УДК 512.643.4

Н. С. Джалюк ✉

РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ $AX + YB = C$ З ТРИКУТНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Встановлено необхідні і достатні умови існування трикутних розв'язків лінійного матричного рівняння $AX + YB = C$ над комутативним кільцем головних ідеалів із трикутними коефіцієнтами A, B і C. Доведено також, що не існує матричного рівняння такого вигляду із трикутними коефіцієнтами A, B і C, яке має лише трикутні розв'язки.

Ключові слова: *лінійне матричне рівняння типу Сильвестра, розв'язок матричного рівняння, трикутний розв'язок, трикутні матриці.*

Лінійні матричні рівняння типу Сильвестра почали розв'язувати ще наприкінці XIX ст., і до цього часу вони привертають увагу багатьох науковців, що зумовлено широким колом задач, в яких вони виникають: задачі теорії керування, операторного числення, теорії динамічних систем, опису факторизацій матриць і багато інших (див., наприклад, монографію [5] і список використаної там літератури).

Розглянемо лінійне матричне рівняння типу Сильвестра

$$AX + YB = C, \tag{1}$$

де A, B і C – відомі матриці з кільця $M(n, R)$, X і Y – невідомі матриці з $M(n, R)$ над комутативною областю головних ідеалів R. Рівняння (1) ще називають лінійним двобічним матричним рівнянням з двома змінними. Розв'язність цього рівняння пов'язана з еквівалентністю блочних матриць

$$M = \begin{Vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad N = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}.$$

На основі теореми Рота [7] і її узагальнення [3] матричне рівняння (1) має розв'язок тоді й тільки тоді, коли матриці M та N є еквівалентними.

Опишемо розв'язки матричного рівняння (1) з трикутними матрицями-коефіцієнтами A, B і C, зокрема, встановимо умови існування трикутних розв'язків. Таке матричне рівняння може мати розв'язки як трикутного, так і нетрикутного вигляду, а також може і не мати розв'язків трикутного вигляду.

Приклад. Матричне рівняння (1) з коефіцієнтами

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

над кільцем цілих чисел $\mathbf{Z}$ має розв'язки, але трикутних розв'язків не має.

Матричні рівняння вигляду (1) з трикутними матрицями-коефіцієнтами виникають, зокрема, при описі факторизацій матриць у кільцях блочних матриць [6] та у випадках, коли матричні коефіцієнти такого рівняння можуть бути зведені еквівалентними перетвореннями до трикутного вигляду [1, 2]. У праці [4] побудовано алгоритми розв'язування матричного рівняння (1) з коефіцієнтами A і B у трикутній або квазітрикутній формі над полем дійсних чисел. Знаходженню розв'язків блочно-трикутного вигляду матричного рівняння $BXC = A$ над довільним полем присвячено працю [8], де запропоновано необхідні та достатні умови існування такого розв'язку.

Нехай у матричному рівнянні (1) матриці $A, B, C \in M(n, R)$ є матрицями нижнього трикутного вигляду:

✉ nataliya.dzhalyuk@gmail.com

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\|, \quad B=\left\|\begin{matrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}\right\|,$$

$$C=\left\|\begin{matrix} c_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{matrix}\right\|. \tag{2}$$

Надалі через (a,b) будемо позначати найбільший спільний дільник елементів $a,b\in R$. Запис $(a,b)\mid c$ (ділить) означає, що (a,b) є дільником елемента $c\in R$. Через R_m позначимо повну множину лишків за модулем ідеалу (m), породженого елементом $m\in R$.

Встановимо умови існування розв'язків нижнього трикутного вигляду матричного рівняння (1) із трикутними матрицями-коефіцієнтами A, B і C вигляду (2). Зрозуміло, що всі результати є справедливими і для матриць верхнього трикутного вигляду.

Теорема 1. *Нехай матричне рівняння* (1) *з трикутними коефіцієнтами* A, B *і* C *має розв'язки. Матричне рівняння* (1) *має розв'язки того самого трикутного вигляду, що й матриці* A, B *і* C, *тоді й тільки тоді, коли найбільші спільні дільники* (a_{ii},b_{ii}) *діагональних елементів* a_{ii} *та* b_{ii} *матриць* A *і* B *є дільниками діагональних елементів* c_{ii} *матриці* C *для всіх* $i=1,\ldots,n$.

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Враховуючи вигляд (2) матриць-коефіцієнтів A, B і C із матричного рівняння (1), отримаємо таку систему лінійних рівнянь:

$$\sum_{\lambda=1}^{i} a_{i\lambda}x_{\lambda j}+\sum_{k=j}^{n} b_{kj}y_{ik}=c_{ij}, \qquad i,j=1,\ldots,n, \tag{3}$$

де $a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}=0$ при $i<j$.

Нехай матричне рівняння (1) з трикутними коефіцієнтами A, B і C має трикутний розв'язок $X_{\mathrm{tr}}=[x_{ij}^{(\mathrm{tr})}]_{i,j=1}^{n}$, $Y_{\mathrm{tr}}=[y_{ij}^{(\mathrm{tr})}]_{i,j=1}^{n}$, тобто $x_{ij}^{(\mathrm{tr})}=0$, $y_{ij}^{(\mathrm{tr})}=0$ при $i<j$. Тоді система (3) містить рівняння

$$a_{ii}x_{ii}+y_{ii}b_{ii}=c_{ii}, \qquad i=1,\ldots,n,$$

які мають розв'язки тоді і тільки тоді, коли $(a_{ii},b_{ii})\mid c_{ii}$ для всіх $i=1,\ldots,n$ [2]. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $(a_{ii},b_{ii})\mid c_{ii}$ для всіх $i=1,\ldots,n$, де a_{ii}, b_{ii} і c_{ii} – діагональні елементи відповідно матриць A, B і C, з матричного рівняння (1). Система лінійних рівнянь (3) містить $p=n(n-1)/2$ рівнянь вигляду

$$\sum_{\lambda=1}^{i} a_{i\lambda}x_{\lambda j}+\sum_{k=j}^{n} b_{kj}y_{ik}=0, \qquad i,j=1,\ldots,n, \qquad i<j. \tag{4}$$

Сукупність цих рівнянь розіб'ємо на $n-1$ підсистем таким чином: кожна t-та підсистема складається з t рівнянь, що отримуються при $i=1,2,\ldots,t$, $j=n-(t-1),n-(t-2),\ldots,n$.

Перша підсистема (тобто, коли $t=1$, а тому $i=1$, $j=n$) складається з одного рівняння:

$$a_{11}x_{1n} + y_{1n}b_{nn} = 0, \tag{5}$$

загальним розв'язком якого є

$$x_{1n} = b_{nn}k_{1n}, \qquad y_{1n} = -a_{11}k_{1n}, \qquad k_{1n} \in R. \tag{6}$$

Друга підсистема (тобто, коли $t = 2$, а тому $i = 1,2$, $j = n-1, n$) складається з двох рівнянь:

$$a_{11}x_{1,n-1} + y_{1,n-1}b_{n-1,n-1} + y_{1n}b_{n,n-1} = 0,$$

$$a_{21}x_{1n} + a_{22}x_{2n} + y_{2n}b_{nn} = 0.$$

Підставивши у ці рівняння розв'язки (6) рівняння (5), отримаємо такі рівняння:

$$a_{11}(x_{1,n-1} - b_{n,n-1}k_{1n}) + y_{1,n-1}b_{n-1,n-1} = 0,$$

$$a_{22}x_{2n} + b_{nn}(y_{2n} + a_{21}k_{1n}) = 0,$$

загальним розв'язком яких є

$$x_{1,n-1} = b_{n,n-1}k_{1n} + b_{n-1,n-1}k_{1,n-1}, \qquad y_{1,n-1} = -a_{11}k_{1,n-1}, \qquad k_{1,n-1} \in R,$$

$$x_{2n} = b_{nn}k_{2n}, \qquad y_{2n} = -a_{22}k_{2n} - a_{21}k_{1n}, \qquad k_{2n} \in R.$$

Далі розглядаємо наступну підсистему і т. д. Таким чином, отримаємо загальний розв'язок рівнянь (4):

$$x_{ij} = \sum_{\lambda=j}^{n} b_{\lambda j}k_{i\lambda}, \qquad y_{ij} = -\sum_{\lambda=1}^{i} a_{i\lambda}k_{\lambda j}, \qquad k_{ij} \in R, \tag{7}$$

для усіх $i < j$, $i, j = 1, \dots, n$.

Система лінійних рівнянь (3) містить також n рівнянь такого вигляду:

$$a_{ii}x_{ii} + y_{ii}b_{ii} = c_{ii} - \sum_{\lambda=1}^{i-1} x_{\lambda i}a_{i\lambda} - \sum_{k=i+1}^{n} y_{ik}b_{ki}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{8}$$

У праві частини рівнянь (8) підставимо розв'язки (7). Із запису розв'язків (7) бачимо, що рівняння (8) можемо подати як

$$a_{ii}\tilde{x}_{ii} + \tilde{y}_{ii}b_{ii} = c_{ii}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{9}$$

де

$$\tilde{x}_{ii} = x_{ii} - \sum_{\lambda=2}^{n} b_{\lambda i}k_{i\lambda},$$

$$\tilde{y}_{ii} = y_{ii} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} a_{i\lambda}k_{\lambda i}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Оскільки за умовою $(a_{ii}, b_{ii}) \mid c_{ii}$ для всіх $i = 1, \dots, n$, то розв'язки рівняння (9) існують, і загальний їхній розв'язок з урахуванням результатів [2] запишемо так:

$$\tilde{x}_{ii} = x_{ii}^{(0)} + \frac{b_{ii}}{\delta_{ii}} r_{ii} + b_{ii}k_{ii},$$

$$\tilde{y}_{ii} = y_{ii}^{(0)} - \frac{a_{ii}}{\delta_{ii}} r_{ii} - a_{ii}k_{ii}, \tag{11}$$

де $\delta_{ii} = (a_{ii}, b_{ii})$, $r_{ii} \in R_{\delta_{ii}}$, $k_{ii} \in R$ для усіх $i = j$, $i, j = 1, \dots, n$, а $x_{ii}^{(0)}, y_{ii}^{(0)}$ –

частковий розв'язок рівняння

$$a'_{ii}\tilde{x}_{ii} + \tilde{y}_{ii}b'_{ii} = c'_{ii},$$

у якому $a'_{ii} = \dfrac{a_{ii}}{\delta_{ii}}$, $b'_{ii} = \dfrac{b_{ii}}{\delta_{ii}}$, $c'_{ii} = \dfrac{c_{ii}}{\delta_{ii}}$, $(a'_{ii}, b'_{ii}) = 1$. Це означає, що частковий розв'язок

$$x_{ii}^{(0)} \in R_{b'_{ii}}, \qquad y_{ii}^{(0)} = \frac{c'_{ii} - a'_{ii}x_{ii}^{(0)}}{b'_{ii}}$$

визначається однозначно [2]. Тоді загальний розв'язок рівнянь (8) є таким:

$$x_{ii} = x_{ii}^{(0)} + \frac{b_{ii}}{\delta_{ii}} r_{ii} + \sum_{\lambda=i}^{n} b_{\lambda i}k_{i\lambda},$$

$$y_{ii} = y_{ii}^{(0)} - \frac{a_{ii}}{\delta_{ii}} r_{ii} - \sum_{\lambda=1}^{i} a_{i\lambda}k_{\lambda i}, \tag{12}$$

де $r_{ii} \in R_{\delta_{ii}}$, $k_{ij} \in R$, $i \le j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Система рівнянь (3) містить також $p = n(n-1)/2$ рівнянь вигляду

$$\sum_{\lambda=1}^{j} a_{i\lambda}x_{\lambda j} + \sum_{k=j}^{n} b_{kj}y_{ik} = c_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \qquad i > j. \tag{13}$$

Сукупність цих рівнянь також розіб'ємо на $n-1$ підсистем таким чином: кожна s-та підсистема, де $s = 1, 2, \ldots, n-1$, складається з $n-s$ рівнянь, що отримуються при $i = s+1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-s$. Отже, перша підсистема складається з $n-1$ рівнянь при $i = 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Підставимо отримані загальні розв'язки (7) і (12) у кожне з рівнянь цієї підсистеми. Після скорочення однакових доданків отримаємо рівняння

$$a_{ii}x_{ij} + y_{ij}b_{jj} = c_{ij} - a_{ij}\tilde{x}_{jj} - \tilde{y}_{ii}b_{ij} - b_{jj}\sum_{\lambda=1}^{j-1} a_{i\lambda}k_{\lambda j} + a_{ii}\sum_{\lambda=i+1}^{n} b_{\lambda j}k_{i\lambda} \tag{14}$$

для усіх $i - j = 1$, тобто $i = 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Два останні доданки у (14) діляться на $\delta_{ij} = (a_{ii}, b_{jj})$, а $\tilde{x}_{jj}$, $\tilde{y}_{ii}$ – загальні розв'язки (11) рівнянь (9). Оскільки матричне рівняння (1), а, отже, і відповідна йому система лінійних рівнянь (3), за припущенням теореми, має розв'язок, то матимуть розв'язок і рівняння (14). Далі розглядаємо наступну підсистему і т. д.

Поклавши у загальних розв'язках (7) і (12) $k_{ij} = 0$ для всіх $i < j$, $i, j = 1, \ldots, n$, отримаємо трикутний розв'язок матричного рівняння (1). Достатність доведено. Теорему доведено. ♦

Зауважимо, що, якщо найбільший спільний дільник (a_{ii}, b_{ii}) елементів a_{ii} і b_{ii} матриць A і B не є дільником елемента c_{ii} хоча би для одного значення $i = 1, \ldots, n$, то матричне рівняння (1) з трикутними коефіцієнтами A, B і C не має розв'язків трикутного вигляду.

Теорема 2. *Нехай маємо матричне рівняння* (1) *з трикутними коефіцієнтами* A, B *і* C, *і нехай* $(a_{ii}, b_{ii}) \mid c_{ii}$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$. *Якщо* $\left(b_{ii}, \prod_{j=i+1}^{n} a_{jj}\right) = 1$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n-1$, *то матричне рівняння* (1) *має розв'язки, і серед них є розв'язки того самого трикутного вигляду, що й матриці* A, B *і* C.

Д о в е д е н н я. З вигляду системи лінійних рівнянь (3), яку отримуємо з матричного рівняння (1) з трикутними коефіцієнтами A, B і C, бачимо, що за умов теореми 2 ця система має розв'язок, а тому існує розв'язок матричного рівняння (1). Існує також і трикутний розв'язок, оскільки розв'язки $x_{ij} = 0$, $y_{ij} = 0$ рівнянь (4), які отримуємо поклавши відповідні $k_{ij} = 0$ для всіх $i < j$, $i, j = 1, \ldots, n$, у загальному розв'язку (7), за умов теореми 2 будуть також розв'язками системи лінійних рівнянь (3). Теорему доведено. ♦

Наслідок 1. *Якщо визначники матриць-коефіцієнтів* A *і* B *матричного рівняння* (1) *з трикутними коефіцієнтами* A, B *і* C *є взаємно простими, то матричне рівняння* (1) *має розв'язки, і серед них є розв'язки того самого трикутного вигляду, що й матриці* A, B *і* C.

З огляду на доведені твердження виникає природне запитання: чи може матричне рівняння (1) з трикутними коефіцієнтами A, B і C мати всі розв'язки того самого трикутного вигляду, що й матриці A, B і C? Відповідь на це запитання дає наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай матричне рівняння* (1) *з трикутними коефіцієнтами* A, B *і* C *має розв'язки, зокрема трикутні розв'язки того самого вигляду, що і матриці* A, B *і* C. *Тоді матричне рівняння* (1) *має і нетрикутні розв'язки.*

Д о в е д е н н я. Нехай рівняння (1) з трикутними коефіцієнтами A, B і C має трикутний розв'язок $X_{\text{tr}} = [x_{ij}^{(\text{tr})}]_{i,j=1}^{n}$, $Y_{\text{tr}} = [y_{ij}^{(\text{tr})}]_{i,j=1}^{n}$, тобто $x_{ij}^{(\text{tr})} \equiv 0$, $y_{ij}^{(\text{tr})} \equiv 0$ при $i < j$. Тоді рівняння (8), які отримаємо із системи (3), еквівалентної матричному рівнянню (1), набудуть вигляду

$$a_{ii}x_{ii} + y_{ii}b_{ii} = c_{ii}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

і за теоремою 1 $(a_{ii}, b_{ii}) \mid c_{ii}$ для усіх $i = 1, \ldots, n$, тобто усі рівняння (15) мають розв'язок.

Нехай $X_1 = [x_{ij}^{(1)}]_{i,j=1}^{n}$, $Y_1 = [y_{ij}^{(1)}]_{i,j=1}^{n}$ – деякі нетрикутні матриці, у яких

$$x_{ij}^{(1)} = \sum_{\lambda=j}^{n} b_{\lambda j}k_{i\lambda}, \qquad y_{ij}^{(1)} = -\sum_{\lambda=1}^{i} a_{i\lambda}k_{\lambda j},$$

і $k_{ij} \neq 0$, $k_{ij} \in R$ для усіх $i < j$, $i, j = 1, \ldots, n$, Покажемо, що X_1, Y_1 також є розв'язком матричного рівняння (1).

Діагональні елементи трикутного X_{tr}, Y_{tr} і нетрикутного X_1, Y_1 розв'язків матричного рівняння (1) пов'язані співвідношеннями вигляду (10):

$$x_{ii}^{(\text{tr})} = x_{ii}^{(1)} - \sum_{\lambda=2}^{n} b_{\lambda i}k_{i\lambda},$$

$$y_{ii}^{(\text{tr})} = y_{ii}^{(1)} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} a_{i\lambda}k_{\lambda i}, \tag{16}$$

де $k_{ij} \in R$ для усіх $i < j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Розглянемо далі рівняння (13), які при $x_{ij} = x_{ij}^{(\text{tr})}$, $y_{ij} = y_{ij}^{(\text{tr})}$, $i > j$, $i, j = 1, \ldots, n$, мають розв'язок. Підставляючи у рівняння (13) замість $x_{ii}^{(\text{tr})}$, $y_{ii}^{(\text{tr})}$, $i = 1, \ldots, n$, співвідношення (16), отримаємо, що $x_{ij} = x_{ij}^{(1)}$, $y_{ij} = y_{ij}^{(1)}$, $i > j$, $i, j = 1, \ldots, n$, є також розв'язками рівнянь (13). Отже, матричне рівняння має нетрикутний розв'язок X_1, Y_1. Теорему доведено. ♦

1. *Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Стандартна форма матриць над квадратичними кільцями відносно (z,k)-еквівалентності та структура розв'язків матричних двобічних лінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 2. – С. 49–56.
2. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings // Int. Scholarly Research Notices. ISRN Algebra. – 2012. – Article ID 205478. – 14 pages.
   – http://dx.doi.org/10.5402/2012/205478.
3. *Feinberg R. B.* Equivalence of partitioned matrices // J. Res. Nat. Bul. Stand. – 1976. – 80B, No. 1. – P. 89–97.
4. *Jonsson I., Kågström B.* Recursive blocked algorithms for solving triangular systems – Part I: one-sided and coupled Sylvester-type matrix equations // ACM Transactions on Mathematical Software. – 2002. – 28, No. 4. – P. 392–415.
   – https://doi.org/10.1145/592843.592845.
5. *Kaczorek T.* Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. – London: Springer, 2007. – 503 p.
6. *Petrychkovych V., Dzhaliuk N.* Factorizations in the rings of the block matrices // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. – 2017. – No. 3 (85). – P. 23–33.
7. *Roth W. E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Am. Math. Soc. – 1952. – 3, No. 3. – P. 392–396.
   – https://doi.org/10.2307/2031890.
8. *Tian Y.* Completing triangular block matrices with maximal and minimal ranks // Linear Algebra Appl. – 2000. – 321, No. 1-3. – P. 327–345.
   – https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00224-X.

РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ $AX + YB = C$ С ТРЕУГОЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Установлены необходимые и достаточные условия существования треугольных решений линейного матричного уравнения $AX + YB = C$ над коммутативным кольцом главных идеалов с треугольными коэффициентами A, B и C. Доказано также, что не существует матричного уравнения такого вида с треугольными коэффициентами A, B и C, имеющего только треугольные решения.

Ключевые слова: *линейное матричное уравнение типа Сильвестра, решение матричного уравнения, треугольное решение, треугольные матрицы.*

SOLUTIONS OF MATRIX EQUATION $AX + YB = C$ WITH TRIANGULAR COEFFICIENTS

The necessary and sufficient conditions for the existence of the triangular solutions of the linear matrix equation $AX + YB = C$ over commutative ring of principal ideals are established. Matrix coefficients A, B, and C of this equation are triangular matrices. It is proved also that the matrix equation of such form that has only triangular solutions does not exist.

Key words: *the Sylvester linear matrix equation, solution of matrix equation, triangular solution, triangular matrices.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
09.01.19