УДК 517.956.4

Н. І. Турчина[✉], С. Д. Івасишен

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ У ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА ЗРОСТАЮЧИХ ФУНКЦІЙ МОДЕЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ І БЕЗ НИХ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗА ЕЙДЕЛЬМАНОМ СИСТЕМИ

Для параболічної за Ейдельманом системи рівнянь без молодших членів і зі сталими коефіцієнтами встановлено коректну розв'язність в анізотропних просторах Гельдера швидкозростаючих при $|x| \to \infty$ *функцій модельних крайових задач на півінтервалах* $(0, T]$ *і* $(-\infty, T]$ *зміни часової змінної* t*. Отримано інтегральні зображення розв'язків розглянутих задач.*

Ключові слова: $\vec{2b}$*-параболічна за Ейдельманом система, модельна крайова задача, задача без початкових умов, коректна розв'язність, інтегральне зображення розв'язків, анізотропний простір Гельдера зростаючих функцій.*

Вступ. У працях авторів [2, 5, 6, 9] розглянуто загальну модельну крайову задачу для параболічної за Ейдельманом системи рівнянь, яку коротко названо задачею P. Для такої задачі побудовано та досліджено властивості ядер Пуассона G_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, та однорідної матриці Ґріна G_0. За допомогою цих результатів вивчено властивості операторів Ґріна $\mathcal{G}_j$, $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, тобто інтегральних операторів, ядрами яких є матриці G_j, в анізотропних за всіма змінними $t, x_1, \ldots, x_n$ просторами Гельдера обмежених функцій. На основі цих властивостей установлено коректну розв'язність задачі P у вказаних просторах Гельдера та отримано інтегральне зображення розв'язків, ядрами якого є елементи матриці Ґріна. Описано структуру та властивості цих елементів.

У цій статті описані вище результати застосовуються до встановлення коректної розв'язності задачі P в анізотропних просторах Гельдера експоненціально зростаючих при $|x| \to \infty$ функцій, причому розглядається задача P як зі звичайними початковими умовами (коли $t \in (0, T]$), так і без них (коли $t \in (-\infty, T]$). Разом з цим отримуються інтегральні зображення розв'язків розглянутих задач.

1. **Постановка задач і допоміжні відомості**. Використовуватимемо такі позначення: n, N, $b_1, \ldots, b_n$ – задані натуральні числа; $\vec{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$; s – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m_j := s / b_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $\mathbf{Z}_+^n$ – сукупність n-вимірних мультиіндексів $k := (k_1, \ldots, k_n)$; $\|k\| := \sum_{j=1}^{n} m_j k_j$, якщо $k \in \mathbf{Z}_+^n$; $\|\bar{k}\| := 2sk_0 + \|k\|$, якщо $\bar{k} := (k_0, k)$, де $k_0 \in \mathbf{Z}_+^1$, $k \in \mathbf{Z}_+^n$; $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $x' := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$; $\mathbf{R}_+^n := \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_n > 0\}$, $\Pi_H := \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid t \in H,\ x \in \mathbf{R}^n\}$, $\Pi_H^+ := \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid t \in H,\ x \in \mathbf{R}_+^n\}$, $\Pi'_H := \{(t, x') \in \mathbf{R}^n \mid t \in H,\ x' \in \mathbf{R}^{n-1}\}$, якщо $H \subset \mathbf{R}^1$; T – задане додатне число; $\partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}$, $\partial_{t,x}^{\bar{k}} := \partial_t^{k_0} \partial_x^k$, $\partial_{t,x'}^{\bar{k}'} := \partial_t^{k_0} \partial_{x'}^{k'}$, якщо $\bar{k} := (k_0, k)$, $\bar{k}' := (k_0, k')$, $k_0 \in \mathbf{Z}_+^1$, $k \in \mathbf{Z}_+^n$, $k' \in \mathbf{Z}_+^{n-1}$; $t \in \mathbf{R}^1$, $x \in \mathbf{R}^n$ і $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ (тут, як звичайно, $\mathbf{R}^n$

✉ nataturchina@gmail.com

– n-вимірний дійсний евклідовий простір, $\partial_y^{\lambda} := \dfrac{\partial^{\lambda}}{\partial y^{\lambda}}$, λ – натуральне число, $y \in \mathbf{R}^1$); A^0 і B_j^0, $j \in \{1, \ldots, m\}$, – диференціальні вирази, які визначаються рівностями

$$A^0 := I_N \partial_t - \sum_{\|k\|=2s} a_k \partial_x^k \qquad \text{і} \qquad B_j^0 := \sum_{\|\bar{k}\|=r_j} b_{j\bar{k}} \partial_{t,x}^{\bar{k}},$$

де a_k і $b_{j\bar{k}}$ – сталі матриці відповідно розмірів $N \times N$ і $1 \times N$, I_N – одинична матриця порядку N, $r_1, \ldots, r_m$ – невід'ємні цілі числа; $r_0 := \max\{0, r_1 - 2s, \ldots, r_m - 2s\}$; p_0 і n_0 – найбільші порядки похідних відповідно за t і x_n у виразах B_j^0, $j \in \{1, \ldots, m\}$; $\bar{Q}$ – замикання множини Q у просторах $\mathbf{R}^n$ або $\mathbf{R}^{n+1}$.

Розглядатимемо такі задачі з невідомою функцією u:

– *задачу в області* $\Pi^+_{(0,T]}$

$$(A^0 u)(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi^+_{(0,T]}, \tag{1}$$

$$(B_j^0 u)(t,x)\big|_{x_n=0} = g_j(t,x'), \qquad (t,x') \in \Pi'_{(0,T]}, \quad j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{2}$$

$$u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n_+; \tag{3}$$

– *задачу в області* $\Pi^+_{(-\infty,T]}$

$$(A^0 u)(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi^+_{(-\infty,T]}, \tag{4}$$

$$(B_j^0 u)(t,x)\big|_{x_n=0} = g_j(t,x'), \qquad (t,x') \in \Pi'_{(-\infty,T]}, \quad j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{5}$$

де u, f і φ – матриці-стовпчики висоти N, а $g_1, \ldots, g_m$ – скалярні функції. Будемо припускати, що системи (1) і (4) є $\overrightarrow{2b}$-параболічними за Ейдельманом [3, 8], кількість крайових умов у (2) і (5) $m = b_n N$, і диференціальні вирази B_j^0, $j \in \{1, \ldots, m\}$, задовольняють умову доповняльності з [5]. Задачу (1)–(3), для якої виконуються всі зазначені умови, називатимемо *задачею* $\Pi_{(0,T]}$, а задачу (4), (5) з такими умовами – *задачею* $\Pi_{(-\infty,T]}$. Якщо в задачі $\Pi_{(0,T]}$ замість $(0,T]$ взяти $(0,\infty)$, то матимемо задачу $\Pi_{(0,\infty)}$.

Дослідження коректної розв'язності поставлених задач ґрунтується на результатах вивчення однорідної матриці Ґріна G_0 і ядер Пуассона G_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, які є такими матричними функціями розмірів відповідно $N \times N$ і $N \times 1$, що для довільних гладких і фінітних функцій f, $g_1, \ldots, g_m$ і φ розв'язок задачі $\Pi_{(0,\infty)}$ зображується у вигляді

$$u(t,x) = \left(\Gamma_0 f + \sum_{j=1}^{m} \Gamma_j g_j + \Gamma_{m+1}\varphi \right)(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi^+_{(0,\infty)}, \tag{6}$$

де

$$(\Gamma_0 f)(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^n_+} G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau,\xi)\, d\xi, \tag{7}$$

$$(\Gamma_j g_j)(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi')g_j(\tau,\xi')\,d\xi', \qquad j\in\{1,\mathbf{K},m\}, \tag{8}$$

$$(\Gamma_{m+1}\varphi)(t,x) := \int_{\mathbf{R}^n_+} G_0(t,x,\xi)\varphi(\tau,\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

У працях [2, 5] доведено існування матриць G_j, $j\in\{0,1,\mathbf{K},m\}$, і правильність для них дивергентних зображень

$$G_j = L^r(\partial_t,\partial_{x'})G_j^{(r)}, \qquad j\in\{0,1,\mathbf{K},m\}, \tag{10}$$

у яких

$$L^r(\partial_t,\partial_{x'}) := \partial_t + a\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{b_j}\partial_{x_j}^{2b_j}, \qquad a>0,$$

r – будь-яке невід'ємне ціле число, і для $G_j^{(r)}$ справджуються оцінки

$$\left|\partial^{\bar k}_{t,x}\partial^{\mathbf{l}}_{\xi}G_0^{(r)}(t,x,\xi)\right| \le C_{\bar k\mathbf{l}}\, t^{-M+r-(\|\bar k\|+\|\mathbf{l}\|)/(2s)}E_c(t,x-\xi),$$

$$t>0, \qquad \{x,\xi\}\subset \mathbf{R}^n_+, \qquad \bar k\in\mathbf{Z}^{n+1}_+, \qquad \mathbf{l}\in\mathbf{Z}^n_+, \tag{11}$$

$$\left|\partial^{\bar k}_{t,x}G_j^{(r)}(t,x)\right| \le C_{\bar k}\, t^{-M'+r-1-(r_j-\|\bar k\|)/(2s)}E_c(t,x),$$

$$t>0, \qquad x\in\mathbf{R}^n_+, \qquad \bar k\in\mathbf{Z}^{n+1}_+, \qquad j\in\{1,\mathbf{K},m\}. \tag{12}$$

В оцінках (11) і (12) $M := \sum_{j=1}^{m} m_j/(2s)$, $M' := \sum_{j=1}^{m-1} m_j/(2s)$,

$$E_c(t,x) := \exp\left\{-c\sum_{j=1}^{n} t^{-1/(2b_j-1)}\left|x_j\right|^{2b_j/(2b_j-1)}\right\},$$

$C_{\bar k\mathbf{l}}$, $C_{\bar k}$ і c – деякі додатні сталі.

Нехай в задачі $\Pi_{(0,T]}$ функції f і g_j, $j\in\{1,\mathbf{K},m\}$, є досить гладкими і разом зі своїми похідними є обмеженими та дорівнюють нулеві при $t=0$, а $\varphi=0$. Тоді, як доведено в [9], розв'язок такої задачі визначається формулою

$$u(t,x) = (\Gamma_0 f)(t,x) + \sum_{j=1}^{m}\left(\Gamma_j\left(g_j - C_j(\partial_t,\partial_x)f\big|_{x_n=0}\right)\right)(t,x),$$

$$(t,x)\in\Pi^+_{(0,T]}, \tag{13}$$

де диференціальний вираз $C_j(\partial_t,\partial_x)$ містить диференціювання за x_n порядку, не вище ніж $(r_j/m_n)-2b_n$, і всі $C_j(\partial_t,\partial_x)=0$, якщо найбільший порядок n_0 похідних за x_n у диференціальних виразах B_j^0, $j\in\{1,\mathbf{K},m\}$, є меншим ніж $2b_n$.

Нехай в задачі $\Pi_{(0,T]}$ функції f, g_j, $j\in\{1,\mathbf{K},m\}$, і φ є досить гладкими в замиканнях відповідно $\bar\Pi^+_{(0,T]}$, $\bar\Pi'_{(0,T]}$ і $\bar{\mathbf{R}}^n_+$ і разом зі своїми похідними є обмеженими та задовольняють умови узгодження при $t=0$ і $x_n=0$ (точніше, вони належать до відповідних просторів Гельдера обмежених функцій і задовольняють відповідні умови узгодження). Із результатів праць [6, 9] тоді випливає, що існує єдиний гладкий розв'язок u задачі $\Pi_{(0,T]}$, визначений в $\overline{\Pi}_{(0,T]}$ та обмежений разом з усіма своїми похідними (належить до відповідного простору Гельдера обмежених функцій) і для якого справджується зображення

$$u(t,x) = \left(\Gamma_0 f + \sum_{j=1}^{m} \Gamma_j g_j + \Gamma_{m+1}\varphi\right)(t,x) +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \sum_{\|k\|\le r_0} R_k(t-\tau, x-\xi')\partial_\xi^k f(\tau,\xi)\Big|_{\xi_n=0} d\xi' +$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \sum_{\substack{\|\bar{k}\|\le r_0-4s \\ (k_0\le p_0-2)}} W_{\bar{k}}(t-\tau, x-\xi')\partial_{\tau,\xi}^{\bar{k}} f(\tau,\xi)\Big|_{\substack{\tau=0 \\ \xi_n=0}} d\xi' +$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \sum_{\|k\|\le r_0} R_k(t, x-\xi')\partial_\xi^k \varphi(\xi)\Big|_{\xi_n=0} d\xi' +$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \sum_{\|k\|\le r_0-2s} V_k(t, x-\xi')\partial_\xi^k \varphi(\xi)\Big|_{\xi_n=0} d\xi',$$

$$(t,x)\in \Pi_{(0,T]}. \qquad (14)$$

Функції R_k, V_k і $W_{\bar{k}}$ описано в [9]. Вони виражаються через ядра G_j, $j\in\{1,\ldots,m\}$, причому $R_k = 0$ при $n_0 < 2b_n$, $V_k = 0$ при $p_0 = 0$, і $W_{\bar{k}} = 0$ при $p_0 \le 1$. Використавши вирази для цих функцій та оцінки (12) з $r = 0$ для ядер G_j, отримаємо такі оцінки:

$$\left|\partial_{t,x}^{\bar{\lambda}} R_k(t,x)\right| \le C_{\bar{\lambda}} \sum_{\|k\|\le p\le r_0} t^{-M'(\|\bar{\lambda}\|-p)/(2s)} E_c(t,x), \quad \|k\|\le r_0, \qquad (15)$$

$$\left|\partial_{t,x}^{\bar{\lambda}} V_k(t,x)\right| \le C_{\bar{\lambda}} \sum_{\|k\|\le p\le r_0-2s} t^{-M'+1-(\|\bar{\lambda}\|-p)/(2s)} E_c(t,x),$$

$$\|k\|\le r_0-2s, \qquad (16)$$

$$\left|\partial_{t,x}^{\bar{\lambda}} W_{\bar{k}}(t,x)\right| \le C_{\bar{\lambda}} \sum_{\|\bar{k}\|+2s\le p\le r_0-2s} t^{-M'+1-(\|\bar{\lambda}\|-p)/(2s)} E_c(t,x),$$

$$\|\bar{k}\|\le r_0-4s. \qquad (17)$$

В оцінках (15)–(17) $(t,x)\in\Pi^{+}_{(0,\infty)}$, $\bar{\lambda}$ – довільний мультиіндекс з $\mathbf{Z}_+^{n+1}$, а $C_{\bar{\lambda}}$ і c – додатні сталі.

2. **Простори функцій та властивості операторів Ґріна**. Означимо потрібні простори Гельдера зростаючих функцій. Крім наведених у **п**. 1, будемо використовувати ще такі позначення:

$$\Delta_t^{\beta} f(t,\gamma) := f(t,\gamma) - f(\beta,\gamma),$$

$$\Delta_{x_j}^{y_j} f(\gamma,x) := f(\gamma,x) - f(\gamma,x(y_j)),$$

$$x(y_j) := (x_1,\ldots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\ldots,x_n), \qquad j\in\{1,\ldots,n\},$$

$$\Delta_{x_j}^{y_j} f(\gamma, x') := f(\gamma, x') - f(\gamma, x'(y_j)),$$

$$x'(y_j) := (x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}), \qquad j \in \{1, \ldots, n-1\},$$

$\mathbb{C}_{rs}$ – множина всіх матриць розміру $r \times s$, елементи яких є комплексними числами.

Однаковими літерами позначаємо різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

Нехай c_0, $a_1, \ldots, a_n$ – задані числа такі, що $0 < c_0 < c$, де c – стала з оцінок (11) і (12); $a_j \ge 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $T < \min\limits_j (c_0 / a_j)^{2b_j - 1}$; $\kappa(t, \alpha) :=$ $:= (k_1(t, a_1), \ldots, k_n(t, a_n))$, $\alpha := (a_1, \ldots, a_n)$,

$$k_j(t, a_j) := c_0 a_j (c_0^{2b_j-1} - a_j^{2b_j-1} t)^{-1/(2b_j-1)}, \qquad j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad t < T,$$

$$\Psi(t, x) := \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} k_j(t, a_j) |x_j|^{2b_j/(2b_j-1)}\right\}, \qquad (t, x) \in \Pi^+_{(-\infty, T]}.$$

Зазначимо, що $k_j(0, a_j) = a_j$, тобто $\kappa(0, \alpha) = \alpha$, і, як установлено в [3, 8], справджуються рівність $\kappa(t - \tau, \kappa(\tau, \alpha)) = \kappa(t, \alpha)$, $\tau \le t$, і нерівність

$$E_{c_0}(t - \tau, x - \xi)\Psi(\tau, \xi) \le \Psi(t, x), \qquad -\infty < \tau < t \le T, \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbf{R}^n. \tag{18}$$

У наведених нижче означеннях просторів $\boldsymbol{l}$ і λ – задані числа відповідно з множин $\mathbf{Z}_+^1$ і $(0,1)$; Q – будь-яка з областей Π_H^+ або Π_H; Q' – область Π'_H, де $H \subset \mathbf{R}^1$, а Ω – область $\mathbf{R}^n$ або $\mathbf{R}^n_+$. Користуватимемось такими просторами:

$H^{\boldsymbol{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{Q}, \mathbb{C}_{N1})$ – простір неперервних функцій $u : \bar{Q} \to \mathbb{C}_{N1}$, які мають неперервні похідні $\partial^{\bar{k}}_{t,x}$, $\|\bar{k}\| \le \boldsymbol{l}$, і скінченну норму

$$\|u; \bar{Q}, \mathbb{C}_{N1}\|^{\boldsymbol{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} := \sum_{\|\bar{k}\| \le \boldsymbol{l}} \sup_{(t,x) \in \bar{Q}} \left|\partial^{\bar{k}}_{t,x} u(t,x) (\Psi(t,x))^{-1}\right| +$$

$$+ \sum_{0 \le \boldsymbol{l} - \|\bar{k}\| < 2\sigma} \sup_{\substack{\{(t,x),(\beta,x)\} \subset \bar{Q} \\ t \ne \beta}} \left(\frac{\left|\Delta_t^\beta \partial^{\bar{k}}_{t,x} u(t,x)\right| (\Psi(t,x) + \Psi(\beta,x))^{-1}}{|t - \beta|^{(\boldsymbol{l} - \|\bar{k}\| + \lambda)/(2\sigma)}} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{0 \le \boldsymbol{l} - \|\bar{k}\| < m_j} \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x(y_j))\} \subset \bar{Q} \\ x_j \ne y_j}} \left(\frac{\left|\Delta_{x_j}^{y_j} \partial^{\bar{k}}_{t,x} u(t,x)\right| (\Psi(t,x) + \Psi(t, x(y_j)))^{-1}}{|x_j - y_j|^{(\boldsymbol{l} - \|\bar{k}\| + \lambda)/m_j}} \right);$$

$H^{\boldsymbol{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{Q}', \mathbb{C}_{11})$ – простір неперервних функцій $u : \bar{Q}' \to \mathbb{C}_{11}$, які мають неперервні похідні $\partial^{\bar{k}'}_{t,x'}$, $\|\bar{k}'\| \le \boldsymbol{l}$, і скінченну норму

$$\|u; \bar{Q}', \mathbb{C}_{N1}\|^{\boldsymbol{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} := \sum_{\|\bar{k}'\| \le \boldsymbol{l}} \sup_{(t,x) \in \bar{Q}'} \left|\partial^{\bar{k}'}_{t,x'} u(t,x') (\Psi(t,x'))^{-1}\right| +$$

$$+ \sum_{0 \le \boldsymbol{l} - \|\bar{k}'\| < 2\sigma} \sup_{\substack{\{(t,x'),(\beta,x')\} \subset \bar{Q}' \\ t \ne \beta}} \left(\frac{\left|\Delta_t^\beta \partial^{\bar{k}'}_{t,x'} u(t,x')\right| (\Psi(t,x') + \Psi(\beta,x'))^{-1}}{|t - \beta|^{(\boldsymbol{l} - \|\bar{k}'\| + \lambda)/(2\sigma)}} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{0 \le \boldsymbol{l} - \|\bar{k}'\| < m_j} \sup_{\{(t,x'),(t,x'(y_j))\} \subset \bar{Q}'} \left(\frac{\left|\Delta_{x_j}^{y_j} \partial^{\bar{k}'}_{t,x'} u(t,x')\right| (\Psi(t,x') + \Psi(t, x'(y_j)))^{-1}}{|x_j - y_j|^{(\boldsymbol{l} - \|\bar{k}'\| + \lambda)/m_j}} \right),$$

$H^{\ell+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}^{+}_{(0,T]},\pounds_{N1})$ і $H^{\ell+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}'_{(0,T]},\pounds_{11})$ – підпростори відповідно просторів $H^{\ell+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}^{+}_{(0,T]},\pounds_{N1})$ і $H^{\ell+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}'_{(0,T]},\pounds_{11})$, елементи яких разом з усіма своїми похідними дорівнюють нулеві при $t=0$;

$C^{\ell+\lambda}_{\alpha}(\bar{\Omega},\pounds_{N1})$ – простір неперервних функцій $v:\bar{\Omega}\to\pounds_{N1}$, які мають неперервні похідні $\partial^{k}_{x}v$, $\|k\|\le\ell$, і скінченну норму

$$\|v;\bar{\Omega},\pounds_{N1}\|^{\ell+\lambda}_{\alpha}:=\sum_{\|k\|\le\ell}\sup_{x\in\bar{\Omega}}\left|\partial^{k}_{x}v(x)(\Psi(0,x))^{-1}\right|+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{0\le\ell-\|k\|<m_j}\sup_{\{x,x(y_j)\}\in\bar{\Omega}}\left(\frac{\left|\Delta^{y_j}_{x_j}\partial^{k}_{x}v(x)\right|(\Psi(0,x)+\Psi(0,x(y_j)))^{-1}}{|x_j-y_j|^{(\ell-\|k\|+\lambda)/m_j}}\right).$$

Якщо в означеннях усіх цих просторів покласти $\alpha=0$, то отримаємо означення просторів Гельдера обмежених функцій $H^{\ell+\lambda}(\bar{Q},\pounds_{N1})$, $H^{\ell+\lambda}(\bar{Q}',\pounds_{11})$, $H^{\ell+\lambda}_{0}(\bar{\Pi}^{+}_{(0,T]},\pounds_{N1})$, $H^{\ell+\lambda}_{0}(\bar{\Pi}'_{(0,T]},\pounds_{11})$ і $C^{\ell+\lambda}(\bar{\Omega},\pounds_{N1})$, які використовувалися в [6].

Подібні до наведених вище просторів Гельдера, анізотропних стосовно всіх незалежних змінних, використовувалися раніше в [1].

В основі встановлення коректної розв'язності задачі $\Pi_{(0,T]}$ у просторах Гельдера зростаючих функцій лежать властивості операторів Ґріна Γ_j, $j\in\{0,1,\ldots,m\}$, дія яких визначається формулами (7) і (8). Ці властивості описуються в наступній лемі.

Лема 1. *Для будь-яких цілого числа* ℓ *і числа* $\lambda\in(0,1)$ *є обмеженими оператори*

$$\Gamma_0:H^{\ell+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}^{+}_{(0,T]},\pounds_{N1})\to H^{2s+\ell+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}^{+}_{(0,T]},\pounds_{N1}),$$

$$\Gamma_j:H^{\ell+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}'_{(0,T]},\pounds_{11})\to H^{r_j+\ell+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}'_{(0,T]},\pounds_{11}),\qquad j\in\{1,\ldots,m\}.$$

Д о в е д е н н я тверджень цієї леми відрізняється від доведення лем 6 і 7 з [6] тільки тим, що постійно використовується оцінка (18) та означення відповідних просторів Гельдера зростаючих функцій. ♦

3. **Задача** $\Pi_{(0,T]}$ **з нульовими початковими даними**. Розглянемо задачу (1)–(3) з нульовими початковими даними, тобто таку задачу в області $\Pi^{+}_{(0,T]}$:

$$A^{0}u=f,$$

$$B^{0}_{j}u\big|_{x_n=0}=g_j,\qquad j\in\{1,\ldots,m\},$$

$$u\big|_{t=0}=0, \tag{19}$$

у якій

$$f\in H^{\ell+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}^{+}_{(0,T]},\pounds_{N1}),$$

$$g_j\in H^{2s+\ell-r_j+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}'_{(0,T]},\pounds_{11}),\qquad j\in\{1,\ldots,m\}, \tag{20}$$

де ℓ – ціле число таке, що $\ell\ge r_0$, $\lambda\in(0,1)$.

Основні результати для цієї задачі містяться в наступній теоремі.

Теорема 1. *Для будь-яких функцій* f *і* g_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, *що задовольняють умови* (20), *формула* (13) *визначає єдиний розв'язок задачі* (19), *який належить до простору* $H^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1})$ *і для якого справджується оцінка*

$$\left\| u; \bar{\Pi}^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} \le C \Bigg(\left\| f; \bar{\Pi}^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left\| g_j; \bar{\Pi}'_{(0,T]}, \mathcal{L}_{11} \right\|^{2s+\mathbf{l}-r_j+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} \Bigg), \qquad (21)$$

де стала $C > 0$ *не залежить від* f *і* g_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Д о в е д е н н я. З леми 1 випливає, що функція u, визначена формулою (13), належить до простору $H^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1})$ і для неї виконується нерівність (21). Доведемо, що ця функція є розв'язком задачі (19). Для цього досить переконатись, що функція u є розв'язком задачі (19) в області $Q_R := \Pi^+_{(0,T]} \cap \{(t,x) \mid t \in (0,T],\, q(x;0) \le R/3\}$, де R – довільне додатне число.

Тут і далі $q(x;\xi) := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - \xi_j|^{q_j} \right)^{1/q'}$, де $q_j := 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $q' := \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} q_j$ – спеціальна відстань між точками x і ξ у просторі $\mathbf{R}^n$ [8, с. 47]. Зауважимо, що на підставі властивостей цієї відстані для $q(x;0) \le R/3$ і $q(\xi;0) \ge R/2$ маємо $q(x;\xi) \ge q(\xi;0) - q(x;0) \ge R/2 - R/3 = R/6$, а тому для $\tau < t$

$$\sum_{j=1}^{n} (t-\tau)^{1-q_j} |x_j - \xi_j|^{q_j} \ge \sum_{j=1}^{n} t^{1-q_j} |x_j - \xi_j|^{q_j} \ge t^{-p} \sum_{j=1}^{n} |x_j - \xi_j|^{q_j} =$$

$$= t^{-p} (q(x;\xi))^{q'} \ge t^{-p} (R/6)^{q'},$$

де $p = \begin{cases} q' - 1, & t \ge 1, \\ \min\limits_{j \in \{1,\ldots,n\}} q_j - 1, & 0 < t < 1. \end{cases}$ Звідси випливає, що для вказаних вище t, τ, x і ξ справджується нерівність

$$E_c(t-\tau, x-\xi) \le E_{c_0}(t-\tau, x-\xi) E_{(c-c_0)/2}(t-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{c-c_0}{2t^p} \left(\frac{R}{6} \right)^{q'} \right\}, \qquad 0 < c_0 < c. \qquad (22)$$

Візьмемо нескінченно диференційовну функцію $\zeta : \mathbf{R}^1_+ \to [0,1]$ таку, що $\zeta(r) = \begin{cases} 1, & r \le 1/2, \\ 0, & r \ge 1, \end{cases}$ і покладемо $\zeta_R(x) := \zeta\left(\frac{q(x;0)}{R} \right)$, $\zeta'_R(x') := \zeta(q(x',0))$. Формулу (13) запишемо у вигляді $u = u_1 + u_2$, де

$$u_1 := \Gamma_0(\zeta_R f) + \sum_{j=1}^{m} \Gamma_j \left(\zeta'_R g_j - C_j(\partial_t, \partial_x)(\zeta_R f)\big|_{x_n=0} \right),$$

$$u_2 := \Gamma_0((1-\zeta_R) f) + \sum_{j=1}^{m} \Gamma_j \left((1-\zeta'_R) g_j - C_j(\partial_t, \partial_x)(1-\zeta_R) f\big|_{x_n=0} \right).$$

Оскільки функції $\zeta_R f$ і $\zeta'_R g_j$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, є обмеженими, то вони належать до просторів $H_0^{\ell+\lambda}(\bar{\Pi}^+_{(0,T]}, £_{N1})$ і $H_0^{2s+\ell-r_j+\lambda}(\bar{\Pi}'_{(0,T]}, £_{11})$ відповідно. На підставі теореми 1 з [6] функція u_1 є розв'язком задачі (19) з правими частинами $\zeta_R f$ і $\zeta'_R g_j$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, і отже, з правими частинами f і g_j, $j \in \{1,\ldots,m\}$, якщо $(t,x) \in Q_R$. Для таких самих точок (t,x), з урахуванням властивостей функції ζ_R і матриць G_j, $j \in \{1,\ldots,m\}$, а також нерівності (22), функція u_2 є розв'язком задачі (19) з нульовими правими частинами. Це означає, що в області Q_R функція (13) є розв'язком задачі (19) з правими частинами f і g_j, $j \in \{1,\ldots,m\}$.

Тепер доведемо, що будь-який розв'язок u задачі (19) з простору $H^{2s+\ell+\lambda}_{0,\vec{k}(\xi,\vec{\alpha})}(\bar{\Pi}^+_{(0,T]}, £_{N1})$ зображується у вигляді (13), тобто встановимо єдиність розв'язку задачі (19) у цьому просторі. Для цього розглянемо функцію $u_R := \zeta_R u$. Вона є розв'язком в області $\Pi^+_{(0,T]}$ задачі

$$A^0 u_R = \zeta_R f + f_R,$$

$$B_j^0 u_R\big|_{x_n=0} = \zeta'_R g_j + g_{jR}, \qquad j \in \{1,\ldots,m\},$$

$$u_R\big|_{t=0} = 0,$$

де

$$f_R := A^0(\zeta_R u) - \zeta_R A^0 u, \qquad g_{jR} := (B_j^0(\zeta_R u) - \zeta_R B_j^0 u)\big|_{x_n=0}.$$

Із властивостей функцій ζ_R і u випливає, що $u_R \in H_0^{2s+\ell+\lambda}(\bar{\Pi}^+_{(0,T]}, £_{N1})$ і на підставі теореми 1 з [6] справджується зображення

$$u_R := \Gamma_0(\zeta_R f + f_R) + \sum_{j=1}^{m} \Gamma_j \left(\zeta'_R g_j + g_{jR} - C_j(\partial_t, \partial_x)(\zeta_R f + f_R)\big|_{x_n=0}\right). \quad (23)$$

Використовуючи властивості функції ζ_R та абсолютну збіжність інтегралів з формули (13), перейдемо в рівності (23) до границі при $R \to \infty$ і отримаємо зображення (13). ♦

4. **Задача $\Pi_{(0,T]}$ з ненульовими початковими даними**. Цю задачу зведемо до задачі з нульовими початковими даними, розглянутої в **п.** 3. Для цього використаємо наведені нижче твердження про продовження функцій з просторів Гельдера зростаючих функцій.

Лема 2. *Нехай* $\varphi \in C_\alpha^{\ell+\lambda}(\bar{\mathbf{R}}^n_+, £_{N1})$. *Тоді існує продовження* φ^* *функції* φ *на* $\mathbf{R}^n$ *таке, що* $\varphi^* \in C_\alpha^{\ell+\lambda}(\mathbf{R}^n, £_{N1})$ *і виконується нерівність*

$$\|\varphi^*; \mathbf{R}^n, £_{N1}\|_\alpha^{\ell+\lambda} \le C \|\varphi; \bar{\mathbf{R}}^n_+, £_{N1}\|_\alpha^{\ell+\lambda}, \quad (24)$$

де додатна стала C не залежить від φ.

Д о в е д е н н я. Згідно з відомою конструкцією, яку запропонували Гестенс (Hestenes) та Уітні (Whitney) (див., наприклад, [7, с. 590], покладемо

$$\varphi^*(x) := \begin{cases} \varphi((x', x_n)), & x' \in \mathbf{R}^{n-1},\ x_n \ge 0, \\ \sum_{i=1}^{\ell+1} \alpha_i \varphi\left(\left(x', -\dfrac{x_n}{i}\right)\right), & x' \in \mathbf{R}^{n-1},\ x_n < 0, \end{cases}$$

де α_i, $i \in \{1, \ldots, l+1\}$, – числа, які визначаються із системи лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i \left(-\frac{1}{i}\right)^p = 1, \qquad p \in \{0, 1, \ldots, l\}.$$

Безпосередньо перевіряється, що так визначена функція φ^* має в $\mathbf{R}^n$ похідні $\partial_x^k \varphi^*$, $\|k\| \le l$. Таке продовження функції φ зберігає клас, тобто $\varphi^* \in C_\alpha^{l+\lambda}(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}_{N1})$, причому справджується нерівність (24). При доведенні цього використовуються оцінки

$$\frac{\left|\varphi\left(\left(x', -\frac{x_n}{i}\right)\right)\right|}{\Psi(0,x)} = \frac{\left|\varphi\left(\left(x', -\frac{x_n}{i}\right)\right)\right|}{\Psi\left(0, \left(x', -\frac{x_n}{i}\right)\right)} \frac{\Psi\left(0, \left(x', -\frac{x_n}{i}\right)\right)}{\Psi(0,x)} \le \left\|\varphi; \bar{\mathbf{R}}_+^n, \mathcal{L}_{N1}\right\|_\alpha^\lambda,$$

$$\frac{\left|\varphi\left(\left(x', -\frac{x_n}{i}\right)\right) - \varphi\left(\left(x', -\frac{y_n}{i}\right)\right)\right|}{\left(\Psi(0,x) + \Psi(0, x(y_n))\right)|x_n - y_n|^{\lambda/m_n}} =$$

$$= \frac{\left|\varphi\left(\left(x', -\frac{x_n}{i}\right)\right) - \varphi\left(\left(x', -\frac{y_n}{i}\right)\right)\right|}{\left(\Psi\left(0, \left(x', -\frac{x_n}{i}\right)\right) + \Psi\left(0, \left(x', -\frac{y_n}{i}\right)\right)\right)\left(\frac{|x_n - y_n|}{i}\right)^{\lambda/m_n}} \times$$

$$\times \frac{\Psi\left(0, \left(x', -\frac{x_n}{i}\right)\right) + \Psi\left(0, \left(x', -\frac{y_n}{i}\right)\right)}{\Psi(0,x) + \Psi(0, x(y_n))} \le \left\|\varphi; \bar{\mathbf{R}}_+^n, \mathcal{L}_{N1}\right\|_\alpha^\lambda,$$

оскільки

$$\frac{\Psi\left(0, \left(x', -\frac{x_n}{i}\right)\right)}{\Psi(0,x)} = \exp\left\{-a_n\left(1 - \frac{1}{i^{q_n}}\right)|x_n|^{q_n}\right\} \le 1,$$

$$\left(\frac{|x_n - y_n|}{i}\right)^{\lambda/m_n} \le |x_n - y_n|^{\lambda/m_n},$$

$$\Psi\left(0, \left(x', -\frac{x_n}{i}\right)\right) + \Psi\left(0, \left(x', -\frac{y_n}{i}\right)\right) \le \Psi(0,x) + \Psi(0, x(y_n)).$$

Аналогічно отримуються оцінки похідних від $\varphi\left(\left(x', -\frac{x_n}{i}\right)\right)$, $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$, $x_n < 0$.

♦

Лема 3. *Нехай задано функції* $\varphi_j \in C_\alpha^{l-2sj+\lambda}(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}_{N1})$, $j \in \left\{0, 1, \ldots, \left[\frac{l}{2s}\right]\right\}$. *Тоді для будь-якого фіксованого числа* $T > 0$ *існує функція* $u \in H_{\kappa(\gamma,\alpha)}^{l+\lambda}(\bar{\Pi}_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1})$ *така, що*

$$\partial_t^j u\big|_{t=0} = \varphi_j, \qquad j \in \left\{0, 1, \ldots, \left[\frac{l}{2s}\right]\right\}, \tag{25}$$

і

$$\left\|u; \bar{\Pi}_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1}\right\|_{\kappa(\gamma,\alpha)}^{l+\lambda} \le C \sum_{j=0}^{[l/(2s)]} \left\|\varphi_j; \mathbf{R}_+^n, \mathcal{L}_{N1}\right\|_\alpha^{l-2sj+\lambda}, \tag{26}$$

де стала $C>0$ *не залежить від* φ_j, $j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2s}\right]\right\}$, *а символ* $[a]$ *тут і далі позначає цілу частину числа* a.

Д о в е д е н н я. Якщо $\lambda<2s$, то можна покласти $u(t,x)=\varphi_0(x)$, $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$. Нехай $\lambda\geq 2s$. Як і в книзі [4, с. 346], введемо функції

$$\psi_j(x):=\sum_{p=0}^{j}C_j^p\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{b_k}\partial_{x_k}^{2b_k}\right)^p\varphi_{j-p}(x),\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2s}\right]\right\},$$

де C_j^p – число комбінацій з j елементів по p. Будь-яка функція $u:\overline{\Pi}_{(0,T]}\to\mathcal{L}_{N1}$, яка задовольняє умови (25), задовольняє також умови

$$L_0^j u\big|_{t=0}=\psi_j,\qquad j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2s}\right]\right\},\tag{27}$$

де $L_0:=\partial_t+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{b_k}\partial_{x_k}^{2b_k}$, які рівносильні рівностям

$$\sum_{p=0}^{j}C_j^p\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{b_k}\partial_{x_k}^{2b_k}\right)^p\left(\partial_t^{j-p}u\big|_{t=0}-\varphi_{j-p}\right)=0,\quad j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2s}\right]\right\}.\tag{28}$$

Правильним також є обернене твердження. Справді, нехай функція u задовольняє рівності (28). Тоді з рівності для $j=0$ отримуємо, що $u\big|_{t=0}=\varphi_0$. Користуючись цією умовою, із рівності (28) для $j=1$ отримаємо, що $\partial_t u\big|_{t=0}=\varphi_1$, і так далі.

Означимо функції $u^{(j)}:\overline{\Pi}_{(0,T]}\to\mathcal{L}_{N1}$, $j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2s}\right]\right\}$, як розв'язки таких задач Коші:

$$L_0u^{(j)}=u^{(j+1)},$$

$$u^{(j)}\big|_{t=0}=\psi_j,\qquad j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2s}\right]\right\},$$

де $u^{(j)}\equiv 0$ для $j=\left[\frac{\lambda}{2s}\right]+1$.

Оскільки $u^{(j)}=L_0^ju^{(0)}$, $j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2s}\right]\right\}$, то функція $u:=u^{(0)}$ задовольняє умови (27) і, отже, також і (25). Доведемо, що для неї виконуються оцінки (26). Для цього достатньо довести нерівності

$$\left\|u^{(j)};\overline{\Pi}_{(0,T]},\mathcal{L}_{N1}\right\|_{\kappa(\gamma,\alpha)}^{\lambda-2sj+\lambda}\leq C\left(\left\|u^{(j+1)};\overline{\Pi}_{(0,T]},\mathcal{L}_{N1}\right\|_{\kappa(\gamma,\alpha)}^{\lambda-2s(j+1)+\lambda}+\right.$$

$$\left.+\left\|\psi_j;\mathbf{R}^n,\mathcal{L}_{N1}\right\|_{\alpha}^{\lambda-2sj+\lambda}\right),\qquad j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2s}\right]\right\}.\tag{29}$$

Справді, оскільки

$$\left\|\psi_j;\mathbf{R}^n,\mathcal{L}_{N1}\right\|_{\alpha}^{\lambda-2sj+\lambda}\leq\sum_{p=0}^{j}\left\|\varphi_p;\mathbf{R}^n,\mathcal{L}_{N1}\right\|_{\alpha}^{\lambda-2sp+\lambda},\qquad j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\lambda}{2s}\right]\right\},$$

то послідовно використовуючи нерівності (29), отримуємо оцінку (26). Отже, доведення леми 3 зводиться до встановлення для розв'язків задачі Коші

$$L_0u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\qquad u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in\mathbf{R}^n,$$

оцінки

$$\left\|u;\bar\Pi_{(0,T]},\mathcal{L}_{N1}\right\|^{r+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}\le C\left(\left\|f;\bar\Pi_{(0,T]},\mathcal{L}_{N1}\right\|^{r-2s+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}+\left\|\varphi;\mathbf{R}^n,\mathcal{L}_{N1}\right\|^{r+\lambda}_{\alpha}\right),$$

де r – довільне натуральне число таке, що $r\ge 2s$. Ця оцінка випливає із оцінок, отриманих в [1] для загальніших рівнянь. ♦

Нехай тепер u – розв'язок задачі (1)–(3), який належить до простору $H^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar\Pi^{+}_{(0,T]},\mathcal{L}_{N1})$, де $\mathbf{l}\ge r_0$, $\lambda\in(0,1)$. Тоді на підставі означення просторів Гельдера

$$f\in H^{\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar\Pi^{+}_{(0,T]},\mathcal{L}_{N1}),$$

$$g_j\in H^{2s+\mathbf{l}-r_j+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar\Pi'_{(0,T]},\mathcal{L}_{11}),\qquad j\in\{1,\ldots,m\},$$

$$\varphi\in C^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\alpha}(\bar{\mathbf{R}}^n_{+},\mathcal{L}_{N1}),\tag{30}$$

при цьому існує така стала $C>0$, яка не залежить від u, що справджується оцінка

$$\left\|f;\bar\Pi^{+}_{(0,T]},\mathcal{L}_{N1}\right\|^{\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}+\sum_{j=1}^{m}\left\|g_j;\bar\Pi'_{(0,T]},\mathcal{L}_{11}\right\|^{2s+\mathbf{l}-r_j+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}+\left\|\varphi;\bar{\mathbf{R}}^n_{+},\mathcal{L}_{N1}\right\|^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\alpha}\le$$

$$\le C\left\|u;\bar\Pi^{+}_{(0,T]},\mathcal{L}_{N1}\right\|^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}.\tag{31}$$

Функції f, g_j і φ, крім того, зв'язані умовами узгодження при $t=0$ і $x_n=0$. Щоб сформулювати ці умови, введемо позначення

$$\varphi_j:=\partial_t^j u\big|_{t=0},\qquad P(\partial_x):=\sum_{\|k\|=2s}a_k\partial_x^k.$$

Із системи (1) і початкової умови (3) визначимо функції φ_j, $j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\mathbf{l}}{2s}+1\right]\right\}$. Очевидно, що

$$\varphi_0=\varphi,\quad \varphi_1=P(\partial_x)\varphi+f\big|_{t=0},\qquad \varphi_j=P(\partial_x)\varphi_{j-1}+\partial_t^{j-1}f\big|_{t=0},$$

$$j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\mathbf{l}}{2s}+1\right]\right\}.\tag{32}$$

Умови узгодження полягають у тому, що функції φ_j, $j\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\mathbf{l}}{2s}+1\right]\right\}$, задовольняють такі співвідношення, отримані з рівності (2):

$$\sum_{\|\bar k\|=2s}b_{j\bar k}\partial_x^k\varphi_{k_0+i}\big|_{x_n=0}=\partial_t^i g_j\big|_{t=0},\qquad i\in\left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\mathbf{l}-r_j}{2s}+1\right]\right\},$$

$$j\in\{1,\ldots,m\}.$$

Ці умови називаються *умовами узгодження порядку* $\left[\frac{\mathbf{l}}{2s}+1\right]$.

Отже, якщо $u\in H^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar\Pi^{+}_{(0,T]},\mathcal{L}_{N1})$ є розв'язком задачі (1)–(3), то її праві частини задовольняють умови (30) та умови узгодження порядку $\left[\frac{\mathbf{l}}{2s}+1\right]$. Ці умови, як стверджує наступна теорема, є також і достатніми для існування розв'язку з вказаного простору.

Теорема 2. *Нехай ціле число* $\mathbf{l} \ge r_0$ *і число* $\lambda \in (0,1)$. *Якщо праві частини* f, g_j *і* φ *задачі* $\Pi_{(0,T]}$ (1)–(3) *задовольняють умови* (30) *та умови узгодження порядку* $\left[\frac{\mathbf{l}}{2s}+1\right]$, *то ця задача має єдиний розв'язок* $u \in H^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar\Pi^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1})$. *При цьому існує така стала* $C>0$, *яка не залежить від* f, g_j *і* φ, *що справджується оцінка*

$$
\left\| u; \bar\Pi^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} \le C \left(\left\| f; \bar\Pi^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} + \right.
$$

$$
\left. + \sum_{j=1}^{m} \left\| g_j; \bar\Pi'_{(0,T]}, \mathcal{L}_{11} \right\|^{2s+\mathbf{l}-r_j+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} + \left\| \varphi; \bar{\mathbf{R}}^n_+, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\alpha} \right). \qquad (33)
$$

Д о в е д е н н я. Теорему 2 виведемо з теореми 1. Щоб це зробити, потрібно звести задачу (1)–(3) до задачі з нульовими початковими даними (19). Для цього розглянемо функції φ_j, $j \in \left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\mathbf{l}}{2s}+1\right]\right\}$, визначені формулами (32). На підставі умов (30) $\varphi_j \in C^{2s(1-j)+\mathbf{l}+\lambda}_{\alpha}(\bar{\mathbf{R}}^n_+, \mathcal{L}_{N1})$ і виконуються нерівності

$$
\left\| \varphi_j; \bar{\mathbf{R}}^n_+, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s(1-j)+\mathbf{l}+\lambda}_{\alpha} \le C \left(\left\| f; \bar\Pi^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} + \left\| \varphi; \bar{\mathbf{R}}^n_+, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\alpha} \right),
$$

$$
j \in \left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\mathbf{l}}{2s}+1\right]\right\}. \qquad (34)
$$

Користуючись лемою 2, продовжимо функції φ_j на $\mathbf{R}^n$ так, щоб для їхніх продовжень φ_j^* виконувались нерівності

$$
\left\| \varphi_j^*; \mathbf{R}^n_+, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s(1-j)+\mathbf{l}+\lambda}_{\alpha} \le C \left\| \varphi_j; \bar{\mathbf{R}}^n_+, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s(1-j)+\mathbf{l}+\lambda}_{\alpha},
$$

$$
j \in \left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\mathbf{l}}{2s}+1\right]\right\}. \qquad (35)
$$

На підставі леми 3 побудуємо функцію $v \in H^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar\Pi_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1})$, яка задовольняє умови

$$
\partial_t^j v\big|_{t=0} = \varphi_j, \qquad j \in \left\{0,1,\ldots,\left[\frac{\mathbf{l}}{2s}+1\right]\right\},
$$

і нерівність

$$
\left\| v; \bar\Pi_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} \le C \sum_{j=0}^{[\mathbf{l}/(2s)+1]} \left\| \varphi_j^*; \mathbf{R}^n, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s(1-j)+\mathbf{l}+\lambda}_{\alpha} \le
$$

$$
\le C \sum_{j=0}^{[\mathbf{l}/(2s)+1]} \left\| \varphi_j; \bar{\mathbf{R}}^n_+, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s(1-j)+\mathbf{l}+\lambda}_{\alpha} \le
$$

$$
\le C \left(\left\| f; \bar\Pi^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} + \left\| \varphi; \bar{\mathbf{R}}^n_+, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\alpha} \right). \qquad (36)
$$

Тут використано також нерівності (34) і (35).

Якщо ввести невідому функцію $u' = u - v$, то задача (1)–(3) перейде в задачу

$$A^0 u' = f',$$

$$B_j^0 u'\big|_{x_n=0} = g_j', \qquad j \in \{1, \ldots, m\},$$

$$u'\big|_{t=0} = 0, \tag{37}$$

де $f' := f - A^0 v$, $g_j' := g_j - B_j^0 v\big|_{x_n=0}$.

Із властивостей функції v, умов (30) та умов узгодження випливає, що $f' \in H^{\ell+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1})$, $g_j' \in H^{2s+\ell-r_j+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}'_{(0,T]}, \mathcal{L}_{11})$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Крім того, на підставі нерівності (36) маємо оцінку

$$\left\| f'; \bar{\Pi}^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{\ell+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} + \sum_{j=1}^{m} \left\| g_j'; \bar{\Pi}'_{(0,T]}, \mathcal{L}_{11} \right\|^{2s+\ell-r_j+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} \le$$

$$\le C \Bigg(\left\| f; \bar{\Pi}^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{\ell+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} + \sum_{j=1}^{m} \left\| g_j; \bar{\Pi}'_{(0,T]}, \mathcal{L}_{11} \right\|^{2s+\ell-r_j+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} +$$

$$+ \left\| \varphi; \bar{\mathbf{R}}^n_+, \mathcal{L}_{N1} \right\|^{2s+\ell+\lambda}_{\alpha} \Bigg).$$

Отже, (37) є задачею $\Pi_{(0,T]}$ з нульовими початковими даними та для неї виконуються твердження теореми 1, з яких випливає існування розв'язку задачі (1)–(3) з усіма потрібними властивостями. ♦

Зауваження 1. *Для розв'язків* $u \in H^{2s+\ell+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}^+_{(0,T]}, \mathcal{L}_{N1})$ *задачі* $\Pi_{(0,T]}$, *існування яких установлено в теоремі* 2, *є правильним зображення* (14). *Це доводиться за допомогою теореми* 1 *так само, як виводилось таке зображення у* [9] *для розв'язків задачі* $\Pi_{(0,T]}$ *з просторів Гельдера обмежених функцій.*

Зауваження 2. *Твердження, аналогічні теоремам* 1 *і* 2, *та зауваження 1, є правильними для задачі* $\Pi_{(t_0,T]}$, *в якій початковим значенням часової змінної є довільне фіксоване число* $t_0 < T$. *Для розв'язків такої задачі з простору* $H^{2s+\ell+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar{\Pi}^+_{(t_0,T]}, \mathcal{L}_{N1})$, *зокрема, справджується таке зображення, аналогічне зображенню* (14):

$$u(t,x) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathbf{R}^n_+} G_0(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \sum_{\|k\| \le r_0} R_k(t-\tau, x-\xi') \partial^k_\xi f(\tau,\xi)\big|_{\xi_n=0}\, d\xi' +$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \sum_{\substack{\|\bar{k}\| \le r_0 - 4s \\ (k_0 \le p_0 - 2)}} W_{\bar{k}}(t-\tau, x-\xi') \partial^{\bar{k}}_{\tau,\xi} f(\tau,\xi)\big|_{\substack{\tau=t_0 \\ \xi_n=0}}\, d\xi' +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathbf{R}^{n-1}} G_j(t-\tau, x-\xi') g_j(\tau, \xi')\, d\xi' +$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^n_+} G_0(t-t_0, x, \xi) \varphi(\tau, \xi)\, d\xi +$$

$$+\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\le r_0} R_k(t-t_0,x-\xi')\partial_\xi^k\varphi(\xi)\big|_{\xi_n=0}\,d\xi'+$$

$$+\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\le r_0-2s} V_k(t-t_0,x-\xi')\partial_\xi^k\varphi(\xi)\big|_{\xi_n=0}\,d\xi'=:\sum_{p=1}^{7} I_p(t,x),$$

$$(t,x)\in\Pi^+_{(t_0,T]}. \tag{38}$$

5. **Задача** $\Pi_{(-\infty,T]}$. Наведемо результати про однозначну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі (4), (5) без початкових умов, які отримуються за допомогою властивостей матриць G_j, $j\in\{1,\ldots,m\}$, і теореми про коректну розв'язність задач з початковими даними.

Нехай u – розв'язок задачі (4), (5) такий, що

$$\forall\, t_0\in(-\infty,T]:\qquad u\in H^{2s+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\overline{\Pi}^+_{(t_0,T]},\mathcal{L}_{N1}). \tag{39}$$

Згідно із зауваженням 2 для u правильним є зображення

$$u(t,x)=\sum_{p=1}^{4} I_p(t,x)+\sum_{p=5}^{7} I'_p(t,x),\qquad (t,x)\in\Pi^+_{(t_0,T]}, \tag{40}$$

де I_p, $p\in\{1,2,3,4\}$, – такі самі, як у (38), а I'_p, $p\in\{5,6,7\}$, визначаються формулами

$$I'_5(t,x):=\int\limits_{\mathbf{R}^n_+} G_0(t-t_0,x,\xi)u(t_0,\xi)\,d\xi,$$

$$I'_6(t,x):=\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\le r_0} R_k(t-t_0,x-\xi')\partial_\xi^k u(t_0,\xi)\big|_{\xi_n=0}\,d\xi',$$

$$I'_7(t,x):=\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\le r_0-2s} V_k(t-t_0,x-\xi')\partial_\xi^k u(t_0,\xi)\big|_{\xi_n=0}\,d\xi'.$$

Оцінки матриць G_0, G_j, R_k, V_k і $W_{\bar{k}}$ наведено в (11) і (12) при $r=0$ і (15)–(17). Позначимо через c_1 найменшу серед сталих c у цих оцінках.

Зображення (40) є правильним для будь-яких $t_0<T$. Перейдемо в (40) при довільно фіксованих $(t,x)\in\Pi^+_{(-\infty,T]}$ до границі при $t_0\to-\infty$, припускаючи виконаними, крім умови (39), ще такі умови, в яких (t,x) – довільно фіксована точка з $\Pi^+_{(-\infty,T]}$:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n_+}\tau^{-M}E_{c_1}(\tau,x-\xi)|u(t-\tau,\xi)|\,d\xi\underset{\tau\to\infty}{\to}0, \tag{41}$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\le r_0}\sum_{\|k\|\le p\le r_0}\tau^{-M'+p/(2s)}E_{c_1}(\tau,x-\xi')\left|\partial_\xi^k u(t-\tau,\xi)\big|_{\xi_n=0}\right|d\xi'\underset{\tau\to\infty}{\to}0,$$

$$n_0\ge 2b_n, \tag{42}$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\le r_0-2s}\sum_{\|k\|\le p\le r_0-2s}\tau^{-M'+1+p/(2s)}E_{c_1}(\tau,x-\xi')\times$$

$$\times\left|\partial_\xi^k u(t-\tau,\xi)\big|_{\xi_n=0}\right|d\xi'\underset{\tau\to\infty}{\to}0,\qquad p_0\ge 1, \tag{43}$$

$$\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{\mathbf{R}_+^n} (t-\tau)^{-M} E_{c_1}(t-\tau, x-\xi)\,|f(\tau,\xi)|\,d\xi < \infty, \tag{44}$$

$$\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \sum_{\|k\|\le r_0}\ \sum_{\|k\|\le p\le r_0} (t-\tau)^{-M'+p/(2s)} E_{c_1}(t-\tau, x-\xi')\,\times$$

$$\times \left|\partial_\xi^k f(\tau,\xi)\big|_{\xi_n=0}\right| d\xi' < \infty, \qquad n_0 \ge 2b_n, \tag{45}$$

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \sum_{\|\bar k\|\le r_0-2s}\ \sum_{\|\bar k\|\le p\le r_0-2s} \tau^{-M'+1+p/(2s)} E_{c_1}(\tau, x-\xi')\,\times$$

$$\times \left|\partial_\xi^{\bar k} f(t-\tau,\xi)\big|_{\xi_n=0}\right| d\xi' \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0, \qquad p_0 \ge 2, \tag{46}$$

$$\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{\mathbf{R}_+^n} (t-\tau)^{-M-1+r_j/(2s)} E_{c_1}(t-\tau, x-\xi')\left|g_j(\tau,\xi')\big|_{\xi_n=0}\right| d\xi' < \infty,$$

$$j \in \{1,\ldots,m\}. \tag{47}$$

У результаті отримаємо формулу

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{\mathbf{R}_+^n} G_0(t-\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)\,d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{\mathbf{R}^{n-1}} G_j(t-\tau,x-\xi')\,g_j(\tau,\xi')\,d\xi' +$$

$$+\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \sum_{\|k\|\le r_0} R_k(t-\tau,x-\xi')\,\partial_\xi^k f(\xi)\big|_{\xi_n=0}\,d\xi',$$

$$(t,x)\in \Pi^+_{(-\infty,T]}. \tag{48}$$

Отже, при виконанні умов (39) і (41)–(47) для розв’язків задачі (4), (5) є правильним зображення (48).

Зауважимо, що умови (41)–(43) виконуються, зокрема, якщо для довільного $t_0 \in (-\infty, T]$ справджуються оцінки

$$\sup_{x\in\mathbf{R}_+^n}\left(\left|\partial_x^k u(t_0,x)\right|(\Psi(t_0,x))^{-1}\right) \le C e^{\alpha t_0}, \qquad \|k\| \le \beta, \tag{49}$$

де стала $C>0$ не залежить від t_0, $\alpha>0$, $\beta = \begin{cases} 0, & 2sp_0 + m_n n_0 < 2s, \\ r_0, & 2sp_0 + m_n n_0 \ge 2s. \end{cases}$ Це легко доводиться за допомогою нерівності (18).

Як наслідок встановлених результатів, одержуємо теорему про єдиність розв’язку задачі (4), (5) у класі функцій, що задовольняють умови (39) і (41)–(43) (або (39) і (49)). А тепер доведемо існування розв’язку задачі (4), (5), який належить до цього класу єдиності.

Основні результати цього пункту містяться в наступній теоремі.

Теорема 3. *Нехай для будь-якого* $t_0 \in (-\infty, T]$ *такого, що* $|t_0| > 1$,

$$f \in H^{\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar\Pi^+_{(t_0-2,t_0]}, \mathcal{L}_{N1}),$$

$$g_j \in H^{2s+\mathbf{l}-r_j+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\bar\Pi'_{(t_0-2,t_0]}, \mathcal{L}_{11}), \qquad j\in\{1,\ldots,m\}, \qquad \mathbf{l} \ge r_0,$$

і виконуються нерівності

$$\left\| f;\overline{\Pi}^{+}_{(t_0-2,t_0]},\mathcal{L}_{N1}\right\|^{r_0+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} \le Ce^{\alpha t_0}\,|t_0|^{-r_0/(2s)} \le Ce^{\alpha t_0},$$

$$\left\| g_j;\overline{\Pi}'_{(t_0-2,t_0]},\mathcal{L}_{11}\right\|^{2s+r_0-r_j+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)} \le Ce^{\alpha t_0}\,|t_0|^{-r_0/(2s)} \le Ce^{\alpha t_0},\quad j\in\{1,\ldots,m\}, \quad (50)$$

у яких $\alpha>0$ *і стала* C *не залежить від* t_0. *Тоді функція* (48) *є єдиним розв'язком задачі* (4), (5), *який задовольняє умови* (39) *і* (49).

Д о в е д е н н я. Нехай t_0 – довільно взяте число з $(-\infty,T]$. Розглянемо нескінченно диференційовну функцію $\zeta_{t_0}(t)=\begin{cases}0, & t\le t_0-2,\\ 1, & t\ge t_0-1,\end{cases}$ $t\in\mathbf{R}^1$. Запишемо формулу (48) у вигляді

$$u(t,x)=u'(t,x)+u''(t,x),\qquad (t,x)\in\Pi^{+}_{(-\infty,T]},$$

де

$$u'(t,x):=\int_{t_0-2}^{t}d\tau\int_{\mathbf{R}^n_+}G_0(t-\tau,x,\xi)\zeta_{t_0}(\tau)f(\tau,\xi)\,d\xi+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0-2}^{t}d\tau\int_{\mathbf{R}^{n-1}}G_j(t-\tau,x-\xi')\zeta_{t_0}(\tau)g_j(\tau,\xi')\,d\xi'+$$

$$+\int_{t_0-2}^{t}d\tau\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\le r_0}R_k(t-\tau,x-\xi')\zeta_{t_0}(\tau)\partial^k_\xi f(\tau,\xi)\Big|_{\xi_n=0}d\xi',$$

$$u''(t,x):=\int_{-\infty}^{t_0-1}d\tau\int_{\mathbf{R}^n_+}G_0(t-\tau,x,\xi)(1-\zeta_{t_0}(\tau))f(\tau,\xi)\,d\xi+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_{-\infty}^{t_0-1}d\tau\int_{\mathbf{R}^{n-1}}G_j(t-\tau,x-\xi')(1-\zeta_{t_0}(\tau))g_j(\tau,\xi')\,d\xi'+$$

$$+\int_{-\infty}^{t_0-1}d\tau\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\le r_0}R_k(t-\tau,x-\xi')(1-\zeta_{t_0}(\tau))\partial^k_\xi f(\tau,\xi)\Big|_{\xi_n=0}d\xi'.$$

На підставі зауваження 2 щодо теореми 1 функція u' є розв'язком задачі

$$A^0u'=\zeta_{t_0}f,$$

$$B^0_j u'\big|_{x_n=0}=\zeta_{t_0}g_j,\qquad j\in\{1,\ldots,m\},$$

$$u'\big|_{t=t_0-2}=0,$$

який належить до простору $H^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{0,\kappa(\gamma,\alpha)}(\overline{\Pi}^{+}_{(t_0-2,T]},\mathcal{L}_{N1})$. Із властивостей матриць G_0, G_j і R_k випливає, що при $(t,x)\in\Pi^{+}_{(t_0,T]}$ функція u'' є розв'язком задачі (4), (5) з $f\equiv0$ і $g_j\equiv0$, $j\in\{1,\ldots,m\}$, і $u''\in H^{2s+\mathbf{l}+\lambda}_{\kappa(\gamma,\alpha)}(\overline{\Pi}^{+}_{(t_0,T]},\mathcal{L}_{N1})$.

Отже, функція (48) є розв'язком задачі (4), (5), який задовольняє умови (39). Доведемо, що він задовольняє також і умови (49). Для цього розглянемо спочатку функцію $u'(t_0,x)$, $x\in\mathbf{R}^n_+$, і за допомогою заміни $t_0-\tau=-\gamma$ запишемо її у вигляді

$$u'(t_0,x)=v_{t_0}(t,x)\Big|_{t=0}, \qquad x\in\mathbf{R}^n_+, \tag{51}$$

де

$$v_{t_0}(t,x):=\int_{-2}^{t}d\gamma\int_{\mathbf{R}^n_+}G_0(t-\gamma,x,\xi)F_{0t_0}(\gamma,\xi)\,d\xi+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_{-2}^{t}d\gamma\int_{\mathbf{R}^{n-1}}G_j(t-\gamma,x-\xi')F_{jt_0}(\gamma,\xi')\,d\xi'+$$

$$+\int_{-2}^{t}d\gamma\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\sum_{\|k\|\le r_0}R_k(t-\gamma,x-\xi')F_{0t_0}(\gamma,\xi)\Big|_{\xi_n=0}d\xi',$$

$$F_{0t_0}(\gamma,\xi):=\zeta_{t_0}(t_0+\gamma)f(t_0+\gamma,\xi),$$

$$F_{jt_0}(\gamma,\xi'):=\zeta_{t_0}(t_0+\gamma)g_j(t_0+\gamma,\xi'), \qquad j\in\{1,\ldots,m\}.$$

З умов теореми і властивостей функції ζ_{t_0} випливає, що $F_{0t_0}\in$ $\in H^{r_0+\lambda}_{\kappa(t_0+\gamma,\,\alpha)}(\bar\Pi^+_{(-2,0]},\mathfrak{L}_{N1})$, $F_{jt_0}\in H^{2s+r_0-r_j+\lambda}_{\kappa(t_0+\gamma,\alpha)}(\bar\Pi'_{(-2,0]},\mathfrak{L}_{11})$, $j\in\{1,\ldots,m\}$, і справджуються нерівності

$$\left\|F_{0t_0};\bar\Pi^+_{(-2,0]},\mathfrak{L}_{N1}\right\|^{r_0+\lambda}_{\kappa(t_0+\gamma,\alpha)}\le Ce^{\alpha t_0},$$

$$\left\|F_{jt_0};\bar\Pi'_{(-2,0]},\mathfrak{L}_{11}\right\|^{2s+r_0-r_j+\lambda}_{\kappa(t_0+\gamma,\alpha)}\le Ce^{\alpha t_0}, \qquad j\in\{1,\ldots,m\},$$

де стала C не залежить від t_0. Використовуючи зауваження 2 щодо теореми 1, а також рівність $\kappa(t+t_0,\alpha)=\kappa(t,\kappa(t_0,\alpha))$, звідси отримуємо

$$\left\|v_{t_0};\bar\Pi_{(-2,0]},\mathfrak{L}_{N1}\right\|^{2s+r_0+\lambda}_{\kappa(t_0+\gamma,\alpha)}\le C\Bigg(\left\|F_{0t_0};\bar\Pi^+_{(-2,0]},\mathfrak{L}_{N1}\right\|^{r_0+\lambda}_{\kappa(t_0+\gamma,\alpha)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left\|F_{jt_0};\bar\Pi'_{(-2,0]},\mathfrak{L}_{11}\right\|^{2s+r_0-r_j+\lambda}_{\kappa(t_0+\gamma,\alpha)}\Bigg)\le Ce^{\alpha t_0}.$$

З (51) і цієї нерівності безпосередньо випливає оцінка (49) для u'.

Оцінка (49) для u'' випливає із нерівностей, які отримуємо за допомогою оцінок G_0, G_j, R_k, властивостей функції ζ_{t_0}, нерівностей (18) і (50):

$$\left|\partial^{\mathbf{l}}_x u''(t_0,x)\right|\le C\Bigg(\int_{-\infty}^{t_0-1}d\tau\int_{\mathbf{R}^n_+}(t_0-\tau)^{-M-\|\mathbf{l}\|/(2s)}E_c(t_0-\tau,x-\xi)e^{\alpha\tau}\Psi(\tau,\xi)\,d\xi+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_{-\infty}^{t_0-1}d\tau\int_{\mathbf{R}^{n-1}}(t_0-\tau)^{-M'-1+(r_j-\|\mathbf{l}\|)/(2s)}\times$$

$$\times E_c(t_0-\tau,x-\xi')e^{\alpha\tau}|\tau|^{-r_0/(2s)}\Psi(\tau,\xi')\,d\xi'+$$

$$+\int_{-\infty}^{t_0-1} d\tau \int_{\mathbf{R}^{n-1}} (t_0-\tau)^{-M'+(r_0-\|\mathbf{l}\|)/(2s)} \times$$

$$\times E_c(t_0-\tau, x-\xi')e^{a\tau}|\tau|^{-r_0/(2s)}\Psi(\tau,\xi')\,d\xi'\Bigg) \le$$

$$\le C\Psi(t_0,x)\int_{-\infty}^{t_0-1}\Bigg((t_0-\tau)^{-\|\mathbf{l}\|/(2s)} +$$

$$+(t_0-\tau)^{(r_0-\|\mathbf{l}\|)/(2s)}|\tau|^{-r_0/(2s)}\Bigg)e^{a\tau}\,d\tau \le$$

$$\le C\Psi(t_0,x)\int_{-\infty}^{t_0-1} e^{a\tau}\,d\tau = C\Psi(t_0,x)e^{at_0}, \qquad \|\mathbf{l}\| \le r_0 .$$

Теорему доведено. ♦

Наслідки. *Наведені в працях* [2, 5, 6, 9] *і в цій статті результати для модельних* $\overrightarrow{2b}$*-параболічних крайових задач у півпросторі, в якому* $x_n > 0$*, з відповідними природними змінами є правильними також у півпросторах, де* $x_r > 0$ *для довільного* $r \in \{1, \mathbf{K}, n-1\}$. *Ці результати можуть використовуватись для дослідження загальніших крайових задач для* $\overrightarrow{2b}$*-параболічних систем у півпросторах за просторовими змінними.*

1. *Івасишен С. Д., Івасюк Г. П.* Коректна розв'язність параболічних початкових задач Солонникова – Ейдельмана // Укр. мат. журн. – 2009.– 61, № 5. – С. 650–671.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Ivasyuk H. P.* Correct solvability of Solonnikov – Eidel'man parabolic initial-value problems // Ukr. Math. J. – 2009. – 61, No. 5. – P. 775–800. – https://doi.org/10.1007/s11253-009-0244-7.
2. *Івасишен С. Д., Турчина Н. І.* Матриця Ґріна модельної крайової задачі з векторною параболічною вагою // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017.– 60, № 4. – С. 25–39.
3. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3–175; Дополнение к статье. – С. 271–273.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., Vol. 23. – Providence, RI: AMS, 1968. – xi+648 p.
5. *Турчина Н. І., Івасишен С. Д.* Про модельну крайову задачу з векторною вагою // Буков. мат. журн. – 2017. – 5, № 3-4. – С. 163–167.
6. *Турчина Н. І., Івасишен С. Д.* Коректна розв'язність модельної $\overrightarrow{2b}$-параболічної крайової задачі в просторах Гельдера // Буков. мат. журн. – 2018.– 6, № 3-4. – С. 152–164. – https://doi.org/10.31861/bmj2018.03.152.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Москва: Наука, 1966. – Т. 1.– 607 с.
8. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152. – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.
9. *Turchyna N. I., Ivasyshen S. D.* On integral representation of the solutions of a model $\overrightarrow{2b}$-parabolic boundary value problem // Карпат. мат. публ. – 2019. – 11, № 1. – С. 193–203. – https://doi.org/10.15330/cmp.11.1.193-203.

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА РАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ МОДЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И БЕЗ НИХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПО ЭЙДЕЛЬМАНУ СИСТЕМЫ

Для параболической по Эйдельману системы уравнений без младших членов и с постоянными коэффициентами установлена корректная разрешимость в анизотропных пространствах Гельдера быстрорастущих при $|x| \to \infty$ *функций модельных граничных задач на полуинтервалах* $(0, T]$ *и* $(-\infty, T]$ *изменения временной переменной* t*. Получены интегральные представления решений рассмотренных задач.*

Ключевые слова: $\vec{2b}$*-параболическая по Эйдельману система, модельная краевая задача, задача без начальных условий, корректная разрешимость, интегральное представление решений, анизотропное пространство Гельдера растущих функций.*

CORRECT SOLVABILITY OF MODEL BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH INITIAL CONDITIONS AND WITHOUT THEM FOR A SYSTEM PARABOLIC IN THE SENSE OF EIDELMAN IN HÖLDER SPACES OF INCREASING FUNCTIONS

For a system of equations with constant coefficients and without minor terms that is parabolic in the Eidelman sense, the correct solvability of the model boundary-value problems in Hölder anisotropic spaces of rapidly increasing functions as $|x| \to \infty$ *is established in the time half-intervals* $(0, T]$ *and* $(-\infty, T]$*. Integral representations of solutions of the considered problems are obtained.*

Key words: Eidelman $\vec{2b}$*-parabolic system of equations, model boundary-value problem, problem without initial conditions, correct solvability, integral representation of solutions, anisotropic Hölder space of rapidly increasing functions.*

Нац. техн. ун-т України
«Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського», Київ

Одержано
21.05.19