УДК 539.3

О. В. Максимук[1], Н. В. Гануліч-Манукян [2]✉

ТЕРМОПРУЖНА ПОВЕДІНКА ПОДАТЛИВОЇ ДО ЗСУВІВ НЕСКІНЧЕННО ДОВГОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПІД ДІЄЮ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА ЗМІННОЇ ПОТУЖНОСТІ

Розв'язано квазістатичну задачу термопружності для нескінченно довгої циліндричної оболонки, що виготовлена з наділеного низькою зсувною жорсткістю матеріалу. Оболонка зазнає дії локальних теплових джерел змінної у часі потужності. Здійснено числовий аналіз температурних полів, кільцевих зусиль і осьових моментів для ряду важливих у практичних застосуваннях режимів нагрівання оболонки.

Ключові слова: *циліндрична оболонка, режими нагрівання, температурне поле, гіпотеза Тимошенка, прогини, зусилля, критичні значення часу.*

Розглянемо процес осесиметричного нагрівання податливої до зсувів нескінченно довгої циліндричної оболонки радіуса R з товщиною стінки $2h$ локальними джерелами тепла змінної у часі потужності, які діють в області кільця $x \in [0, x_0]$ і породжують згасаюче на нескінченності $(x \to \infty)$ температурне поле $T(x,\tau)$, що описується рівнянням теплопровідності [2]

$$\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} - \beta^2 T(x,\tau) = -\frac{R^2}{\alpha_t} Q(x,\tau)\,, \qquad (1)$$

де x – віднесена до радіуса оболонки R осьова координата; τ – безрозмірний параметр часу; $\beta^2 = æR^2/(\alpha_t h)$, α_t – коефіцієнт теплопровідності матеріалу, æ – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні оболонки; $Q(x,\tau)$ – функція розподілу джерел тепла. Джерела тепла задаємо виразом

$$Q(x,\tau) = Q_0 \theta(x,x_0)\left(C^* \theta(\tau) + P_m(\tau) e^{-\beta_0^2 \tau}\right),$$

де різниця одиничних ступінчастих [9] функцій

$$\theta(x,x_0) = \theta(x + x_0) - \theta(x - x_0)$$

визначає активну область нагрівання оболонки (область дії джерел в об'ємі кільця ширини $2x_0$), $P_m(\tau) = \sum_{k=0}^{m} C_k^* \tau^k$, β_0^2 – параметр згасання джерел, а Q_0, C^*, C_k^* – задані величини, які характеризують початкову потужність теплових джерел і режим нагрівання оболонки.

Розглянемо декілька важливих режимів нагрівання.

I. Джерела тепла потужності Q_0 вмикаються при $\tau = 0$ і з часом згасають:

$$C^* = 0, \qquad C_0^* = 1, \qquad C_k^* = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,,$$

$$Q(x,\tau) = Q_0\, \theta(x,x_0)\, e^{-\beta_0^2 \tau}\,. \qquad (2)$$

Зауважимо, що при $\beta_0 \to 0$ цей розподіл наближається до розглянутого у роботі [3], де джерела діють у режимі ступінчастої функції одиничного стрибка. При $\beta_0 \to \infty$ процес нагрівання оболонки не відбувається.

✉ nadia.ganulich@gmail.com

II. Потужність теплових джерел зростає від нульового значення у момент вмикання джерел ($\tau = 0$) до максимального значення при $\tau_{max} = \beta_0^{-2}$ і з часом експоненційно спадає до нульового рівня:

$$C^* = C_0^* = 0, \qquad C_1^* = 1, \qquad C_k^* = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots, m \,,$$

$$Q(\xi,\tau) = Q_0 \theta(\xi,\xi_0) \tau e^{-\beta_0^2 \tau}, \qquad \beta_0 \neq 0 . \tag{3}$$

Очевидно, що при $\beta_0 \to 0$ потужність джерел, а отже, і температура, нескінченно зростають і оболонка з часом термічно руйнується. При $\beta_0 \to \infty$ потужність теплових джерел спадає до нуля і оболонка не нагрівається.

III. Теплові джерела вмикаються у момент $\tau = 0$ і діють із наростаючою потужністю від нульового її значення до максимального Q_0 в усталеному режимі при $\tau \to \infty$:

$$C^* = 1, \qquad C_0^* = -1, \qquad C_k^* = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \,,$$

$$Q(\xi,\tau) = Q_0 \theta(\xi,\xi_0) \left(1 - e^{-\beta_0^2 \tau}\right), \qquad \beta_0 \neq 0 . \tag{4}$$

При $\beta_0 \to 0$ оболонка не нагрівається, а зі збільшенням коефіцієнта затухання β_0 ($\beta_0 \to \infty$) процес наближається до зумовленого одиничною ступінчастою функцією режиму рівномірного нагрівання [3].

IV. Потужність джерел з часом спадає вдвічі від початкового значення $2Q_0$ до Q_0 при $\tau \to \infty$:

$$C^* = C_0^* = 1, \qquad C_k^* = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$Q(\xi,\tau) = Q_0 \theta(\xi,\xi_0) \left(1 + e^{-\beta_0^2 \tau}\right), \qquad \beta_0 \neq 0 . \tag{5}$$

В асимптотичному режимі нагрівання оболонки при $\tau \to \infty$ дії джерел (5) і (4) співпадають, а у випадках $\beta_0 \to 0$ і $\beta_0 \to \infty$ процес відбувається в режимі ступінчастої функції (з подвоєною потужністю джерел при $\beta_0 = 0$).

Для побудови збурених тепловими джерелами температурних полів до рівняння теплопровідності (1) застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за часом при початковій умові $T(x,0) = 0$ і обмеженості температури при $\tau \to \infty$. Отримаємо звичайне диференціальне рівняння відносно зображення $\bar{T}(\xi, p)$ (де p – параметр перетворення Лапласа):

$$\frac{d^2 \bar{T}(\xi,p)}{d\xi^2} - (p + \beta^2)\bar{T}(\xi,p) = -\frac{R^2}{\alpha_t} \bar{Q}(\xi,p) . \tag{6}$$

Оскільки для трансформанти Лапласа від функції одиничного стрибка $\theta(\tau) \leftrightarrow \dfrac{1}{p}$, а для експоненти – $e^{-\beta_0^2 \tau} \leftrightarrow \dfrac{1}{p + \beta_0^2}$, то згідно з теоремою про диференціювання зображень [1], якщо $F(p)$ – образ функції-оригіналу $f(\tau)$, тобто, якщо $f(\tau) \leftrightarrow F(p)$, то $\tau^n f(\tau) \leftrightarrow (-1)^n \dfrac{d^n F(p)}{dp^n}$, отримуємо зображення Лапласа функцій розподілу джерел $Q(\xi,\tau)$ (2)–(5) у загальному вигляді:

$$\bar{Q}(\xi,p) = Q_0 \theta(\xi,\xi_0) \left(\frac{C^*}{p} + \sum_{k=0}^{m} \frac{C_k^* k!}{(p + \beta_0^2)^{k+1}} \right). \tag{7}$$

Оскільки функція $\theta(\xi,\xi_0)$ є парною, то для ефективної побудови розв'язку рівняння (6) зручно використати косинус-перетворення Фур'є за ξ.

Підставивши у рівняння (6) косинус-перетворення Фур'є функції $\theta(\xi,\xi_0)$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\theta(\xi,\xi_0)\cos(s\xi)\,d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\xi_0}\cos(s\xi)\,d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi_0 s)}{s}, \qquad (8)$$

отримуємо трансформанту функції температури у просторі зображень Лапласа – Фур'є :

$$\bar{\bar{T}}(s,p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{q_0}{\beta_t}\,\frac{1}{p+s^2+\beta^2}\left(\frac{C^*}{p}+\sum_{k=0}^{m}\frac{C_k^* k!}{(p+\beta_0^2)^{k+1}}\right)\frac{\sin(\xi_0 s)}{s}. \qquad (9)$$

Для оберненого переходу від зображень Лапласа – Фур'є температурних полів до косинус-трансформант Фур'є температури розглянемо вплив кожного з розподілів (2)–(5) джерел тепла окремо.

Режим I:

$$Q_1(\xi,\tau) = Q_0\theta(\xi,\xi_0)e^{-\beta_0^2\tau}.$$

У цьому випадку з огляду на (7)–(9) зображення Лапласа – Фур'є функцій джерел і температури визначаються рівностями:

$$\bar{\bar{Q}}_1(s,p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Q_0\,\frac{1}{p+\beta_0^2}\,\frac{\sin(\xi_0 s)}{s}, \qquad (10)$$

$$\bar{\bar{T}}_1(s,p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{q_0}{\beta_t}\,\frac{1}{(p+\beta_0^2)(p+s^2+\beta^2)}\,\frac{\sin(\xi_0 s)}{s}, \qquad (11)$$

де $q_0 = \beta_t R^2 Q_0/\alpha_t$, а β_t – коефіцієнт температурного лінійного розширення матеріалу оболонки.

Здійснивши в (11) розклад дробу, що містить параметр p, на прості дроби і скориставшись таблицями інтегральних перетворень [1], отримуємо косинус-трансформанту Фур'є температури

$$\bar{T}_1(s,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{q_0}{\beta_t}\,e^{-\beta_0^2\tau}\left(1-e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}\right)\frac{\sin(\xi_0 s)}{s(s^2+\gamma^2)}, \qquad (12)$$

де $\gamma^2 = \beta^2-\beta_0^2$.

Виконавши обернення косинус-перетворення Фур'є (12), температуру отримуємо у вигляді добутку зникаючої на нескінченності експоненти і абсолютно збіжного інтеграла:

$$T_1(\xi,\tau) = \frac{2q_0}{\pi\beta_t}\,e^{-\beta_0^2\tau}\int_0^{\infty}\left(1-e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}\right)\frac{\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)}{s(s^2+\gamma^2)}\,ds. \qquad (13)$$

Після розкладу підінтегрального дробу за параметром s на прості дроби температуру $T_1(\xi,\tau)$ подаємо як суму чотирьох інтегралів:

$$T_1(\xi,\tau) = \frac{2q_0}{\pi\beta_t\gamma^2}\,e^{-\beta_0^2\tau}\left(I_1(\xi)-I_2(\xi)-I_1^*(\xi,\tau)+I_2^*(\xi,\tau)\right). \qquad (14)$$

Вирази цих інтегралів відомі [5, 6]:

$$I_1(\xi) = \int_0^{\infty}\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)\,\frac{ds}{s} = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}(\xi+\xi_0)-\operatorname{sgn}(\xi-\xi_0)\right),$$

$$I_2(\xi) = \int_0^{\infty}\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)\,\frac{s\,ds}{s^2+\gamma^2} = \frac{\pi}{2}\left(e^{-\gamma(\xi+\xi_0)}-e^{-\gamma|\xi-\xi_0|}\right),$$

$$I_1^*(\xi,\tau)=\int_0^\infty e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)\frac{ds}{s}=\frac{\pi}{4}e^{-2\gamma^2\tau}(\mathrm{erfc}(\xi_2)-\mathrm{erfc}(\xi_1)),$$

$$I_2^*(\xi,\tau)=\int_0^\infty e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)\frac{s\,ds}{s^2+\gamma^2}=$$

$$=\frac{\pi}{8}e^{-2\gamma^2\tau}\left[2(\mathrm{sh}\,\gamma(\xi+\xi_0)-\mathrm{sh}\,\gamma|\xi-\xi_0|)+\right.$$

$$\left.+\mathrm{erfc}(\xi_1^*)+\mathrm{erfc}(\xi_2^*)-\mathrm{erfc}(\xi_3^*)-\mathrm{erfc}(\xi_4^*)\right]. \tag{15}$$

Тут $\mathrm{erfc}(z)=1-\Phi(z)$, $\Phi(z)$ – інтеграл ймовірності,

$$\xi_1=\frac{\xi+\xi_0}{2\sqrt{\tau}},\qquad \xi_2=\frac{|\xi-\xi_0|}{2\sqrt{\tau}},\qquad \xi_{1,2}^*=\xi_1\pm\gamma\sqrt{\tau},\qquad \xi_{3,4}^*=\xi_2\pm\gamma\sqrt{\tau}.$$

Із формули (13) випливає, що найбільшого значення температура вздовж твірної оболонки у будь-який момент часу досягає при $\xi=0$.

Крім цього, неважко показати, що в довільний момент часу залежна від ширини кільця ξ_0 температура набуває максимального рівня в точці $\xi=0$ при нескінченному звуженні активної області нагрівання оболонки ($\xi_0\to 0$).

Здійснивши граничні переходи при $\xi_0\to 0$ у (13), (14) і зберігаючи при цьому сумарну потужність теплових джерел в об'ємі кільця ширини ξ_0 постійною, тобто прийнявши $q_0\xi_0=q_0^*=\mathrm{const}$, отримуємо значення максимального рівня температури в часі:

$$\lim_{\xi_0\to 0}T_1(0,\tau)=\frac{q_0^*}{\beta_t\gamma}\left[1-(1-\Phi(\gamma\sqrt{\tau}))e^{-2\gamma^2\tau}\right]e^{-\beta_0^2\tau}. \tag{16}$$

Режим II:

$$Q_2(\xi,\tau)=Q_0\theta(\xi,\xi_0)\tau e^{-\beta_0^2\tau},\qquad \beta_0\neq 0.$$

У цьому випадку з огляду на (7) і (8) для функції розподілу теплових джерел (3) у просторі зображень Фур'є – Лапласа маємо такий вираз:

$$\hat{Q}_2(s,p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Q_0\frac{1}{(p+\beta_0^2)^2}\frac{\sin(\xi_0 s)}{s}, \tag{17}$$

а для температурного поля – такий:

$$\hat{T}_2(s,p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{q_0}{\beta_t}\frac{1}{(p+\beta_0^2)^2(p+s^2+\beta^2)}\frac{\sin(\xi_0 s)}{s}. \tag{18}$$

Розклавши у цьому виразі дріб з параметром p на прості дроби, отримуємо

$$\hat{T}_2(s,p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{q_0}{\beta_t}\left[\frac{1}{(s^2+\gamma^2)^2}\left(\frac{1}{p+s^2+\beta^2}-\frac{1}{p+\beta_0^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s^2+\gamma^2}\frac{1}{(p+\beta_0^2)^2}\right]\frac{\sin(\xi_0 s)}{s}. \tag{19}$$

Після виконання оберненого перетворення Лапласа у (19) і нескладних обчислень для косинус-трансформанти Фур'є від температури маємо

$$\tilde{T}_2(s,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{q_0}{\beta_t} e^{-\beta_0^2\tau}\left[\frac{\tau}{s^2+\gamma^2} - \frac{1}{(s^2+\gamma^2)^2}\left(1 - e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}\right)\right]\frac{\sin(\xi_0 s)}{s}. \quad (20)$$

Розклавши у цьому виразі дроби з параметром s на прості і виконавши обернення косинус-перетворення Фур'є, отримуємо функцію температури

$$T_2(\xi,\tau) = \frac{2q_0 e^{-\beta_0^2\tau}}{\pi\beta_t\gamma^2}\left[\left(\tau - \frac{1}{\gamma^2}\right)(I_1(\xi) - I_2(\xi)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\gamma^2}(I_1^*(\xi,\tau) - I_2^*(\xi,\tau)) + K_2(\xi) - K_2^*(\xi,\tau)\right]. \quad (21)$$

Тут через $K_2(\xi)$ і $K_2^*(\xi,\tau)$ позначено функції, які виражаються через похідні від відомих (див. (15)) інтегралів $I_2(\xi)$ та $I_2^*(\xi,\tau)$:

$$K_2(\xi) = \int_0^\infty \frac{\sin(\xi_0 s)\cos(\xi_0 s)}{(s^2+\gamma^2)^2} s\,ds = -\frac{1}{2\gamma}\frac{dI_2(\xi)}{d\gamma},$$

$$K_2^*(\xi,\tau) = \int_0^\infty e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}\frac{\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)}{(s^2+\gamma^2)^2} s\,ds = -\tau I_2^*(\xi,\tau) - \frac{1}{2\gamma}\frac{dI_2^*(\xi,\tau)}{d\gamma}, \quad (22)$$

З виразу (20) і аналогічного до (13) інтеграла, якого тут не наводимо, очевидно, що найвищого рівня температура $T_2(\xi,\tau)$, як і у випадку ***I***, досягає у точці $\xi = 0$ при $\xi_0 \to 0$:

$$\lim_{\xi_0\to 0} T_2(0,\tau) = \frac{q_0^*}{2\beta_t\gamma^3}\left[(1 - \Phi(\gamma\sqrt{\tau}))\left(2\gamma^2\tau + e^{-\gamma^2\tau}\right)e^{-\gamma^2\tau} + \right.$$

$$\left. + 2\gamma\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}e^{-2\gamma^2\tau} + 2\gamma^2\tau - 1\right]e^{-\beta_0^2\tau}. \quad (23)$$

Дію наступних двох джерел тепла розглянемо у поєднанні.

Режими III, IV:

$$Q_{3,4}(\xi,\tau) = Q_0\theta(\xi,\xi_0)\left(1 \mp e^{-\beta_0^2\tau}\right),$$

причому верхній знак відноситься до розподілу джерел (4), а нижній – до розподілу (5).

У цих двох випадках послідовним застосуванням інтегрального перетворення Лапласа і косинус-перетворення Фур'є отримуємо у просторі зображень Лапласа – Фур'є трансформанту функцій джерел тепла:

$$\tilde{\bar{Q}}_{3,4}(s,p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Q_0\left(\frac{1}{p} \mp \frac{1}{p+\beta_0^2}\right)\frac{\sin(\xi_0 s)}{s}. \quad (24)$$

Зображення (9) у просторі Лапласа – Фур'є температури після розкладів відповідних до джерел (4) і (5) дробів з параметром p на прості набувають такої форми:

$$\tilde{\bar{T}}_{3,4}(s,p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{q_0}{\beta_t}\left[\frac{1}{s^2+\beta^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+s^2+\beta^2}\right) \mp \right.$$

$$\left. \mp \frac{1}{s^2+\gamma^2}\left(\frac{1}{p+\beta_0^2} - \frac{1}{p+s^2+\beta^2}\right)\right]\frac{\sin(\xi_0 s)}{s}.$$

Виконавши у цій формулі обернення перетворення Лапласа, користуючись таблицями інтегральних перетворень [1], для косинус-трансформанти Фур'є від температури отримуємо

$$\tilde{T}_{3,4}(s,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{q_0}{\beta_t}\left[\frac{1}{s^2+\beta^2}\left(1-e^{-(s^2+\beta^2)\tau}\right)\mp\right.$$

$$\left.\mp\frac{e^{-\beta_0^2\tau}}{s^2+\gamma^2}\left(1-e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}\right)\right]\frac{\sin(x_0 s)}{s}, \qquad (25)$$

а після обернення косинус-перетворення Фур'є і подальшого розкладу підінтегральних дробів з параметром s на прості приходимо до виразів температурних полів через відомі інтеграли (15):

$$T_{3,4}(x,\tau) = \frac{2q_0}{\pi\beta_t}\left[\frac{1}{\beta^2}\left(I_1(x) - I_{1\beta}^*(x,\tau) - I_{2\beta}(x) + I_{2\beta}^*(x,\tau)\right)\mp\right.$$

$$\left.\mp\frac{1}{\gamma^2}\left(I_1(x) - I_1^*(x,\tau) - I_2(x)(x) + I_2^*(x,\tau)\right)e^{-\beta_0^2\tau}\right]. \qquad (26)$$

При цьому інтеграли з індексами, що містять параметр β, співпадають з відповідними їм інтегралами з (15), якщо у них параметр γ замінити на β.

Як і у попередніх випадках розподілів джерел тепла, своїх найбільших значень у часі температура $T_{3,4}(x,\tau)$ набуває у точці $x=0$ при нескінченному звуженні активної зони нагріву $x_0 \to 0$ і подається формулами

$$\lim_{x_0\to 0} T_{3,4}(0,\tau) = \frac{q_0^*}{\beta_t}\left\{\frac{1}{\beta}\left[1-\left(1-\Phi(\beta\sqrt{\gamma})\right)e^{-2\beta^2\tau}\right]\mp\right.$$

$$\left.\mp\frac{1}{\gamma}\left[1-\left(1-\Phi(\gamma\sqrt{\tau})\right)e^{-2\gamma^2\tau}\right]e^{-\beta_0^2\tau}\right\}. \qquad (27)$$

Для визначення за відомим температурним полем $T_j(x,\tau)$, $j=1,2,3,4$, напружено-деформованого стану в оболонці, виготовленій з податливого до зсувів матеріалу, знайдемо функції нормальних прогинів $W_j(x,\tau)$ як розв'язки звичайного диференціального рівняння четвертого порядку [7], у якому час τ вважаємо параметром:

$$\frac{d^4W_j}{dx^4} - 2g^2\frac{d^2W_j}{dx^2} + 4k^4W_j(x,\tau) = 4k^4\beta_t R\left(T_j(x,\tau) - \varepsilon\frac{d^2T_j}{dx^2}\right),$$

$$j = 1,2,3,4, \qquad (28)$$

де $2g^2 = E/(k'G')$, $4k^4 = 3(1-\nu^2)(R/h)^2$, $\varepsilon = g^2/(2k^4)$, E – модуль Юнга, k' і G' – коефіцієнт і модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона, β_t – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу оболонки.

Застосувавши косинус-перетворення Фур'є до рівняння (28) за умови парності та обмеженості функцій прогинів разом з похідними до третього порядку включно (що є наслідком парності та обмеженості температури на осі Ox), отримуємо трансформанту Фур'є

$$\tilde{W}_j(s,\tau) = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,k^4R\beta_t\,\frac{1+\varepsilon s^2}{s^4+2g^2s^2+4k^4}\,\tilde{T}_j(x,\tau). \qquad (29)$$

Функції прогинів $W_j(x,\tau)$, $j=1,2$, відповідно до джерел (2) і (3) побудуємо окремо.

I. У випадку розподілу джерел тепла (2) з урахуванням зображення Лапласа температурного поля (12) косинус-трансформанта (29) має вигляд

$$\bar W_1(s,\tau) = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k^4 R q_0 e^{-\beta_0^2\tau}\left(1 - e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}\right)\frac{(1+\varepsilon s^2)\sin(\xi_0 s)}{s(s^2+\gamma^2)(s^4+2g^2s^2+4k^4)}. \quad (30)$$

Здійснивши розклад раціонального дробу і виконавши обернення косинус-перетворення, отримуємо розв'язок у вигляді добутку зникаючої при $\tau \to \infty$ експоненти і лінійної комбінації невласних інтегралів $I_j(\xi)$, $I_j^*(\xi,\tau)$:

$$W_1(\xi,\tau) = \frac{8k^4Rq_0}{\pi} e^{-\beta_0^2\tau}\sum_{i=1}^{4} C_i\left(I_i(\xi) - I_i^*(\xi,\tau)\right), \quad (31)$$

де $C_1 = \frac{1}{(2\gamma k^2)^2}$, $C_2 = \frac{1}{2}\frac{\gamma^2 g^2 - 2k^4}{(\gamma k^2\mu_\gamma^2)^2}$, $C_3 = -\frac{1}{(\mu_\gamma)^4}$, $C_4 = -\frac{\gamma^2}{4k^4\mu_\gamma^4}$ – відмінні від нуля коефіцієнти розкладу на прості дроби (в оригіналі) підінтегрального дробу, а $\mu_\gamma^4 = 4k^4 - 2\gamma^2 g^2 + \gamma^4$.

Зауважимо, що в (31) абсолютно збіжні інтеграли $I_i(\xi)$, $I_i^*(\xi,\tau)$ для $i = 1, 2$ є такими, як у (15), а для $i = 3, 4$ мають такий вигляд (див. [3]):

$$I_3(\xi) = \int_0^\infty \frac{\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)}{s^4 + 2g^2s^2 + 4k^4}\, s\, ds, \qquad I_4(\xi) = \int_0^\infty \frac{\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)}{s^4 + 2g^2s^2 + 4k^4}\, s^3\, ds,$$

$$I_3^*(\xi,\tau) = \int_0^\infty e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}\frac{\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)}{s^4 + 2g^2s^2 + 4k^4}\, s\, ds,$$

$$I_4^*(\xi,\tau) = \int_0^\infty e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}\frac{\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)}{s^4 + 2g^2s^2 + 4k^4}\, s^3\, ds.$$

При цьому інтеграли $I_i^*(\xi,\tau)$, $i = 3, 4$, за незначної податливості матеріалу оболонки до зсувів, $E/G' : 0$, виражаються через інтеграл ймовірності від комплексного аргументу [10].

За формулами [8]

$$N(\xi,\tau) = 2Eh\left(\frac{W(\xi,\tau)}{R} - \beta_t T(\xi,\tau)\right), \quad (32)$$

$$M(\xi,\tau) = \frac{D}{R^2}\left[2g^2\left(W(\xi,\tau) - \beta_t RT(\xi,\tau)\right) - W''_{\xi\xi}(\xi,\tau)\right], \quad (33)$$

де $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ – циліндрична жорсткість оболонки, знаходимо вирази для кільцевих зусиль і згинних моментів:

$$N_1(\xi,\tau) = -\frac{4Ehq_0}{\pi\mu^4} e^{-\beta_0^2\tau}\sum_{i=1}^{4} A_j\left(I_i(\xi) - I_i^*(\xi,\tau)\right), \quad (34)$$

$$M_1(\xi,\tau) = \frac{2Dq_0}{\pi R\mu^4}\sum_{i=1}^{4}\Big[A_i g^2\gamma^2\left(I_i(\xi) - I_i^*(\xi,\tau)\right) -$$

$$- 4k^4\mu^4 C_i\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(I_i(\xi) - I_i^*(\xi,\tau)\right)\Big]e^{-\beta_0^2\tau}. \quad (35)$$

Тут сталі A_j мають такі значення:

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = \frac{\gamma^2}{\mu_\gamma^4}, \qquad A_3 = -\frac{4k^4}{\mu_\gamma^4}, \qquad A_4 = -A_2.$$

З порівняння виразів косинус-трансформант Фур'є функції прогинів (30) і функції температури (12) випливає, що залежність від часу обидвох функцій однакова, а отже, і критичне значення параметра часу, коли температура і прогини досягають максимумів, для обидвох функцій є тим самим.

Існування критичних значень параметра часу τ як для температури та прогину, так і для кільцевих зусиль і осьових моментів випливає з розповсюдженої на напівнескінченний інтервал теореми Ролля про неперервні і диференційовні функції, які мають нульове значення при $\tau = 0$ і наближаються до нуля при $\tau \to \infty$.

II. Врахувавши косинус-трансформанту Фур'є температури (20), що відповідає тепловим джерелам (3), отримуємо косинус-трансформанту від функції прогинів:

$$\tilde{W}_2(s,\tau) = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,k^4 R q_0 \left[\left(\tau - \frac{1 - e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}}{s^2+\gamma^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(1+\varepsilon s^2)\sin(\xi_0 s)}{s(s^2+\gamma^2)(s^4+2g^2s^2+4k^4)}\right]e^{-\beta_0^2\tau}. \tag{36}$$

Після оберненого перетворення оригінал функції $W_2(\xi,\tau)$ набуває вигляду

$$W_2(\xi,\tau) = \frac{8k^4 R q_0}{\pi}\,e^{-\beta_0^2\tau}\int_0^\infty\left(\tau - \frac{1 - e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}}{s^2+\gamma^2}\right)\times$$

$$\times\frac{(1+\varepsilon s^2)\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)}{s(s^2+\gamma^2)(s^4+2g^2s^2+4k^4)}\,ds. \tag{37}$$

Пропускаючи викладки, пов'язані з розкладом раціональних частин двох підінтегральних дробів за параметром s, один із яких з відомими коефіцієнтами C_j міститься в інтегралі (30), і розв'язанням відповідної до джерел (3) лінійної системи дев'яти алгебраїчних рівнянь з коефіцієнтами

$$B_1 = \frac{1}{4k^4\gamma^4},\qquad B_2 = \frac{1}{4k^4}\left(\frac{\gamma^4 - 4k^4}{\mu^8} - \frac{1}{\gamma^4}\right),\qquad B_4 = \frac{g^2\gamma^2 - 2k^4}{2k^4\gamma^2\mu^4},$$

$$B_6 = \frac{4k^4 - \gamma^4}{4k^4\mu^8},\qquad B_8 = \frac{2(g^2 - \gamma^2)}{\mu^8},\qquad B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = 0,$$

з (37) отримуємо функцію прогинів:

$$W_2(\xi,\tau) = \frac{8k^4 R q_0}{\pi}\,e^{-\beta_0^2\tau}\Big[(C_1\tau - B_1)I_1(\xi) + (C_2\tau - B_2)I_2(\xi) + (C_3\tau - B_8)\times$$

$$\times I_3(\xi) - (C_4\tau - B_6)\frac{\partial^2 I_3(\xi)}{\partial\xi_0^2} - B_4\frac{\partial I_2(\xi)}{\partial\beta_0^2} + B_1 I_1^*(\xi,\tau) - (B_4\tau - B_2)\times$$

$$\times I_2^*(\xi,\tau) + B_8 I_3^*(\xi,\tau) + B_4\frac{\partial I_2^*(\xi,\tau)}{\partial\beta_0^2} - B_6\frac{\partial^2 I_3^*(\xi,\tau)}{\partial\xi_0^2}\Big]. \tag{38}$$

Зусилля (32) і моменти (33) визначаються за формулами:

$$N_2(\xi,\tau) = \frac{4Ehq_0 e^{-\beta_0^2\tau}}{\pi}\left[\frac{\gamma^2\tau - 1}{\mu^4}\left(I_2(\xi) - \frac{4k^4}{\gamma^2}I_3(\xi) + \frac{1}{4k^4}\frac{\partial^2 I_3(\xi)}{\partial\xi_0^2}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{4k^4\gamma^4}\left(\frac{\partial I_2(\xi)}{\partial\gamma^2} + I_1^*(\xi,\tau) + \frac{\mu^4\tau + \gamma^2}{\mu^4}I_2^*(\xi,\tau) - \frac{\partial I_2^*(\xi,\tau)}{\partial\gamma^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{4k^4\mu^4}\left(\gamma^2-2g^2)I_3^*(\xi,\tau)+\frac{\partial^2 I_3^*(\xi,\tau)}{\partial\xi_0^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{\gamma^4}(I_1^*(\xi,\tau)-I_2^*(\xi,\tau)-g^2 I_3^*(\xi,\tau))\Big], \tag{39}$$

$$M_2(\xi,\tau)=\frac{D}{R}\left[\frac{g^2}{Eh}N_2(\xi,\tau)-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 W_2(\xi,\tau)}{\partial\xi^2}\right]. \tag{40}$$

Оскільки $I_i^*(\xi,0)=I_i(\xi)$, $i=1,2,3$, то з формули для функції прогину (38) випливає, що у початковий момент часу прогини в оболонці відсутні. Так само очевидним є наближення до нуля усіх розрахункових величин при $\tau\to\infty$ з огляду на наявність експоненційного множника у формулах (38)–(40). Отже, в інтервалі $\tau\in[0,\infty)$ існують критичні значення параметра часу τ, при яких прогини, зусилля і моменти в оболонці досягають максимальних рівнів. При цьому слід зауважити, що ці критичні значення для прогину і зусиль, а також моментів, взагалі кажучи, є різними.

III–IV. Як і при побудові температурних полів, вплив теплових джерел (4) і (5) на термопружні процеси в оболонці дослідимо для обох розподілів разом.

Здійснивши косинус-перетворення Фур'є рівняння (28) за умови відсутності прогину та його похідних на нескінченності $(\xi\to\infty)$ з урахуванням косинус-трансформант Фур'є (25) від функцій температури, після оберненого перетворення отримуємо

$$W_{3,4}(\xi,\tau)=\frac{8k^4Rq_0}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1-e^{-(s^2+\beta^2)\tau}}{s^2+\beta^2}\mp\frac{1-e^{-(s^2+\gamma^2)\tau}}{s^2+\gamma^2}e^{-\beta_0^2\tau}\right]\times$$

$$\times\frac{(1+\varepsilon s^2)\sin(\xi_0 s)\cos(\xi s)}{s(s^4+2g^2s^2+4k^4)}ds. \tag{41}$$

Після аналогічного до попередніх випадків розкладу підінтегральних дробів на прості дроби за параметром s у кінцевому вигляді дістаємо

$$W_{3,4}(\xi,\tau)=\frac{1}{8\pi}k^4Rq_0\sum_{j=1}^{4}\left[C_{j\beta}(I_{j\beta}(\xi)-I_{j\beta}^*(\xi,\tau))\mp C_j(I_j(\xi)-I_j^*(\xi,\tau))e^{-\beta_0^2\tau}\right], \tag{42}$$

де коефіцієнти $C_{j\beta}=C_j$, якщо у наведених вище виразах для C_j (див. (31) для прогину $W_1(\xi,\tau)$) параметр γ замінити на β.

З (42) випливає, що зумовлені джерелами (4) і (5) прогини $W_{3,4}(\xi,\tau)$ при $\beta_0\to\infty$ співпадають і відповідають дії теплових джерел у режимі функції одиничного стрибка Гевісайда. Таке ж співпадіння прогинів має місце і в асимптотичному режимі дії джерел (4) і (5) при $\tau\to\infty$.

Кільцеві зусилля і осьові моменти визначаємо за формулами (32), (33):

$$N_{3,4}(\xi,\tau)=\frac{4Ehq_0}{\pi}\sum_{i=1}^{4}\Big[(4k^4C_{j\beta}-\beta^{-2})(I_{i\beta}(\xi)-I_{i\beta}^*(\xi,\tau))\mp$$

$$\mp(4k^4C_j-\gamma^{-2})(I_i(\xi)-I_i^*(\xi,\tau))e^{-\beta_0^2\tau}\Big], \tag{43}$$

$$M_{3,4}(\xi,\tau)=\frac{D}{R^2}\left[\frac{g^2R}{Eh}N_{3,4}(\xi,\tau)-\frac{\partial^2 W_{3,4}(\xi,\tau)}{\partial\xi^2}\right]. \tag{44}$$

Оскільки $\lim\limits_{\tau\to\infty} I_i^*(\xi,\tau) = \lim\limits_{\tau\to\infty} I_{i\beta}^*(\xi,\tau) = 0$, то в асимптотичному режимі нагрівання внаслідок ідентичності теплових джерел (4) і (5) при $\tau\to\infty$ прогини, зусилля і моменти подаються спільними для вказаних джерел рівностями:

$$\lim_{\tau\to\infty} W_{3,4}(\xi,\tau) = \frac{8k^4Rq_0}{\pi}\sum_{i=1}^{4} C_{i\beta} I_{i\beta}(\xi), \tag{45}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} N_{3,4}(\xi,\tau) = \frac{4Ehq_0}{\pi}\sum_{i=1}^{4}\left(4k^4C_{j\beta} - \frac{1}{\beta^2}\right) I_{i\beta}(\xi), \tag{46}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} M_{3,4}(\xi,\tau) = \frac{4Dq_0}{\pi R}\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\gamma^2}{\mu^4}A_i - 2k^2C_{i\beta}\frac{d^2}{d\xi^2}\right) I_{i\beta}(\xi). \tag{47}$$

Однак, якщо у випадку джерел тепла (4) асимптотичні вирази (45)–(47) визначають максимальні прогини, зусилля та моменти у поперечних перерізах оболонки при $\tau\to\infty$, то у випадку дії джерел (5) ці розрахункові величини, як і температура (37), набувають максимальних рівнів за скінченних і, взагалі кажучи, різних моментів часу.

На рис. 1 наведено зміну в часі відносної температури $T_j^*(0,\tau) = \frac{\beta_t}{q_0^*}T_j(0,\tau)$, $j = 1, 2, 3, 4$ (тут $q_0^* = 2\beta^2Ehq_0$) на напрямній оболонки $\xi = 0$ і відповідних їм відносних кільцевих зусиль $10N_j^*(0,\tau) = -\frac{N_j(0,\tau)}{2Ehq_0^*}$, зумовлених тепловими джерелами (2)–(5) (режими I–IV) зі змінною потужністю $Q_j(0,\tau)$, початкове значення якої $Q_0^* = Q_0\xi_0 = \mathrm{const}$, при нескінченному звуженні активної області нагрівання ($\xi_0\to 0$). Кривих зміни у часі відносних згинних моментів $10^2M_j^*(0,\tau) = \frac{M_j(0,\tau)}{2EhRq_0^*}$ не наводимо через якісну близькість їх конфігурації до відповідних їм кривих стискуючих кільцевих зусиль $10N_j^*(0,\tau)$.

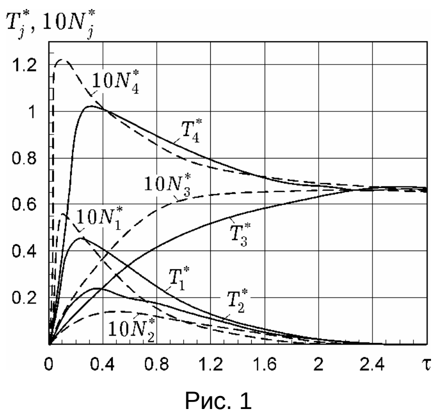

Рис. 1

Криві залежностей температури і зусиль від часу побудовано для значення $\beta_0/\beta = 0.86$ – відношення коефіцієнта згасання теплових джерел β_0 до узагальненого коефіцієнта теплопровідності-тепловіддачі β. Випадок їх рівності і поведінку розрахункових величин при зближенні значень β_0 і β досліджено авторами в [11], де показано, що при $\beta_0/\beta = 1$ критичні значення параметра часу t для функцій температури (і прогинів), а також кільцевих зусиль (і осьових моментів) мало відрізняються від розглянутого випадку $b_0 / b = 0.86$. Однак зазначимо, що зі зближенням коефіцієнтів b_0 і b рівень розрахункових величин дещо знижується.

Обчислення кільцевих зусиль і осьових моментів виконано для класичної моделі деформування оболонки: $E/G' = 0$. Вплив зсувного фактора на термопружну поведінку оболонки детально досліджено авторами в роботі [7].

Числовий аналіз свідчить, що найвищі рівні зусиль і моментів у випадках розподілів джерел тепла (2), (3), (5) (режими *I*, *II*, *IV*) досягаються дещо раніше від критичних значень часу, яким відповідають максимальні рівні температури і прогину, що дозволяє розраховувати оболонку на міцність за силовими критеріями.

Окремо слід зазначити, що числовий аналіз розв'язків аналогічних задач [4, 11] для оболонки скінченної довжини λ ($\lambda \ge 2$) і отриманих у цій роботі розв'язків для нескінченно довгої оболонки свідчать про те, що максимальні рівні розрахункових величин при дії ідентичних джерел тепла досягаються для обидвох оболонок у практично однакові моменти часу.

Зауважимо, крім цього, що зміна у часі температур, прогинів, зусиль і моментів поблизу торця оболонки $x = 0$ при нескінченному звуженні активної області нагрівання $x_0 \to 0$ відбувається без помітних числових розбіжностей як для нескінченно довгої, так і для короткої ($\lambda \ge 2$) оболонок.

Ці висновки дозволяють проводити числові розрахунки термопружного стану нескінченно довгої оболонки у довільній точці твірної (x, t) на основі відповідних розв'язків [11] для оболонки скінченної довжини, і тим самим уникнути суттєвих незручностей при обчисленнях з використанням таблиць інтегралів ймовірності від комплексного аргументу.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. – Т. 1. – Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: Наука, 1969. – 343 с.
2. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // Прикл. математика и механика. – 1960. – 24, № 2. – С. 361–363.
   Те саме: *Bolotin V. V.* Equations for the non-stationary temperature fields in thin shells in the presence of sources of heat // J. Appl. Math. Mech. – 1960. – 24, No. 2. – P. 515–519. – https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90053-8.
3. *Ганулiч В. К., Максимук О. В., Ганулiч Н. В.* Квазістатична задача термопружності для циліндричної оболонки із джерелами тепла і тепловіддачею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 1. – С. 154–161.
   Те саме: *Hanulich V. K., Maksymuk O. V., Hanulich N. V.* Quasistatic problem of thermoelasticity for a cylindrical shell with heat sources and heat exchange // J. Math. Sci. – 2017 – 222, No. 2. – P. 194–204.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3292-9.
4. *Ганулiч Н. В.* Циліндрична оболонка скінченної довжини із низькою зсувною жорсткістю за дії локальних джерел тепла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 4. – С. 82–90.
   Те саме: *Hanulich N. V.* Cylindrical shell of finite length with low shear stiffness under the action of local heat sources // J. Math. Sci. – 2019. – 238, No. 2. – P. 97–20. – https://doi.org/10.1007/s10958-019-04220-1.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.
6. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. – Москва: Наука, 1973. – 228 с.
7. *Максимук О. В., Ганулiч Н. В.* Термопружність циліндричної оболонки із низькою зсувною жорсткістю у локальному температурному полі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 3. – С. 26–34.
   Те саме: *Maksymuk A. V., Hanulich N. V.* Thermoelasticity of a cylindrical shell with low shear stiffness in a local temperature field // J. Math. Sci. – 2017. – 226, No. 1. – P. 28–40. – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3516-z.

8. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – Москва: Наука, 1983. – 752 с.
10. *Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М.* Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1954. – 268 с.
11. *Maksymuk O., Ganulich N.* On the calculation of thermoelastic processes in a cylindrical shell with local heat sources // Math. Model. Comput. – 2017. – 4, No. 2. – P. 162–170. – https://doi.org/10.23939/mmc2017.02.162.

ТЕРМОУПРУГОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОДАТЛИВОЙ СДВИГАМ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТИ

Решена квазистатическая задача термоупругости для бесконечно длинной цилиндрической оболочки, изготовленной из материала с низкой сдвиговой жесткостью. Оболочка подвержена воздействию локальных тепловых источников переменной во времени мощности. Выполнен числовой анализ температурных полей, кольцевых усилий и осевых моментов для ряда практически важных режимов нагрева оболочки.

Ключевые слова: *цилиндрическая оболочка, режимы нагрева, температурное поле, гипотеза Тимошенко, прогибы, усилия, критические значения времени.*

THERMOELASTIC BEHAVIOR OF INFINITE LONG CYLINDRICAL SHELL COMPLIANT TO SHEARS UNDER THE ACTION OF HEAT SOURCES OF VARIABLE POWER

The quasistatic problem of thermoelasticity for an infinitely long cylindrical shell made of a material with low shear stiffness is solved. The shell is subjected to action of the local heat sources with a time-varying power. A numerical analysis of temperature fields, ring forces, and axial moments is carried out for a number of practically important shell heating modes.

Key words: *cylindrical shell, heating modes, temperature field, Tymoshenko's hypothesis, deflections, forces, time critical values.*

[1] Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 18.04.19