j-1)} \right) t_i^{(j+1)} \right] +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) t_i^{(m+2)} = \frac{1}{a_i} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m \frac{\partial t_i^{(m)}}{\partial \tau},$$

$$0 < \gamma < \delta_i . \tag{13}$$

Тут $k_{i(m)} = \sum_{j=0}^{m} k_{1i}^{m-j} k_{2i}^{j}$,

$$\Delta_{i,j} = \frac{1}{A_{1i}A_{2i}} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}} k_{1i}^{j-1} (k_{1i} - k_{2i}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}} k_{2i}^{j-1} (k_{2i} - k_{1i}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right],$$

$$\Delta_{i,0} = \Delta_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots$$

З формули (13), прирівнюючи члени біля однакових степенів γ, одержали співвідношення

$$\Delta_{i,0} t_i^{(0)} + 2k_i t_i^{(1)} + 2t_i^{(2)} = \frac{1}{a_i} \frac{\partial t_i^{(0)}}{\partial \tau},$$

$$-(2k_i \Delta_{i,0} + \Delta_{i,1}) t_i^{(0)} + (\Delta_{i,0} - 4k_i^2 + 2k_{1i}k_{2i}) t_i^{(1)} + 4k_i t_i^{(2)} + 6t_i^{(3)} = \frac{1}{a_i} \frac{\partial t_i^{(1)}}{\partial \tau},$$

$$\sum_{j=0}^{m} k_{i,(m-j)} \sum_{\lambda=0}^{j} (-1)^{m-\lambda} \Delta_{i,j-\lambda} t_i^{(\lambda)} + 2k_i \left[(m+1) t_i^{(m+1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{m-j} \left(k_{i,(m-j)} - \frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i} k_{i,(m-j-1)} \right) t_i^{(j+1)} \right] +$$

$$+(m+2)(m+1) t_i^{(m+2)} = \frac{1}{a_i} \frac{\partial t_i^{(m)}}{\partial \tau}, \quad m \geq 2, \tag{14}$$

з яких випливає:

$$t_i^{(m)} = -\frac{2k_i}{m} t_i^{(m-1)} - \frac{1}{m(m-1)} \left[\sum_{j=0}^{m-2} k_{i,(m-j-2)} \sum_{\lambda=0}^{j} (-1)^{m-\lambda} \Delta_{i,j-\lambda} t_i^{(\lambda)} + \right.$$

$$+ 2k_i \sum_{j=0}^{m-3} (-1)^{m-j} \left(k_{i,(m-j-2)} - \frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i} k_{i,(m-j-3)} \right) t_i^{(j+1)} -$$

$$\left. - \frac{1}{a_i} \frac{\partial t_i^{(m-2)}}{\partial \tau} \right], \quad m \geq 2. \tag{15}$$

Уведемо такі позначення для температури та її похідних на поверхнях поділу сусідніх шарів:

$$t_i^{+} = \lim_{\gamma \to \gamma_i - 0} t_i, \quad t_i^{-} = \lim_{\gamma \to \gamma_{i-1}+0} t_i,$$

$$\left(\frac{\partial t_i}{\partial \gamma}\right)^{+} = \lim_{\gamma \to \gamma_i - 0} \left(\frac{\partial t_i}{\partial \gamma}\right), \quad \left(\frac{\partial t_i}{\partial \gamma}\right)^{-} = \lim_{\gamma \to \gamma_{i-1}+0} \left(\frac{\partial t_i}{\partial \gamma}\right). \tag{16}$$

З формул (15) і контактних умов (10) отримали подання для коефіцієнтів розкладу функції температури i-го шару покриття через граничні значення температури та її похідної на верхній межі $(i-1)$-го шару

$$t_i^{(m)} = c_{i,m} t_{i-1}^{+} + d_{i,m} \left(\frac{\partial t_{i-1}}{\partial \gamma}\right)^{+}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

де коефіцієнти $c_{i,m}$, $d_{i,m}$ визначають рекурентні співвідношення

$$c_{i,0} = 1, \quad c_{i,1} = 0, \quad d_{i,0} = 0, \quad d_{i,1} = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}, \tag{18}$$

$$\varphi_{i,m} = -\frac{2k_i}{m}\varphi_{i,m-1} - \frac{1}{m(m-1)}\left[\sum_{j=0}^{m-2} k_{i,(m-j-2)} \sum_{\ell=0}^{j} (-1)^{m-\ell}\varphi_{i,\ell}\Delta_{i,j-\ell} + \right.$$

$$+2k_i \sum_{j=0}^{m-3} (-1)^{m-j}\left(k_{i,(m-j-2)} - \frac{k_{1i}k_{2i}}{k_i} k_{i,(m-j-3)}\right)\varphi_{i,j+1} -$$

$$\left. - \frac{\varphi_{i,m-2}}{a_i}\frac{\partial}{\partial \tau}\right], \quad \varphi = c, d, \quad m \geq 2, \tag{19}$$

і використали додаткові позначення $t_0^{+} = t_I\big|_{\gamma=0}$, $\left(\frac{\partial t_0}{\partial \gamma}\right)^{+} = \frac{\partial t_I}{\partial \gamma}\Big|_{\gamma=0}$, $\lambda_0 = \lambda_I$.

Підставляючи (17) у вираз для температури (12) та її похідної при $\gamma = \gamma_{i-1}$, одержали такі рекурентні співвідношення для температур та її похідних на поверхнях поділу шарів:

$$\vec{t}_i = \Delta_i \vec{t}_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

де

$$\vec{t}_i = \left[t_i^{+} \quad \left(\frac{\partial t_i}{\partial \gamma}\right)^{+}\right]^T, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \vec{t}_0 = \vec{t}_I = \left[t_I\big|_{\gamma=0} \quad \frac{\partial t_I}{\partial \gamma}\Big|_{\gamma=0}\right]^T, \tag{21}$$

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} c_{i,m}\delta_i^m & \sum_{m=0}^{\infty} d_{i,m}\delta_i^m \\ \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)c_{i,m+1}\delta_i^m & \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)d_{i,m+1}\delta_i^m \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Тепер запишемо подання для температури та її похідної через значення температури та її похідної на поверхні поділу тіло–покриття:

$$\vec{t}_j = \Phi_j \vec{t}_I, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{23}$$

де

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} f_i^{11} & f_i^{12} \\ f_i^{21} & f_i^{22} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Тоді з (23), (20) дістанемо такі рекурентні співвідношення:

$$\Phi_i = \Delta_i \Phi_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{25}$$

Формулу (25) можна записати і так:

$$\Phi_i = \Delta_i \Delta_{i-1} \dots \Delta_1 = \prod_{j=1}^{i} \Delta_{i-j+1}, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{26}$$

З (23), (21), зокрема, випливає:

$$\tau_i^{+} = \Phi_i^{(1)} \tau_{\rm I}, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{27}$$

де $\Phi_i^{(1)} = \left[f_i^{11} \;\; f_i^{12} \right]$. (28)

Слід зауважити, що викладену процедуру подання граничних значень температури та її похідної на поверхні поділу шарів через відповідні значення на поверхні поділу тіло–покриття можна трактувати як реалізацію методу матриць перенесення (transfer matrix method) [15, 33, 37] до процесу теплопровідності в багатошаровому середовищі. Тут матриця Δ_i розмірністю 2×2 – т. зв. матриця переносу (трансляційна [15, 16]) i-го шару покриття, а матриця Φ_n – матриця переносу всього n-шарового покриття.

Підставляючи (23) і (27) при $i = n$ у граничну умову радіаційно-конвективного теплообміну (8), на поверхні поділу основа–покриття S отримаємо:

$$[\mu \;\; \lambda_n]\Phi_n \tau_{\rm I} + \sigma_0 \varepsilon (\Phi_n^{(1)} \tau_{\rm I})^4 - \mu t_{\rm II} - \sigma_0 \varepsilon t_{\rm II}^4 = 0. \tag{29}$$

Оскільки співвідношення (29) пов'язує граничні значення температури $t_{\rm I}$ та її похідної $\partial t_{\rm I} / \partial \gamma$ у тілі зі значенням температури $t_{\rm II}$ у середовищі, то його можна трактувати *як узагальнену граничну умову* для визначення температури в тілі, яка враховує вплив багатошарового покриття на перебіг теплоперенесення в тілі.

З іншого боку, УГУ (29) можна подати в явному вигляді через температуру та її похідну:

$$\beta_1 t_{\rm I} + \beta_2 \frac{\partial t_{\rm I}}{\partial \gamma} + \mu (t_{\rm II} - t_{\rm I}) + \sigma_0 \varepsilon \left[t_{\rm II}^4 - \sum_{j=0}^{4} \beta_{j+3} t_{\rm I}^{4-j} \left(\frac{\partial t_{\rm I}}{\partial \gamma} \right)^j \right] = 0, \tag{30}$$

де коефіцієнти β_l визначають співвідношення

$$[\beta_1 \;\; \beta_2] = [\mu \;\; 0] - [\mu \;\; \lambda_n]\Phi_n, \tag{31}$$

$$\beta_{j+3} = C_4^j (f_n^{11})^{4-j} (f_n^{12})^j, \qquad j = 1,\dots,4, \tag{32}$$

а $C_4^j = \dfrac{4!}{j!(4-j)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

Вираз (30) слугує загальним вихідним співвідношенням для отримання розрахункових варіантів УГУ з різною точністю.

3. **Розрахункові варіанти узагальнених граничних умов радіаційно-конвективного теплообміну тіл через тонкі багатошарові покриття**. Для тонких покрить умову (30) можна суттєво спростити, розкладаючи в ряд за степенями малих товщин δ_i відповідні доданки та нехтуючи члени, які містять $\delta_i^q \delta_l^s$ при $q + s > 2$. Тоді

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - 2(K - K_{i-1}) + \mu (H^{-1} - H_{i-1/2}^{-1})\right)\Delta_i - \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,1} -$$

$$- \left[(1 - 2K + \mu H^{-1})\Omega + \sum_{i=1}^{n} (2K_{i-1/2} - \mu H_{i-1/2}^{-1})\Omega_i \right] \frac{\partial}{\partial \tau},$$

$$\beta_2 = -\lambda_{\mathrm{I}}\Big[1 - 2K + \sum_{i=1}^{n}(4K_i\tilde{K}_i - K_{1i}K_{2i}) + \mu\Big(H^{-1} - 2\sum_{i=1}^{n}\tilde{K}_{i-1/2}h_i^{-1}\Big) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}H_{i-1/2}^{-1}\Big(\tilde{D}_i - \Omega_i\frac{\partial}{\partial\tau}\Big)\Big],$$

$$\beta_{j+3} = C_4^j(\lambda_{\mathrm{I}}H^{-1})^j\Big[1 - (4-j)\Big(\sum_{i=1}^{n}((H^{-1} - H_{i-1/2}^{-1})\tilde{D}_i -$$

$$-(\Omega H^{-1} - \Omega_i H_{i-1/2}^{-1}))\frac{\partial}{\partial\tau}\Big)\Big], \qquad j = 1,\ldots,4. \tag{33}$$

Тут уведені такі позначення:

$$\tilde{D}_i = \frac{\Lambda_i}{A_{1i}A_{2i}}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_{2i}}{A_{1i}}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_{1i}}{A_{2i}}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\right], \qquad \tilde{D}_{i,1} = \frac{\lambda_i\delta_i^2}{2}\Delta_{i,1};$$

$\Lambda_i = \lambda_i\delta_i$ – приведена теплопровідність i-го шару; $\Omega_i = \omega_i\delta_i$, $h_i = \lambda_i/\delta_i$, $K_i = k_i\delta_i$, $K_{1i} = k_{1i}\delta_i$, $K_{2i} = k_{2i}\delta_i$ – приведені теплоємність, теплопроникливість і кривини i-го шару; $\Omega = \sum_{i=1}^{n}\Omega_i$, $H^{-1} = \sum_{i=1}^{n}h_i^{-1}$, $K = \sum_{i=1}^{n}K_i$ – приведені теплоємність, термічний опір та кривина усього покриття; $H_i^{-1} = \sum_{j=1}^{i}h_j^{-1}$;

$H_0^{-1} = 0$; $H_{i-1/2}^{-1} = H_{i-1}^{-1} + (2h_i)^{-1}$; $\tilde{K}_i = \sum_{j=1}^{i}k_j\delta_j$; $\tilde{K}_{i-1/2} = \tilde{K}_i - k_i\delta_i/2$.

Якщо ж у (30) залишити лише лінійні члени при температурі t_{I} і похідній $\partial t_{\mathrm{I}}/\partial\gamma$, отримаємо:

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{n}\tilde{D}_i - \Omega\frac{\partial}{\partial\tau}, \qquad \beta_2 = -\lambda_{\mathrm{I}}(1 - 2K + \mu H^{-1}),$$

$$\beta_{j+3} = C_4^j(\lambda_{\mathrm{I}}H^{-1})^j, \qquad j = 0,\ldots,4. \tag{34}$$

Тоді УГУ можна записати так:

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{D}_i t_{\mathrm{I}} - \lambda_{\mathrm{I}}(1 - 2K + \mu H^{-1})\frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\gamma} + \mu(t_{\mathrm{II}} - t_{\mathrm{I}}) + \Phi\left(t_{\mathrm{I}}, \frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\gamma}\right) = \Omega\frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\tau}, \tag{35}$$

де

$$\Phi\left(t_{\mathrm{I}}, \frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\gamma}\right) = \sigma_0\varepsilon\left[t_{\mathrm{II}}^4 - \sum_{j=0}^{4}C_4^j(\lambda_{\mathrm{I}}H^{-1})^j t_{\mathrm{I}}^{4-j}\left(\frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\gamma}\right)^j\right]. \tag{36}$$

Якщо головні кривини і коефіцієнти першої квадратичної форми поверхонь поділу шарів наближено прийняти рівними відповідним величинам для поверхні поділу тіло–покриття ($A_1 = A_{1i}$, $A_2 = A_{2i}$, $k = k_i$, $i = 1,\ldots,n$), то УГУ (35) матиме вигляд

$$\tilde{D}t_{\mathrm{I}} - \lambda_{\mathrm{I}}(1 - 2K + \mu H^{-1})\frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\gamma} + \mu(t_{\mathrm{II}} - t_{\mathrm{I}}) + \Phi\left(t_{\mathrm{I}}, \frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\gamma}\right) = \Omega\frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\tau}, \tag{37}$$

$$\tilde{D} = \frac{\Lambda}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\right], \quad \Lambda = \sum_{i=1}^{n}\Lambda_i, \quad K = k\delta.$$

Якщо обмежитись у (30) лише лінійними доданками за товщинами δ_i при температурі t_{I}, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla_i t_I - \lambda_I \frac{\partial t_I}{\partial \gamma} + \mu(t_{II} - t_I) + \Phi\left(t_I, \frac{\partial t_I}{\partial \gamma}\right) = \Omega \frac{\partial t_I}{\partial \tau}, \tag{38}$$

а якщо – при похідній температури $\partial t_I / \partial \gamma$, то

$$-\lambda_I (1 - 2K + \mu H^{-1}) \frac{\partial t_I}{\partial \gamma} + \mu(t_{II} - t_I) + \Phi\left(t_I, \frac{\partial t_I}{\partial \gamma}\right) = 0. \tag{39}$$

Відкидаючи доданки в умові (30), які містять товщину шарів покриття, одержимо як частковий випадок умову радіаційно-конвективного теплообміну:

$$-\lambda_I \frac{\partial t_I}{\partial \gamma} + \mu(t_{II} - t_I) + \sigma_0 \varepsilon (t_{II}^4 - t_I^4) = 0. \tag{40}$$

Порівняємо наведені розрахункові варіанти УГУ з наявними в літературі. Зазначимо, що більшість праць стосується конвективного теплообміну для однорідних покрить без урахування променевої компоненти.

Найпростіший з розрахункових варіантів УГУ (39) (що містить лише лінійні доданки за товщиною при похідній $\partial t_I / \partial \gamma$ та враховує тільки вплив термоопору та кривини покриття) без урахування кривини ($K = 0$) рівносильний граничній умові [11, с. 28] теплообміну тіла зі середовищем через тонку плівку зі слабкопровідного матеріалу, а за урахування кривини – ефективній граничній умові з еквівалентним коефіцієнтом тепловіддачі, наведеній у праці [6].

Варіант УГУ (38), який містить лише лінійні члени за товщиною при температурі t_I та враховує тільки вплив теплоємності покриття та поздовжні теплові потоки, для одношарового покриття збігається з відповідною умовою в праці [32] та для одновимірного випадку ($\nabla = 0$) – з умовою в праці [1], отриманою за схемою "зосередженої ємності" [8].

Більш загальний вираз (37) з лінійними членами як при температурі, так і при її похідній, враховує всі ефективні характеристики покриття – приведені теплоємність, термоопір, теплопровідність та кривину. Для одношарових покрить без урахування променевої компоненти він збігається (або еквівалентний за точністю) з відповідними УГУ конвективного теплообміну тіл з покриттями, отриманими раніше [10, 26] та за нехтування теплообміном випромінення [4, 31]. Для пластинчатих ($K = 0$) покрить УГУ (37) збігається з умовою в [20], а за одновимірної ($\nabla = 0$) стаціонарної ($\Omega = 0$) теплопровідності – з ефективною граничною умовою з праці [24].

Відзначимо, що для одношарового покриття варіант УГУ (30) з коефіцієнтами (33), який враховує лінійні і квадратичні члени за товщиною при температурі тіла та її похідній, збігається з УГУ з праці [29] та не збігається з відповідними з праць [4, 13, 31], оскільки за вихідне співвідношення там приймали наближене рівняння теплопровідності (6), хоча для плоских покрить результати збігаються [12, 19, 23].

Можна зауважити, що варіант УГУ (37), який враховує лінійні члени при температурі та її похідній, для одношарового покриття з урахуванням нагрівання випроміненням збігається з відповідною УГУ, наведеною в публікаціях [4, 31] за відсутності розподілених у покритті джерел тепла та теплових потоків, які враховують приховану теплоту кристалізації (плавлення), теплоту екзотермічних (ендотермічних) процесів, хімічних реакцій. Для плоских покрить цей варіант (37) збігається з УГУ з праці [25] для непрозорого покриття на непрозорій основі.

Щодо багатошарових покрить, то УГУ конвективного теплообміну, отримані в працях [5, 17, 34] операторним методом з використанням граничного переходу, збігаються з варіантом (37), що містить лінійні члени за товщиною при температурі тіла та її похідній, без урахування кривини та променевої компоненти, а УГУ конвективного теплообміну для пластинчатих покрить, з праці [18, с. 93], де використовували зведений коефіцієнт тепловіддачі, не враховуючи неідеальність теплового контакту, - з варіантом УГУ (39) з лінійними членами за товщиною при похідній від температури без урахування променевої компоненти при $K=0$.

УГУ, отримані в працях [28, 30], які враховують лінійні і *квадратичні* члени за товщиною при температурі тіла та її похідній, не збігаються з варіантом (30) з коефіцієнтами (33), оскільки там за вихідне співвідношення приймали наближене рівняння теплопровідності (6), хоча УГУ, побудовані в працях [28, 30, 40, 42], які враховують лише відповідні *лінійні* члени, збігаються з УГУ (37).

УГУ (35) при $\mu\to\infty$ матиме вигляд:

$$-\lambda_{\mathrm{I}}\frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\gamma}+H(t_{\mathrm{II}}-t_{\mathrm{I}})=0. \tag{41}$$

У такому випадку УГУ (41) можна розглядати як граничну умову конвективного теплообміну третього роду з коефіцієнтом тепловіддачі, рівним оберненому термоопору покриття H. Для одношарового покриття умова (41) збігається з варіантом граничної умови, наведеної в праці [11, с. 27; 36].

Слід зауважити, що УГУ (35), (37), (38) містять похідні за часом від граничної температури t_{I}, а УГУ (30) з коефіцієнтами (33) – ще й від її похідної $\partial t_{\mathrm{I}}/\partial\gamma$. З контактних умов (10) і початкової умови (11) отримаємо:

$$t_{\mathrm{I}}\Big|_{\gamma=0,\tau=0}=t_{10}(\alpha_1,\alpha_2,0),\qquad \frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=0,\tau=0}=\frac{\lambda_1}{\lambda_{\mathrm{I}}}\frac{\partial t_{10}(\alpha_1,\alpha_2,\gamma)}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=0}. \tag{42}$$

Як альтернативний варіант можна використати вираз через усереднене значення початкової температури за товщиною багатошарового покриття:

$$t_{\mathrm{I}}\Big|_{\gamma=0,\tau=0}=\frac{1}{\delta}\left(\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i}t_{i0}(\alpha_1,\alpha_2,z)\,dz\right). \tag{43}$$

Формули (42) та (43) можна застосувати для відповідних УГУ (30), (35), (37), (38).

Задовольняючи умови (9) на торцевій поверхні краю Σ інтегрально

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\Lambda_i+\mu_i)\int\limits_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i}t_i\,d\gamma+\sigma_0\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\int\limits_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i}t_i^4\,d\gamma-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_i\int\limits_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i}t_{\Sigma i}\,d\gamma+\sigma_0\varepsilon_i\int\limits_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i}t_{\Sigma i}^4\,d\gamma\right]=0, \tag{44}$$

використовуючи розклад (12), формули (17), (23), (21), отримаємо:

$$\beta_{\Sigma,1}t_{\mathrm{I}}+\beta_{\Sigma,2}\frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\gamma}+\sigma_0\sum_{j=0}^{4}\beta_{\Sigma,j+3}t_{\mathrm{I}}^{4-j}\left(\frac{\partial t_{\mathrm{I}}}{\partial\gamma}\right)^j-\delta T_{\Sigma}^{\mu}-\delta T_{\Sigma}^{\varepsilon}=0\quad\Big|_{\Gamma}, \tag{45}$$

де

$$\left[\beta_{\Sigma,1}\ \ \beta_{\Sigma,2}\right]=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\Lambda_i+\mu_i)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\delta_i^{m+1}}{(m+1)}\beta_{i,m}\Phi_{i-1}, \tag{46}$$

$$\beta_{\Sigma,j+3}=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\delta_i^{4m+1}}{4m+1}C_4^j b_{i,m,1}^{4-j}b_{i,m,2}^j,\qquad j=0,\ldots,4, \tag{47}$$

$$\beta_{i,m} = \left[b_{i,m,1} \;\; b_{i,m,2} \right] = \left[c_{i,m} \;\; d_{i,m} \right] \Phi_{i-1}, \tag{48}$$

$$T_{\Sigma}^{\mu} = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n} \mu_i \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_{\Sigma i} \, d\gamma, \qquad T_{\Sigma}^{\varepsilon} = \frac{1}{\delta} \sigma_0 \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_{\Sigma i}^4 \, d\gamma. \tag{49}$$

Отже з (45) можна дістати відповідні розрахункові варіанти. Зокрема, якщо обмежитись лінійними членами за товщиною при температурі та квадратичними при похідній, одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \Lambda_i + \mu_i) \left(t_I + \frac{\lambda_I}{H_{i-1}} \frac{\partial t_I}{\partial \gamma} \right) \delta_i +$$

$$+ \sigma_0 \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sum_{j=0}^{4} C_4^j \left(\frac{\lambda_I}{H_{i-1}} \right)^j t_I^{4-j} \left(\frac{\partial t_I}{\partial \gamma} \right)^j \delta_i - \delta T_{\Sigma}^{\mu} - \delta T_{\Sigma}^{\varepsilon} = 0. \tag{50}$$

Слід зауважити, що загалом умову (50) можна наближено замінити лінійною, оскільки вплив торцевої поверхні покриття-оболонки в загальному теплообміні незначний [27].

4. **Визначення теплового стану в покритті**. Після знаходження температурного поля в тілі, яке ґрунтується на розв'язуванні відповідної крайової задачі з узагальненими граничними умовами, можемо розрахувати температуру по товщині покриття за допомогою формул відновлення.

Підставляючи вирази (17), (21) і (23) з урахуванням позначення (48) у розклад (12), подамо температуру в покритті так:

$$t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} (\gamma - \gamma_{i-1})^m \beta_{i,m} \vec{t}_I, \quad \gamma_{i-1} \le \gamma \le \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{51}$$

Формулу (51) використовували для відновлення температурного поля в покритті після розв'язування відповідної крайової задачі теплопровідності в області тіла з УГУ.

Обмежуючись лінійними членами розкладу в (51), отримуємо

$$t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = t_I \big|_{\gamma=0} + \lambda_I \left(H_{i-1}^{-1} + \frac{\gamma - \gamma_{i-1}}{\lambda_i} \right) \frac{\partial t_I}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0},$$

$$\gamma_{i-1} \le \gamma \le \gamma_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{52}$$

а обмежуючись квадратичними –

$$t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = \left[1 + \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{i-1} \left(-\bar{D}_j + W_j \frac{\partial}{\partial \tau} \right) (\gamma - \gamma_{i-1}) + \right.$$

$$\left. + \left(-D_i + \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{(\gamma - \gamma_{i-1})^2}{2} \right] + t_I \big|_{\gamma=0} +$$

$$+ \frac{\lambda_I}{\lambda_i} \left[\lambda_i H_{i-1}^{-1} + (1 - 2\bar{k}_{i-1})(\gamma - \gamma_{i-1}) - \right.$$

$$\left. - k_i (\gamma - \gamma_{i-1})^2 \right] \frac{\partial t_I}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0}, \quad \gamma_{i-1} \le \gamma \le \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{53}$$

Таким чином, методика наближеного обчислення теплового стану в тілах з багатошаровими покриттями складається з двох етапів:

1) розв'язування некласичної крайової задачі теплопровідності з узагальненими граничними умовами;
2) визначення температурного поля в покритті за формулами відновлення.

5. **Тестова задача теплопровідності для циліндра з покриттям**. Як тестову розглянемо одновимірну задачу теплопровідності для суцільного

циліндра радіусом R з одношаровим покриттям товщиною δ за конвективного нагріву зовнішнім середовищем.

Рівняння теплопровідності і початкові умови мають вигляд

$$\frac{\partial t_{\text{I}}}{\partial \tau} = a_{\text{I}} \left(\frac{\partial^2 t_{\text{I}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\text{I}}}{\partial r} \right), \qquad \frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_1 \left(\frac{\partial^2 t_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_1}{\partial r} \right), \tag{54}$$

$$t_{\text{I}}\big|_{\tau=0} = t_0, \qquad t_1\big|_{\tau=0} = t_0. \tag{55}$$

Вважаємо, що циліндр нагрівається середовищем за законом Ньютона

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} = \mu (t_1 - t_{\text{II}}), \qquad r = R + \delta, \tag{56}$$

на поверхні поділу покриття з тілом існують умови ідеального теплового контакту

$$t_1 = t_{\text{I}}, \qquad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} = \lambda_{\text{I}} \frac{\partial t_{\text{I}}}{\partial r}, \qquad r = R, \tag{57}$$

а на осі циліндра виконується умова симетрії

$$\frac{\partial t_{\text{I}}}{\partial r} = 0, \qquad r = 0. \tag{58}$$

Точний розв'язок цієї задачі відомий [3], а наближений для циліндра ґрунтується на розв'язуванні рівняння (54) в області тіла за початкової умови (55), умови симетрії (58) і узагальненої граничної умови, яка у цьому випадку слідує з (30), (33):

$$-\lambda_{\text{I}} \left[1 - \frac{\delta}{R} + \boxed{\frac{\delta^2}{R^2}} + \frac{\mu \left(1 - \boxed{\frac{\delta}{2R}} \right)}{H} \right] \frac{\partial t_{\text{I}}}{\partial r} + \mu (t_{\text{II}} - t_{\text{I}}) =$$

$$= \left(1 - \boxed{\frac{\delta}{2R} + \frac{\mu}{2H}} \right) \Omega \frac{\partial t_{\text{I}}}{\partial \tau} + \boxed{\frac{\Omega}{2H} \lambda_{\text{I}} \frac{\partial^2 t_{\text{I}}}{\partial \tau \partial r}}, \tag{59}$$

де $H = \lambda_1 / \delta$, $\Omega = \omega_1 \delta$.

Умова (59) записана для одношарового покриття для суто конвективного нагрівання. Застосовуватимемо її для двох випадків – під час збереження лише *лінійних* доданків при температурі та похідній і тоді, коли залишатимемо також *квадратичні*. Тут і надалі у рамках позначено доданки, які відповідають квадратичним членам при температурі та її похідній.

Використовуючи перетворення Лапласа, знаходимо розв'язок наведеної задачі для циліндра у вигляді

$$\theta_{\text{I}}(\rho, \mathrm{Fo}) = 1 - 2\mathrm{Bi}^* \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho \mu_j) \exp(-\mu_j^2 \mathrm{Fo})}{Z(\mu_j)}, \qquad 0 \le \rho \le 1, \tag{60}$$

$$Z(\mu_j) = J_0(\mu_j) \left[\left(1 + 2p\upsilon - \boxed{0.5\upsilon\xi\mu_j^2} \right) \mu_j^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\mathrm{Bi}^* - (p + \boxed{\xi}) \upsilon \kappa_j^2 \right) \frac{\left(\mathrm{Bi}^* - \boxed{p\upsilon\mu_j^2} \right)}{\left(1 - \boxed{0.5\upsilon\xi\mu_j^2} \right)} \right], \tag{61}$$

де μ_j – корені рівняння,

$$\left(Bi^{*} - p\upsilon\varkappa^{2}\right)J_{0}(\varkappa) - \left(1 - \boxed{0.5\xi\upsilon\varkappa^{2}}\right)\varkappa J_{1}(\varkappa) = 0, \qquad (62)$$

$$\theta_{I} = \frac{t_{I} - t_{0}}{t_{II} - t_{0}}, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad Fo = \frac{a_{I}\tau}{R^{2}}, \quad p = 1\boxed{-\frac{\delta}{2R} + \frac{\xi Bi}{2}},$$

$$\xi = \frac{H^{-1}}{R/\lambda_{I}} = \frac{\lambda_{I}}{\lambda_{1}}\frac{\delta}{R}, \quad Bi^{*} = \frac{Bi}{1 - \frac{\delta}{R} + \boxed{\frac{\delta^{2}}{R^{2}}} + \mu\left(1 - \boxed{\frac{\delta}{2R}}\right)/H},$$

$$\upsilon = \frac{\Omega}{\omega_{I}R\left(1 - \frac{\delta}{R} + \boxed{\frac{\delta^{2}}{R^{2}}} + \mu\left(1 - \boxed{\frac{\delta}{2R}}\right)/H\right)}, \quad Bi = \frac{\mu R}{\lambda_{I}},$$

J_0, J_1 – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків.

Дослідимо точність отриманого розв'язку на прикладі задачі конвективного нагрівання циліндра з покриттям за таких співвідношень коефіцієнтів теплопровідності та теплоємності покриття і основи та умов нагріву: $\lambda_1/\lambda_I = 0.5$, $\omega_1/\omega_I = 1$, $Bi = 1$. На рис. 2 і 3 подано похибку розрахунку контактної температури $\theta_I(1, Fo)$: на рис. 2 – залежно від відносної товщини покриття для різних моментів часу, а на рис. 3 – для деяких значень товщини покриття залежно від часу.

Можна зауважити, що якщо по осі абсцис використано звичайну лінійну шкалу, то по осі ординат – логарифмічну.

Суцільні криві описують результати розрахунків за УГУ зі збереженням лише *лінійних* членів, а штрихові – зі збереженням *лінійних* та *квадратичних*.

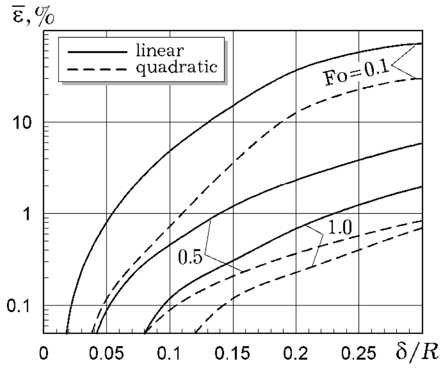

Рис. 2

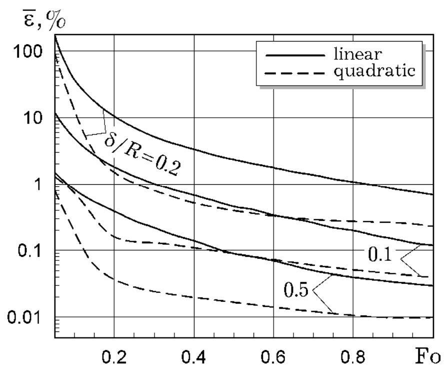

Рис. 3

Виявили, що похибка розрахунку за квадратичним наближенням завжди менша, ніж за лінійним. Для товщин $\delta/R \le 0.05$ цілком прийнятні УГУ за *лінійного* наближення, причому для дуже малих товщин $\delta/R \le 0.01$ отримуємо практично ідеальну точність. Для товщин $\delta/R \ge 0.2$ під час розрахунку перехідних режимів похибка як за лінійним, так і квадратичним наближенням є *неприйнятна*, бо перевищує десятки відсотків. Для товщин $0.05 < \delta/R < 0.2$ похибка за лінійним наближенням *суттєво більша* (в декілька разів), ніж за квадратичним і, очевидно, в цьому інтервалі товщин квадратичне наближення є суттєво кращим за лінійне.

Висновки. Для задачі теплопровідності розроблено підхід до побудови узагальнених граничних умов радіаційно-конвективного теплообміну тіл із середовищем через неплоскі багатошарові покриття, який ґрунтується на використанні точного рівняння теплопровідності в покритті і розвинення функції температури за товщиною покриття в степеневий ряд. Цей підхід дозволяє отримувати розрахункові варіанти узагальнених граничних умов з різною точністю. Також виведено формули відновлення для розподілу температури за товщиною покриття через граничні значення температури та її похідної в тілі.

Викладену процедуру подання граничних значень температури та її похідної на поверхні поділу шарів через відповідні їх значення на поверхні поділу покриття–тіло можна трактувати як реалізацію методу матриць переносу (transfer matrix method) стосовно процесу теплопровідності в багатошаровому середовищі.

Виявлено, що відомі УГУ є частковими випадками виведених розрахункових варіантів.

На прикладі тестової задачі конвективного нагріву циліндра з покриттям проілюстровано випадки, коли важливо утримувати додаткові члени вищого порядку в розрахункових варіантах УГУ.

Роботу виконано коштом бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень" КПКВК 6541230.

1. *Аттетков А. В., Беляков Н. С.* Температурное поле неограниченного твердого тела, содержащего цилиндрический канал с термически тонким покрытием его поверхности // Теплофиз. высоких температур. – 2006. – 44, № 1. – С. 136–140.
   Те саме: *Attetkov A. V., Belyakov N. S.* The temperature field of an infinite solid containing a cylindrical channel with a thermally thin surface coating // High Temp. – 2006. – 44, No. 1. – P. 139–143.
   – https://doi.org/10.1007/s10740-006-0016-0
2. *Березовский А. А.* Нелинейные задачи теплоизлучающих тел с термически тонким покрытием // Задачи нестационарной теплопроводности. (Препр. 83.29. – Киев: Ин-т математики АН УССР), 1983. – С. 6–11.
3. *Вендин С. В.* О расчете нестационарной теплопроводности в многослойных объектах при граничных условиях третьего рода // Инж.-физ. журнал. – 1993. – 65, № 2. – С. 249–251.
   Те саме: *Vendin S. V.* Calculation of nonstationary heat conduction in multilayer objects with boundary conditions of the third kind // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1993. – 65, No. 2. – P. 823–825. – https://doi.org/10.1007/BF00861548
4. *Гаврись А. П., Шевчук П. Р.* Математическое моделирование процессов при высокотемпературном напылении покрытий // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – Вып. 33. – С. 13–18.
   Те саме: *Gavris' A. P., Shevchuk P. R.* Mathematical modeling of the processes occurring during high-temperature spray coating // J. Soviet Math. – 1993. – 65, No. 5. – P. 1818–1822. – https://doi.org/10.1007/BF01097295
5. *Гембара Н. О., Лучко Й. Й.* Моделювання теплопровідності оболонок з двостороннім багатошаровим покриттям // Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту. – 2013. – 69, № 1. – С. 222–230.
6. *Горбунов А. Д.* Аналитический расчёт нагрева (охлаждения) простых тел, покрытых тонкой оболочкой // Металлург. теплотехника. – 2010. – Вып. 2 (17). – С. 56–62.
7. *Дяконюк Л. М., Муха І. С., Савула Я. Г.* Моделювання і дослідження тепломасоперенесення у багатошарових середовищах з тонкими включеннями // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 101–107.
8. *Ержанов Р. Ж., Мацевитый Ю. М., Султангазин У. М., Шерышев В. П.* Сосредоточенная емкость в задачах теплофизики и микроэлектроники. – Киев: Наук. думка, 1992. – 296 с.
9. *Зарубин В. С.* Расчет и оптимизация термоизоляции. – Москва: Энергоатомиздат, 1991. – 192 с.
10. *Иващук Д. В.* Исследование теплодиффузионных процессов и напряженного состояния в телах с покрытиями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1978. – 16 с.
11. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 488 с.
    Те саме: *Carslaw H. S., Jaeger J. C.* Conduction of heat in solids. – Oxford Oxfordshire: Clarendon Press, 1959. – 510 p.

12. *Коляно Ю. М., Хомякевич Е. П.* Граничные условия для определения обобщенных динамических температурных напряжений в телах с покрытиями // Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 43-50.
13. *Коляно Ю. М., Хомякевич Е. П.* Обобщенная теплопроводность в телах с покрытиями, учитывающая кривизну покрытия // Инж.-физ. журн. – 1993. – 65, № 6. – С. 745–749.
Те саме: *Kolyano Yu. M., Khomyakevich M. E.* Generalized heat conduction in coated bodies that accounts for the coating curvature // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1993. – 65, No. 6. – P. 1251–1256. – https://doi.org/10.1007/BF00861951
14. *Комаров Г. М.* Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності // Доп. НАН України. – 1996. – № 7. – С. 26–31.
15. *Лерман Л. Б.* Слоисто-неоднородные объекты с поверхностями раздела. Применение трансляционных матриц в некоторых прикладных задачах // Хімія, фізика та технологія поверхні. – 2016. – 7, № 3. –С. 255–284.
– https://doi.org/10.15407/hftp07.03.255
16. *Лерман Л. Б., Породько Л. В.* Построение трансляционных матриц для неоднородных дифференциальных операторов // ScienceRise. – 2014. – № 3/2(3). – С. 63–68. – https://doi.org/10.15587/2313-8416.2014.27535
17. *Лучко Й. Й.* Розрахунок теплопровідності бетонних плит з багатошаровими покриттями // Наук. вісник Мукачівськ. техн. ін-ту. – 2006. – Вип. 2. – С. 40–46.
18. *Мотовиловец И. А., Козлов В. И.* Термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. – Т. 1.
19. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 312 с.
20. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М.* Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. – Киев: Наук. думка, 1981. – 344 с.
21. *Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.* Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 2. – С. 54–59.
22. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
23. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
24. *Равин В. С.* Об эффективных граничных условиях в задачах стационарной теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 1967. – 12, № 4. – С. 540–541.
Те саме: *Ravin V. S.* Effective boundary conditions in stationary heat conduction problems // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1967. – 12, No. 4. – P. 290–291.
– https://doi.org/10.1007/BF00836540
25. *Терлецький Р. Ф., Турій О. П.* Моделювання і дослідження теплопереносу у пластинах з тонкими покриттями за врахування впливу випромінювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 2. – С. 186–201.
Те саме: *Terlets'kyi R. F., Turii O. P.* Modeling and investigation of heat transfer in plates with thin coatings with regard for the influence of radiation // J. Math. Sci. – 2013. – 192, No. 6. – P. 703–722.
– https://doi.org/10.1007/s10958-013-1427-1
26. *Флейшман Н. П.* Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 39. – С. 30–34.
27. *Чернуха Ю. А.* Задача теплопроводности для облучаемых многослойных оболочек // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 104–109.
28. *Шевчук В., Гаврись О., Шевчук П.* Нелінійна крайова задача радіаційно-конвективного теплообміну тіл з багатошаровими покриттями // Машинознавство. – 2010. – 46, № 6. – С. 35–41.
29. *Шевчук В. А.* До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 76–82.
30. *Шевчук В. А.* Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1995. – Вып. 38. – С. 116–120.
Те саме: *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions for heat transfer between a body and the surrounding medium through a multilayer thin coating

// J. Math. Sci. – 1996. – 81, No. 6. – P. 3099–3102.
– https://doi.org/10.1007/BF02362603
31. *Шевчук П. Р., Гаврись А. П.* Влияние лучевого нагрева на температурные режимы и остаточные напряжения при высокотемпературном напылении покрытий // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – Вып. 30. – С. 69–73.
Те саме: *Shevchuk P. R., Gavris' A. P.* The influence of radiant heating on temperature schemes and residual stresses under high-temperature spray // J. Soviet Math. – 1993. – 63, No. 3. – P. 1371–1374.
– https://doi.org/10.1007/BF01255745
32. *Al Nimr M. A., Alcam M. K.* A generalized thermal boundary condition // Heat Mass Transfer. – 1997. – 33, No. 1–2. – P. 157–161.
– https://doi.org/10.1007/s002310050173
33. *Bahar L. Y.* Transfer matrix approach to layered systems // J. Eng. Mech. Div. – 1972. – 98, No. 5. – P. 1159–1172.
34. *Chen J.-L., Гембара Н. О., Гвоздюк М. М.* Нестаціонарна температурна задача для циліндричної оболонки з багатошаровими тонкими покривами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – 54, № 3. – С. 49–57.
Те саме: *Chen J.-L., Hembara N. O., Hvozdyuk M. M.* Nonstationary temperature problem for a cylindrical shell with multilayer thin coatings // Material Sci. – 2018. – 54, No. 3 – P. 339–348. – https://doi.org/10.1007/s11003-018-0190-3
35. *Chen X., Pond C., Wang X.* Effective boundary conditions resulting from anisotropic and optimally aligned coatings: the two dimensional case // Arch. Ration. Mech. An. – 2012. – 206, No. 3. – P. 911–951.
– https://doi.org/10.1007/s00205-012-0547-y
36. *Du F., Lovell M. R., Wu T. W.* Boundary element method analysis of temperature fields in coated cutting tools // Int. J. Solids Struct. – 2001. – 38, No. 26–27. – P. 4557–4570. – https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00291-2
37. *He B., Rui X., Zhang H.* Transfer matrix method for natural vibration analysis of tree system // Math. Probl. Eng. – 2012. – Article ID 393204. – 19 p.
– https://doi.org/10.1155/2012/393204
38. *Li H.* Effective boundary conditions of the heat equation on a body coated by functionally graded material // Discrete Cont. Dyn. Sys. A. – 2016. – 36, No. 3. – P. 1415–1430. https://doi.org/10.3934/dcds.2016.36.1415
39. *Moulton D., Pelesko J. A.* Thermal boundary condition: an asymptotic analysis // Heat Mass Transfer. – 2008. – 44, No. 7. – P. 795–803.
– https://doi.org/10.1007/s00231-007-0277-0
40. *Shevchuk V. A.* Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings // In Sloot P. M. A., Hoekstra A. G., Tan C. J. K., Dongarra J. J. (eds.) / Computational Science – ICCS 2002. ICCS 2002. Lecture Notes in Computer Science. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. –Vol. 2330. – P. 500–509.
– https://doi.org/10.1007/3-540-46080-2_52
41. *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // in Hetnarski R. B. (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Dordrecht: Springer. – 2014. – Vol. 4. – P. 1942–1953.
– https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_601
42. *Shevchuk V. A.* Modeling and computation of heat transfer in a system "body-multilayer coating" // Heat Transfer Res. – 2006. – 37, No. 5. – P. 421–423.
– https://doi.org/10.1615/HeatTransRes.v37.i5.50

ОБОБЩЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ТЕЛ СО СРЕДОЙ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНЫЕ НЕПЛОСКИЕ ПОКРЫТИЯ

Предложен подход к построению обобщенных граничных условий радиационно-конвективного теплообмена тел со средой через неплоские многослойные покрытия, основанный на использовании точного уравнения теплопроводности в слоях покрытия и разложении функции температуры по координате вдоль нормали к поверхности раздела тело–покрытие в степенной ряд. Получены расчетные варианты обобщенных граничных условий с разной точностью. Выведены формулы восстановления для распределения температуры по толщине покрытия через граничные значения температуры и ее производной в теле.

***Ключевые слова**: теплопроводность, тонкое покрытие, многослойное покрытие, обобщенные граничные условия, радиационно-конвективный теплообмен*

THE GENERALIZED BOUNDARY CONDITIONS OF RADIATIVE-CONVECTIVE HEAT EXCHANGE OF BODIES WITH ENVIRONMENT VIA MULTILAYER NONPLANAR COATINGS

An approach to constructing the generalized boundary conditions of radiative-convective heat exchange of bodies with the ambient medium via nonplanar multilayer coatings, which is based on the use of the exact heat equation in the coating layers and the expansion of a temperature function into a power series over the coordinate along the normal to the body-coating interface, has been suggested. Computational variants of generalized boundary conditions with different accuracy have been obtained. The recovery formulas for the temperature distribution over the coating thickness in terms of the boundary values of temperature and its derivative in the body have been derived.

Key words: heat conduction, thin coating, multilayer coating, generalized boundary conditions, radiative-convective heat exchange

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.05.18