

НЕСТАЦІОНАРНЕ ОСЕСИМЕТРИЧНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ НЕОБМЕЖЕНОГО ЦИЛІНДРА ЗІ ЗМІННИМИ ПО ТОВЩИНІ ТЕПЛОФІЗИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Викладено методику визначення нестационарного осесиметричного температурного поля в необмеженому неоднорідному по товщині циліндрі за дії об'єктного джерела тепла та теплових потоків. При цьому враховано нерівномірний розподіл температури в початковий момент часу і конвективний теплообмін. Методика передбачає апроксимацію теплофізичних характеристик кусково-сталими функціями радіальної координати, використання узагальнених функцій і функції Гріна нестационарної осесиметричної задачі теплопровідності для багатошарового циліндра. Досліджено нестационарне температурне поле у функціонально-градієнтному циліндрі, зумовлене рухомим кільцевим нормально розподіленим потоком тепла. Вказана точність наведених результатів залежно від кількості шарів.

Ключові слова: кусково-неоднорідний циліндр, нестационарна осесиметрична задача теплопровідності, функція Гріна, функціонально-градієнтний матеріал

Дослідженню температурних полів в елементах конструкції циліндричної форми, виготовлених із матеріалів зі змінними по товщині теплофізичними характеристиками (ТФХ), зокрема із функціонально-градієнтних, присвячено чимало праць. Для їх визначення запропоновано різноманітні аналітичні, числові та числово-аналітичні методи. Аналітичні, як правило, орієнтовані лише на спеціальні закони зміни характеристик матеріалів. Для визначення стаціонарних і нестационарних температурних полів за довільної залежності ТФХ від радіальної координати часто використовують метод, який передбачає апроксимацію ТФХ кусково-сталими або спеціально підібраними неперервними функціями.

З його допомогою розв'язано нестационарні одновимірні [8, 9], двовимірні осесиметричні [4, 6, 10] та тривимірні неосесиметричні [5, 7] задачі. У багатьох з цих праць розв'язки для шаруватих циліндрів отримано за допомогою функцій Гріна, під якими розуміють розподіли температур, зумовлені миттєвими джерелами тепла, розташованими на обмежувальних поверхнях. Густина джерел у двовимірних задачах є функціями осьової або кутової координат, а в тривимірних нестационарних – добутком функцій осьової і кутової координат.

Нижче проілюстровано спосіб визначення нестационарних осесиметричних температурних полів у циліндрах з довільно залежними від радіальної координати ТФХ. Для цього знайдено розв'язок нестационарної осесиметричної задачі теплопровідності для багатошарового циліндра зі сталими в кожному шарі характеристиками за конвективного теплообміну, загальних законів зміни температури середовища, густин внутрішніх та поверхневих джерел тепла і початкової температури, до якої зведено розв'язання вихідної задачі після апроксимації ТФХ кусково-сталими функціями. Цей розв'язок отримано за допомогою відповідної функції Гріна, яку побудовано з використанням узагальнених функцій та інтегрального перетворення Лапласа у вигляді інтеграла по осьовій координаті і ряду за власними функціями по радіальній. Власні значення обчислено з трансцендентного рівняння, а власні функції – з простих рекурентних співвідношень.

1. Формулювання задачі та її розв'язання. Розглянемо необмежений ізотропний порожнистий циліндр, ТФХ якого – функції радіальної координати

✉ dept19@iapmm.lviv.ua

нати. Циліндр нагрівається об'ємними джерелами тепла густини $W_T(r, z, t)$ та тепловими потоками густини $Q_0(z, t)$, $Q_n(z, t)$ на внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_n$ поверхнях відповідно. Через ці ж поверхні відбувається конвективний теплообмін. У початковий момент часу $t = 0$ задано нерівномірний розподіл температури $T_0(r, z)$.

Нестационарне осесиметричне температурне поле такого циліндра визначаємо з рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(l_t^*(r) r \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) + l_z^*(r) \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = c_V^*(r) \frac{\partial T^*}{\partial t} - W_T(r, z, t), \quad (1)$$

за таких крайових умов:

$$\frac{\partial T^*}{\partial r} \Big|_{r=r_0} - a_0 T^* \Big|_{r=r_0} = Q_0(z, t), \quad \frac{\partial T^*}{\partial r} \Big|_{r=r_n} + a_n T^* \Big|_{r=r_n} = Q_n(z, t), \quad (2)$$

$$T^* \geq 0, \quad z \in \pm \infty, \quad (3)$$

$$T^* \Big|_{t=0} = T_0(r, z), \quad (4)$$

де $l_t^*(r)$ і $c_V^*(r)$ – відповідно коефіцієнти теплопровідності та об'ємної теплоємності, a_0 , a_n – коефіцієнти тепловіддачі з внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра відповідно.

Апроксимуючи функції $l_t^*(r)$, $a^*(r) = \frac{l_t^*(r)}{c_V^*(r)}$ і $c_V^*(r)$ кусково-сталими

функціями $l_t(r)$, $a(r)$, $c_V(r)$ вигляду $p(r) = p_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (p_{i+1} - p_i) S(r - r_i)$, які в межах i -ої області (шару) $r_{i-1} < r < r_i$ збігаються з

$$l_t^{(i)} = \frac{l_t^*(r_{i-1}) + l_t^*(r_i)}{2}, \quad a_i = \frac{a^*(r_{i-1}) + a^*(r_i)}{2}, \quad c_V^{(i)} = \frac{l_t^{(i)}}{a_i},$$

де $S(x)$ – функція Гевісайда. Тоді з (1)–(4) отримуємо задачу для відшукування наближеного розв'язку $T(r, z, t)$, яка в безрозмірних величинах матиме вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(l_t(r) r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \bar{l}_t(r) \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \bar{c}_V(r) \frac{\partial t}{\partial Fo} - w_t(r, z, Fo), \quad (5)$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0} - Bi_0 t \Big|_{r=r_0} = \bar{Q}_0(z, Fo), \quad \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_n} + Bi_n t \Big|_{r=r_n} = \bar{Q}_n(z, Fo), \quad (6)$$

$$t \geq 0, \quad z \in \pm \infty, \quad (7)$$

$$t \Big|_{Fo=0} = t_0(r, z), \quad (8)$$

де $r_i = r_i / \mathbf{1}$, $i = 0, \mathbf{K}, n$, $r = r / \mathbf{1}$, $z = z / \mathbf{1}$, $Fo = a^{*(0)} t / \mathbf{1}^2$, $Bi_0 = a_0 \mathbf{1} / l_t^{*(0)}$, $Bi_n = a_n \mathbf{1} / l_t^{*(0)}$, $\bar{l}_t(r) = l_t^*(r) / l_t^{*(0)}$, $\bar{c}_V(r) = c_V^*(r) / c_V^{*(0)}$, $\bar{l}_t^{(i)} = l_t^{(i)} / l_t^{*(0)}$, $\bar{c}_V^{(i)} = c_V^{(i)} / c_V^{*(0)}$, $i = 0, \mathbf{K}, n$, $\bar{Q}_0(z, Fo) = Q_0(z, t) / Q$, $\bar{Q}_n(z, Fo) = Q_n(z, t) / Q$, $w_t(r, z, Fo) = \frac{W_T(r, z, t) \mathbf{1}}{Q}$, $t(r, z, Fo) = \frac{l_t^{*(0)} T(r, z, t)}{Q \mathbf{1}}$, $t_0(r, z) = \frac{l_t^{*(0)} T_0(r, z)}{Q \mathbf{1}}$, $a^{*(0)} = l_t^{*(0)} / c_V^{*(0)}$, $\mathbf{1}$, $l_t^{*(0)}$, $c_V^{*(0)}$, Q мають ту ж розмірність, що й r , $l_t^{(i)}$, $c_V^{(i)}$, Q_0 відповідно; похідна по r – узагальнена.

Зауважимо, що рівняння (5) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{\partial^2 t_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 t_i}{\partial z^2} = \frac{1}{\bar{a}_i} \frac{\partial t_i}{\partial F_0} - \frac{1}{\bar{\Gamma}_t^{(i)}} w_t(r, z, F_0), \quad r_{i-1} < r < r_i,$$

і умовам контакту

$$\bar{\Gamma}_t^{(i)} \frac{\partial t_i}{\partial r} = \bar{\Gamma}_t^{(i+1)} \frac{\partial t_{i+1}}{\partial r}, \quad t_i = t_{i+1}, \quad r = r_i,$$

де $\bar{a}_i = \bar{\Gamma}_t^{(i)} / \bar{c}_V^{(i)}$, а $t_i(r, z, F_0)$ у межах i -го шару, $i = 1, \mathbf{K}, n$, збігається з $t(r, z, F_0)$, тобто

$$t(r, z, F_0) = t_1(r, z, F_0) + \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1}(r, z, F_0) - t_i(r, z, F_0)) S(r - r_i).$$

Задачу (5)–(8) розв'язано методом функції Гріна, згідно з яким

$$\begin{aligned} t(r, z, F_0) = & r_n \int_{0-F_0}^{F_0+\infty} \int_{r_0}^{\infty} \int_{0-\infty}^{\infty} G(r, z, \rho, \xi, F_0 - F_0) \Big|_{\rho=r_n} \bar{C}_n(\xi, F_0) d\xi dF_0 - \\ & - r_0 \int_{0-F_0}^{F_0+\infty} \int_{r_0}^{\infty} \int_{0-\infty}^{\infty} G(r, z, \rho, \xi, F_0 - F_0) \Big|_{\rho=r_0} \bar{C}_0(\xi, F_0) d\xi dF_0 + \\ & + \int_{0-r_0}^{F_0+r_n+\infty} \int_{r_0}^{\infty} \int_{0-\infty}^{\infty} G(r, z, \rho, \xi, F_0 - F_0) w_t(\rho, \xi, F_0) \rho d\xi dF_0 + \\ & + \int_{r_0-\infty}^{r_n+\infty} \int_{r_0}^{\infty} \int_{0-\infty}^{\infty} G(r, z, \rho, \xi, F_0) \bar{c}_V(\rho) t_0(\rho, \xi) \rho d\xi dF_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Функцію Гріна $G(r, z, \rho, \xi, F_0)$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \bar{\Gamma}_t(r) \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \bar{c}_V(r) \frac{\partial G}{\partial F_0},$$

граничні умови

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=r_0} - \text{Bi}_0 G \Big|_{r=r_0} &= 0, \quad \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=r_n} + \text{Bi}_n G \Big|_{r=r_n} = 0, \\ G &\in 0, \quad z \in \pm \infty \end{aligned}$$

та початкову

$$G|_{F_0=0} = \frac{1}{r \bar{c}_V(r)} d(r - \rho) d(z - \xi),$$

побудовано за тією ж схемою, що й у працях [1–3]:

$$G(r, z, \rho, \xi, F_0) = \frac{2}{\rho} \int_0^{+\infty} \int_0^{\infty} \cosh(z - \xi) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(r, m h) F(\rho, m h)}{N(m h)} e^{-m^2 F_0} \Big|_{m=m_m(h)} dh,$$

де

$$\begin{aligned} N(m h) = & r_n^2 \bar{c}_V^{(n)} \frac{\text{Bi}_n \bar{\sigma}^2}{\bar{c}_V^{(n)} e_n \bar{\sigma}} + 1 + (F_n(r_n, m h))^2 - \\ & - r_0^2 \bar{c}_V^{(1)} \frac{\text{Bi}_0 \bar{\sigma}^2}{\bar{c}_V^{(1)} e_1 \bar{\sigma}} + 1 + (F_1(r_0, m h))^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \frac{\bar{c}_V^{(i)}}{\bar{c}_V^{(i)} e_i} - \frac{\bar{c}_V^{(i+1)}}{e_{i+1}} \frac{\bar{\Gamma}_t^{(i)} \bar{\sigma}^2}{\bar{c}_V^{(i+1)} e_{i+1}} \frac{\partial F_i(r_i, m h)}{\partial r} \bar{\sigma}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{c}_V^{(i)} - \bar{c}_V^{(i+1)}) F_i^2(r_i, mh) \ddot{y}_i; \\
F(r, mh) &= F_1(r, mh) + \mathring{a} \sum_{i=1}^{n-1} (F_{i+1}(r, mh) - F_i(r, mh)) S(r - r_i); \\
F_1(r, mh) &= \frac{2}{p} \mathring{I} \frac{Bi_0}{\Gamma_t^{(1)}} y_{0,0}(e_1, r, r_0) - y_{1,0}(e_1, r_0, r) \ddot{y}_i; \\
\frac{\mathring{I} F_1(r, mh)}{\mathring{I} r} &= - \frac{2}{p} \mathring{I} \frac{Bi_0}{\Gamma_t^{(1)}} y_{1,0}(e_1, r, r_0) + b_1 y_{1,1}(e_1, r, r_0) \ddot{y}_i; \\
F_i(r, mh) &= F_{i-1}(r_{i-1}, mh) r_{i-1} y_{1,0}(e_i, r_{i-1}, r) - \\
& - \frac{\bar{\Gamma}_t^{(i-1)}}{\bar{\Gamma}_t^{(i)}} \frac{\mathring{I} F_{i-1}(r_{i-1}, mh)}{\mathring{I} r} r_{i-1} y_{0,0}(e_i, r, r_{i-1}); \\
\frac{\mathring{I} F_i(r, mh)}{\mathring{I} r} &= F_{i-1}(r_{i-1}, mh) r_{i-1} b_i y_{1,1}(e_i, r, r_{i-1}) + \\
& + \frac{\bar{\Gamma}_t^{(i-1)}}{\bar{\Gamma}_t^{(i)}} \frac{\mathring{I} F_{i-1}(r_{i-1}, mh)}{\mathring{I} r} r_{i-1} y_{1,0}(e_i, r, r_{i-1}), \quad i = 2, \mathbf{K}, n; \\
y_{k,j}(e_i, x, y) &= \begin{cases} \mathring{I} \frac{p}{2} e_i^{k-j} \mathring{e} J_k(e_i x) Y_j(e_i y) - Y_k(e_i x) J_j(e_i y) \mathring{e}, & b_i > 0, \\ \mathring{I} (-e_i)^{k-j} \mathring{e} I_k(e_i x) K_j(e_i y) + (-1)^{k-j} K_k(e_i x) I_j(e_i y) \mathring{e}, & b_i < 0; \end{cases} \\
e_i = \sqrt{|b_i|}, \quad b_i = \frac{m^2}{a_i} - h^2; \quad 0 < m_1(h) < m_2(h) < m_3(h) < \mathbf{K} < m_n(h) < \mathbf{K} -
\end{aligned}$$

корені трансцендентного рівняння $\frac{\mathring{a}}{\mathring{e}} \mathring{I} \frac{F_n(r, mh)}{\mathring{I} r} + Bi_n F_n(r, mh) \frac{\mathring{d}}{\mathring{d}r} \Big|_{r=r_n} = 0$;

$J_k(x)$, $Y_k(x)$ – функції Бесселя k -го порядку; $I_k(x)$, $K_k(x)$ – модифіковані функції Бесселя k -го порядку; $\mathring{d}(x)$ – дельта-функція Дірака.

Зауважимо, що розв'язком (9) можна скористатися також для визначення температурних полів у багатошаровому циліндрі, в якого ТФХ одних шарів сталі, а інших – функції радіальної координати.

2. Числові результати. Як приклад розглянемо нагрів функціонально-градієнтного циліндра при $W_i(r, z, t) = 0$, $T_0(r, z) = 0$, $Q_0(z, t) = 0$, $a_n = 0$ нормально розподіленим рухомих потоком тепла

$$Q_n(z, t) = Q \exp(-k^* (z - u_z t)^2),$$

де Q – тепловий потік у центрі плями нагріву; k^* – коефіцієнт його зосередженості; u_z – швидкість руху центра плями нагріву в осьовому напрямку.

За такої теплової дії розв'язок задачі (5)–(8), отриманий з (9), матиме вигляд

$$t(r, z, Fo) = \frac{2r_n}{\sqrt{pk_0}} \mathring{e} e^{-\frac{h^2}{4k}} \mathring{a} \sum_{m=1}^{\mathring{a}} \frac{F(r, mh) F(r_n, mh)}{N(mh)} F(z, Fo, mh) \Big|_{m=m_n(h)} dh,$$

де

$$F(z, Fo, mh) = f(z, Fo, mh) - \exp(-m^2 Fo) f(z, 0, mh),$$

$$f(z, Fo, mh) = \frac{m^2}{m^4 + (hu_z)^2} \mathring{I} \cosh(z - u_z Fo) - \frac{hu_z}{m^2} \sinh(z - u_z Fo) \ddot{y}_i,$$

$$\bar{k} = k^* \mathbf{l}^2, \quad u_z = u_z \mathbf{l} / a^{*(0)}.$$

Розраховуємо за таких степеневих залежностей ТФХ функціонально-градієнтних матеріалів від радіальної координати:

$$l_t^*(r) = l_t^{*(0)} + (l_t^{*(n)} - l_t^{*(0)}) \frac{\alpha r - r_0}{r_n - r_0} \frac{\delta^s}{\delta},$$

$$a^*(r) = a^{*(0)} + (a^{*(n)} - a^{*(0)}) \frac{\alpha r - r_0}{r_n - r_0} \frac{\delta^s}{\delta}$$

при $r_0 = 0.8$, $r_n = 1$, $Bi_0 = 1$, $u_z = 5$, $\bar{k} = 4$, $l_t^{*(0)} = 12.54 \text{ Вт/(м}^\circ\text{С)}$, $a^{*(0)} = 4.52 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $l_t^{*(n)} = 1.904 \text{ Вт/(м}^\circ\text{С)}$, $a^{*(n)} = 0.906 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Тут ТФХ з індексом «0» відповідають сплаву Ti-6Al-4V, з індексом «n» – кераміці ZrO₂, а їхні значення отримали з температурних залежностей характеристик цих матеріалів [11], отриманих при температурі 400°С.

Досліджували зміну безрозмірної температури $t(r, z, Fo)$ по товщині циліндра під центром плями нагріву ($z = u_z Fo$) за різних значень безрозмірного часу Fo , степенів s та кількості шарів n . Виявили, що при $Fo > 0.5$ розподіл температури в рухомій системі координат не змінюється з часом, тобто такий, як у квазістаціонарному режимі ($Fo \infty$).

У табл. 1 наведено значення температури за різних r для $Fo = 0.5$, $s = 1$, $n = 2, 5, 10, 20, 30, 40, 50$ за однакових товщин шарів та при $n = 13$ за різних товщин шарів.

Таблиця 1

$r \backslash n$	2	5	10	20	30	40	50	13
0.80	0.366	0.374	0.371	0.372	0.373	0.373	0.373	0.372
0.82	0.376	0.382	0.380	0.381	0.382	0.381	0.381	0.380
0.84	0.388	0.393	0.391	0.392	0.392	0.392	0.392	0.391
0.86	0.401	0.407	0.404	0.405	0.406	0.406	0.406	0.404
0.88	0.416	0.423	0.421	0.422	0.423	0.423	0.423	0.421
0.90	0.432	0.446	0.442	0.444	0.444	0.444	0.444	0.443
0.92	0.471	0.471	0.469	0.471	0.471	0.471	0.471	0.470
0.94	0.514	0.509	0.504	0.506	0.507	0.506	0.506	0.505
0.96	0.559	0.551	0.551	0.553	0.554	0.553	0.553	0.551
0.98	0.608	0.628	0.616	0.619	0.620	0.619	0.619	0.617
0.10	0.660	0.708	0.714	0.718	0.719	0.719	0.719	0.716

Як бачимо, температура для кожного r наближається зі збільшенням n до деякого фіксованого значення і після $n = 40$ практично не змінюється. Для досягнення точності 2% можна обмежитись п'ятьма шарами. Відмітимо, що аналогічні закономірності мають місце і при інших значеннях Fo .

Рис. 1 ілюструє вихід температури на квазістаціонарний режим при $s = 1$ та $n = 40$.

На рис. 2 побудовано графіки залежностей температури у квазістаціонарному режимі від радіальної координати r при $s = 1$, $n = 5$ (суцільна лінія) та $n = 40$ (точкова). Крива, яка відповідає $n = 5$, має характерні точки перелому на стиках шарів. Встановили, зі збільшенням n відповідні криві стають більш гладкими (див. рис. 1). Зазначимо, що такої ж їх гладкості, як при $n = 40$, можна досягнути за меншої кількості шарів, але

різної їх товщини $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$, наприклад, взявши при $n=13$ $\Delta r_i = (r_n - r_0)/10$, якщо $i=1,2, \mathbf{K}, 8$; $\Delta r_i = (r_n - r_0)/20$, якщо $i=9,10,11$; $\Delta r_i = (r_n - r_0)/40$, якщо $i=12,13$. При цьому (див. останній стовпець таблиці 1) значення температури у розглянутих точках знаходяться між відповідними, отриманими при $n=10$ та 20 за однакових товщин шарів. Зауважимо, що такий нерівномірний спосіб розбиття розглядали раніше [4].

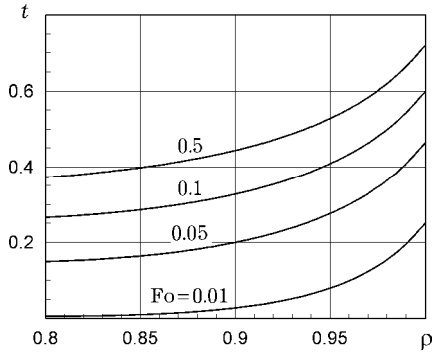


Рис. 1

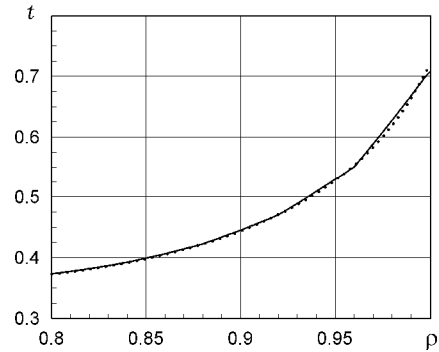


Рис. 2

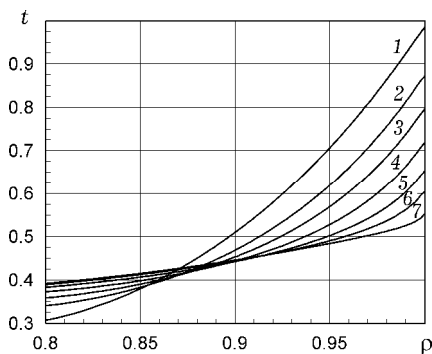


Рис. 3

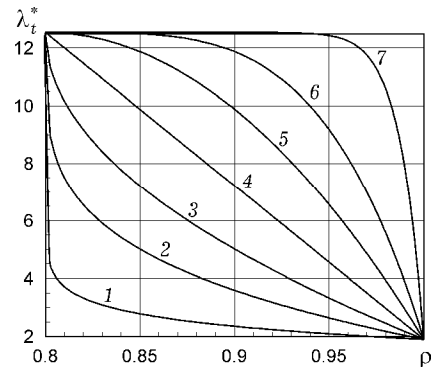


Рис. 4

На рис. 3 зображено залежність температури t від радіальної координати r при $Fo=0.5$ і $n=40$ для значень $s=0.0625, 0.25, 0.5, 1, 2, 4, 16$, яким відповідають криві 1–7. Криві 2–6 побудовані за рівномірного, а 1, 7 – нерівномірного розбиття. Кривій 1 відповідає розбиття $\Delta r_i = (r_n - r_0)/100$, якщо $i=1,2, \mathbf{K}, 25$; $\Delta r_i = (r_n - r_0)/20$, якщо $i=26,27, \mathbf{K}, 40$; а кривій 7 – $\Delta r_i = (r_n - r_0)/4$, якщо $i=1,2,3$; $\Delta r_i = (r_n - r_0)/40$, якщо $i=4,5$; $\Delta r_i = (r_n - r_0)/100$, якщо $i=6,7, \mathbf{K}, 10$; $\Delta r_i = (r_n - r_0)/200$, якщо $i=11, 12, \mathbf{K}, 40$. Нерівномірне розбиття зумовлене стрімким зростанням та спаданням коефіцієнтів теплопровідності та температуропровідності біля внутрішньої та зовнішньої поверхонь відповідно, що демонструє рис. 4, де зображено залежність коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t^*(r)$ від безрозмірної радіальної координати r для різних значень s . Криві 1–7 відповідають тим самим значенням s , що й на рис. 3. Відмітимо, що залежність коефіцієнта температуропровідності $a^*(r)$ від безрозмірної радіальної координати r для цих значень s має такий сам вигляд, як і для $\lambda_t^*(r)$.

Зі збільшенням s температура на зовнішній поверхні знижується, а на внутрішній – зростає (рис. 3). Зазначимо також, що за малих значень ($s < 0.0625$) температурне поле стає близьким до такого для однорідного

циліндра, виготовленого з кераміки, а за великих ($s > 16$) – до температурного поля для однорідного циліндра, виготовленого з металу. За великих s розподіл стає близьким до лінійного.

Висновки. Запропоновано методику визначення нестационарних осесиметричних температурних полів в кусково-неоднорідному по товщині циліндрі за конвективного теплообміну, різних законів зміни температури середовища, густини внутрішніх та поверхневих джерел тепла. Методика передбачає апроксимацію ТФХ кусково-сталими функціями, використання узагальнених функцій та функції Гріна нестационарної осесиметричної задачі теплопровідності для багат шарового циліндра.

Розраховано температурне поле у функціонально-градієнтному циліндрі, ТФХ якого – степеневі функції радіальної координати для різних показників степенів за дії рухомого нормально розподіленого потоку тепла.

Досліджено зміну температури по товщині циліндра у фіксовані моменти часу за рівномірного та нерівномірного розбиття циліндра на шари.

Виявлено, що за лінійної залежності ТФХ для визначення температурного поля з точністю 2% достатньо обмежитися рівномірним розбиттям циліндра на п'ять шарів. Для малих та великих показників степенів доцільно використовувати нерівномірне розбиття.

1. Процюк Б. В., Синюта В. М. Застосування функцій Гріна до визначення осесиметричного термомпружного стану багат шарового циліндра // Прикл. проблеми механіки і математики – 2009. – Вип. 7. – С. 121–132.
2. Процюк Б. В., Синюта В. М. Нестационарні неосесиметричні температурні поля багат шарових ортотропних циліндрів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4. – С. 221–228.
Те саме: Protsyuk B. V., Synyuta V. M. Nonstationary nonaxisymmetric temperature fields of multilayer orthotropic cylinders // J. Math. Sci. – 2010. – 167, No. 2. – P. 267–278. – <https://doi.org/10.1007/s10958-010-9920-2>
3. Процюк Б. В., Синюта В. М. Температурне поле багат шарового циліндра при асимптотичному тепловому режимі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 4. – С. 162–169.
4. Jam J. E., Nezhad Y.R. Semi-analytical solution of functionally graded circular short hollow cylinder subject to transient thermal loading // Arch Mech. Eng. – 2014. – 61, No. 3. – P. 409–432. – <https://doi.org/10.2478/meceng-2014-0023>
5. Kim K.-S., Noda N. Green's function approach to three-dimensional heat conduction equation of functionally graded materials // J. Thermal Stresses. – 2001. – 24, No. 5. – P. 457–477. – <https://doi.org/10.1080/01495730151126113>
6. Kim K.-S., Noda N. Green's function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material // Acta Mech. – 2002. – 156, No. 3–4. – P. 145–161. – <https://doi.org/10.1007/BF01176753>
7. Ootao Y., Akai T., Tanigawa Y. Three-dimensional transient thermal stress analysis of a nonhomogeneous hollow circular cylinder due to a moving heat source in the axial direction // J. Thermal Stresses. – 1995. – 18, No. 5. – P. 497–512. – <https://doi.org/10.1080/01495739508946317>
8. Ootao Y., Ishihara M. Transient thermoelastic analysis of a laminated hollow cylinder constructed of isotropic elastic and magneto-electro-thermoelastic materials // Adv. Mater. Sci. Appl. – 2013. – 2, No. 2. – P. 48–59. – <https://doi.org/10.5963/AMSA0202003>
9. Ootao Y. Transient thermoelastic analysis for a multilayered hollow cylinder with piecewise power law nonhomogeneity // J. Solid Mech. Mater. Eng. – 2010. – 4, No. 8. – P. 1167–1177. – <https://doi.org/10.1299/jmmp.4.1167>
10. Shao Z. S. Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length // Int. J. Press. Vessel. Pip. – 2005. – 82, No. 3. – P. 155–163. – <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2004.09.007>
11. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Thermal Stresses. – 1996. – 19, No. 1. – P. 77–192. – <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПО ТОЛЩИНЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Изложена методика определения нестационарного осесимметричного температурного поля в неограниченном неоднородном по толщине цилиндре при воздействии объемного источника тепла и тепловых потоков. При этом учтено неравномерное распределение температуры в начальный момент времени и конвективный теплообмен. Методика предусматривает аппроксимацию теплофизических характеристик кусочно-постоянными функциями радиальной координаты, использование обобщенных функций и функции Грина нестационарной осесимметричной задачи теплопроводности для многослойного цилиндра. Исследовано нестационарное температурное поле в функционально-градиентном цилиндре, которое обусловлено движущимся кольцевым нормально распределенным потоком тепла. Указано точность результатов исследований в зависимости от количества слоев.

Ключевые слова: кусочно-неоднородный цилиндр, нестационарная осесимметричная задача теплопроводности, функция Грина, функционально-градиентный материал.

NON-STATIONARY AXISYMMETRIC TEMPERATURE FIELD OF AN UNLIMITED CYLINDER WITH VARIABLE THROUGH THICKNESS THERMOPHYSICAL CHARACTERISTICS

The method of defining of non-stationary axisymmetric temperature field in an unlimited inhomogeneous through the thickness cylinder under the action of volume heat source and heat streams is presented. Uneven temperature distribution at the initial moment and convective heat exchange are taken into account. The method implies approximation of thermophysical characteristics by step functions of radial coordinate, use of generalized functions and the Green's function of non-stationary axisymmetric heat conduction problem for multilayer cylinder. Non-stationary temperature field in functionally-gradient cylinder caused by moving circular normally distributed heat flow is investigated. The accuracy of given results are presented depending on the number of layers.

Key words: piecewise inhomogeneous cylinder, non-stationary axisymmetric heat conduction problem, Green's function, functionally-gradient material.

¹Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

²Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів