

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛИТ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ КОНТУРАМИ**

*Разработан единый подход к исследованию пластического деформирования полиметаллических изотропных плит с гладкими и кусочно-гладкими опорными контурами при воздействии динамических нагрузок взрывного типа. Рассматриваются плиты разного типа: эллиптические, полу- и четверть-эллиптические, эллиптический пояс, эллиптический сектор. Материалы слоев могут быть идеально-пластическими или линейно-упрочняющимися.*

**Ключевые слова:** эллипс, полуэллипс, эллиптический сектор, эллиптический пояс, изотропные пластические материалы, идеальная пластичность, линейное упрочнение, нагрузки взрывного типа, остаточная повреждаемость.

**Введение.** Пластики различных геометрических форм широко используются в машиностроении, авиа-и судостроении, гражданском и промышленном строительстве. В процессе эксплуатации они могут подвергаться воздействию интенсивных ударных или взрывных динамических нагрузок. В этом случае возникает важная задача оценки степени и формы их остаточной повреждаемости. Решением таких задач ученые различных стран занимаются свыше 80-ти лет применительно, в основном, к однородным конструкциям из идеально-пластических материалов. Обзоры полученных в этом направлении результатов можно найти в [3, 5, 7]. Большинство из полученных решений относятся к круглым и кольцевым пластинам (точные аналитические решения для идеально-пластических материалов при условии пластичности Треска). Для пластин иных форм приближенные решения однородных конструкций из идеально-пластических материалов решения можно получить при использовании кинематического метода Гвоздева – Йогансена [6]. Во многих областях современной техники существующие жесткие требования к надежности конструкций в сочетании с экономическими, экологическими и ресурсосберегающими требованиями часто не позволяют создать требуемую конструкцию из одного конструкционного материала. В связи с этим в последние десятилетия активно развиваются различные технологии создания композитных конструкций из наборов различных материалов. Из наиболее перспективных технологий можно считать наиболее простыми технологии сварки взрывом, диффузионной сварки, холодного газодинамического и плазменного напыления [1, 8, 9], склейки металлов. Эти технологии позволяют создать плоские слоистые конструкции больших площадей из практически любых наборов металлических сплавов с существенно различными свойствами, а затем с помощью лазерной резки раскроить их на пластины требуемых форм. При этом возникает проблема оценки повреждаемости таких гибридных слоистых пластин. Для случая идеально-пластических материалов соответствующая методика была разработана для пластин с гладкими опорными контурами в работе [6]. Однако многие конструкционные материалы в составе комбинированного слоистого пакета при пластическом деформировании проявляют достаточно выраженную степень упрочнения, игнорирования которой может приводить к существенным ошибкам в оценках их пластической деформативности. Поэтому в данной работе будем считать все материалы упрочняющимися и для единообразия записи необходимых закономерностей будем использовать для них модель линейного упрочнения. Кроме того, будем рассматривать класс плит, образованных из эллиптической плиты путем удаления частей материала в окрестности контура эллипса: полуэллипсы, четверть-эллипсы, эллиптический сектор, эллиптический пояс.

---

\* nemirovskyyury@gmail.com

**1. Формулировка задачи.** Рассмотрим полиметаллическую плиту из набора материалов, расположенных попарно симметрично относительно отсчетной (срединой) плоскости  $z = 0$ . Пусть  $h_j$  обозначают координаты раздела слоев в направлении нормали к отсчетной поверхности:

$$0 \leq z \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_j \leq \dots \leq h_n, \quad h_i - h_{i-1} = \Delta_i,$$

В случае поперечного изгиба плиты при жестком соединении слоев в соответствии с гипотезами Кирхгофа – Лява для компонент деформации будем иметь выражения

$$\varepsilon_x = -z\chi_x, \quad \varepsilon_y = -z\chi_y, \quad \varepsilon_{xy} = -z\chi_{xy}, \quad (1)$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \chi_y = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

где  $\omega$  – прогиб отсчетной плоскости.

Будем рассматривать динамические нагрузки высокой интенсивности, при которых упругие деформации будут существенно ниже пластических. Тогда связь между напряжениями и деформациями для  $i$ -го материала можно использовать в форме соотношений теории Генки – Ильюшина [2]:

$$\sigma_{xi} = \frac{\Phi_i(e_u)}{e_u} \left( \varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \right), \quad \Phi_i(e_u) = \sigma_{0i} + B_i e_u,$$

$$\sigma_{yi} = \frac{\Phi_i(e_u)}{e_i} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_x + \varepsilon_y \right), \quad \tau_i = \frac{\Phi_i(e_u)}{e_u} \varepsilon_{xy},$$

$$e_u = z \chi_u, \quad \chi_u = \sqrt{\chi_x^2 + \chi_x \chi_y + \chi_y^2 + \chi_{xy}^2}.$$

Здесь  $\sigma_{0i}$ ,  $B_i$  – предел текучести и модуль упрочнения  $i$ -го материала.

Тогда для возникающих в рассматриваемых слоистых пластинах изгибающих  $M_x$ ,  $M_y$  и крутящих  $M_{xy}$  моментов будем иметь выражения

$$\begin{aligned} M_x &= 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{xi} z dz = D_1 J_1(\omega) + D_2 J_2(\omega), \\ M_y &= D_1 J_3(\omega) + D_2 J_4(\omega), \\ M_{xy} &= D_1 J_5(\omega) + D_2 J_6(\omega), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$D_1 = \sum_{i=1}^n \sigma_{0i} (h_i^2 - h_{i-1}^2), \quad D_2 = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n B_i (h_i^3 - h_{i-1}^3), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} J_1(\omega) &= \frac{\chi_x + \frac{1}{2} \chi_y}{\chi_u}, & J_2(\omega) &= \chi_x + \frac{1}{2} \chi_y, \\ J_3(\omega) &= \frac{\chi_y + \frac{1}{2} \chi_x}{\chi_u}, & J_4(\omega) &= \chi_y + \frac{1}{2} \chi_x, \\ J_5(\omega) &= \frac{\chi_{xy}}{\chi_u}, & J_6(\omega) &= \chi_{xy}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для плит, лежащих на упруго-вязком основании с коэффициентами сопротивления  $k_1$  и  $k_2$ , уравнения динамического изгиба имеют вид

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - k_1 \omega - k_2 \frac{\partial \omega}{\partial t} - m \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + q_0 \varphi_1(x, y) \varphi_2(t) = 0, \quad (7)$$

$$m = 2 \sum_{i=1}^n \rho_i (h_i - h_{i-1}), \quad (8)$$

где  $\rho_i$  – плотность материала  $i$ -го слоя,  $q_0$  – амплитуда внешней динамической нагрузки, функции  $\varphi_1(x, y)$  и  $\varphi_2(t)$  определяют ее изменение по поверхности плиты и по времени  $t$ .

Подставляя в уравнение (7) выражения (4), можем представить его в операторной форме

$$R(\omega) - k_1 \omega - k_2 \frac{\partial \omega}{\partial t} - m \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + q_0 \varphi_1(x, y) \cdot \varphi_2(t) = 0. \quad (9)$$

Решение этого уравнения относительно функции прогиба  $\omega(x, y, t)$  следует искать для конкретных условий закрепления контура пластины и нулевых начальных условий. Численные методы решения подобных нелинейных начально-краевых задач обсуждаются в монографии [4], требуют большой затраты времени по разработке и отладке численных алгоритмов расчета. В то же время во многих случаях возникает необходимость получения оперативных оценок степени повреждаемости многообразных форм пластинок с различными условиями нагружения и закрепления. Поэтому здесь предлагается искать приближенное решение уравнения (9) для разнообразных форм путем использования процедуры Бубнова – Галеркина.

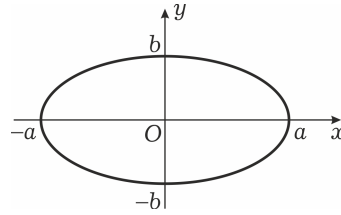


Рис. 1

Рассмотрим класс различных по форме пластин, образуемых из эллиптической пластины, с контуром, описываемым уравнением (см. рис. 1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (10)$$

Путем отсечения некоторых ее частей будем считать, что образующиеся новые пластины будут все по контуру защемлены или на некоторых частях шарнирно оперты, и все нагружены равномерно распределенной нагрузкой взрывного типа:

$$\varphi_2(x, y) = 0, \quad \varphi_1(t) = e^{-\alpha t}. \quad (11)$$

Наряду с защемленной эллиптической плитой (рис. 1), будем рассматривать

– *полуэллиптические плиты* (рис. 2а, рис. 2б):

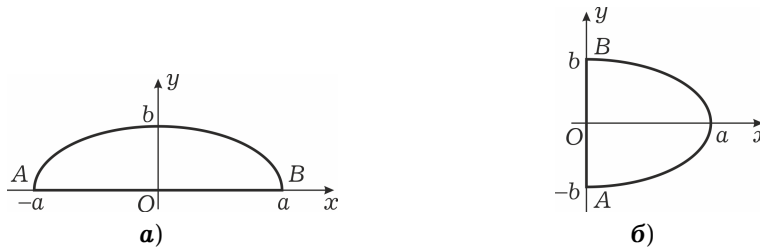


Рис. 2

– эллиптический пояс и полупояс (рис. 3а, рис. 3б):

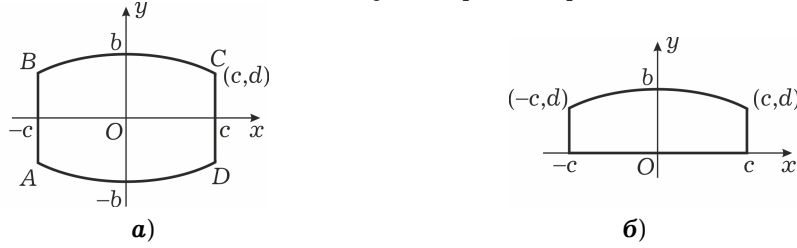


Рис. 3

– четверть-эллипс и четверть-пояс (рис. 4а, рис. 4б):



– эллиптический сектор (рис. 5)

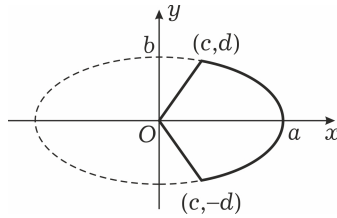


Рис. 5

Для всех рассматриваемых случаев приближенное решение будем искать в форме

$$\omega(x, y, t) = C(t)f(x, y), \quad (12)$$

где функцию  $f(x, y)$  подбираем из требования выполнения граничных условий закрепления на контуре соответствующей плиты.

Тогда при условии защемления эллиптической плиты (рис. 1) будем иметь

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad -a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b. \quad (13)$$

Для пластины, изображенной на рис. 2а, получим

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 y^2, \quad -a \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (14)$$

Для пластины, изображенной на рис. 2б, получим

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 x^2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b. \quad (15)$$

Для пластинки, изображенной на рис. 3а, получим

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 (x^2 - c^2)^2, \quad -c \leq x \leq c, \quad -b \leq y \leq b. \quad (16)$$

Для пластинки, изображенной на рис. 3б, получим

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 (x^2 - c^2)^2 y^2, \quad -c \leq x \leq c, \quad y \leq 0 \leq b. \quad (17)$$

Для пластинки, изображенной на рис. 4а, получим

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 x^2 y^2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (18)$$

Для пластинки, изображенной на рис. 4б, получим

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 (x - c)^2 x^2 y^2, \quad 0 \leq x \leq c, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (19)$$

Для пластинки, изображенной на рис. 5, имеем

$$f(x, y) = (y^2 - k_1^2 x^2)^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -d \leq y \leq d. \quad (20)$$

Если криволинейные части контура защемлены, а прямолинейные – шарнирно оперты, то нетрудно подобрать функции  $f(x, y)$  удовлетворяющие этим условиям закрепления. Так, например, для пластин изображенных на рис. 2а и рис. 2б вместо функций (14) и (15) использовать, соответственно, функции

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 y^3, \quad -a \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (21)$$

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 x^3, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad (22)$$

а для пластин на рис. 3а и рис. 3б – функции:

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 (x^2 - c^2)^3, \quad (23)$$

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 (x^2 - c^2)^3 y^3. \quad (24)$$

После умножения уравнения (9) на функцию  $f(x, y)$ , подстановки в него выражения (12) при конкретном выборе  $f(x, y)$  из набора (13)–(24) и интегрирования полученного уравнения по площади соответствующей пластины, в каждом случае будем получать для функции  $C(t)$  линейное дифференциальное уравнение такого вида:

$$e_1 \ddot{C} + e_2 \dot{C} + e_3 C + e_4 \varphi_1(t) + e_5 = 0, \quad (25)$$

где  $e_1, e_2, \dots, e_5$  – постоянные,  $\varphi_1(t)$  – известная функция изменения внешней нагрузки по времени и точкой обозначена производная по времени.

Решение этого уравнения необходимо определять пользуясь начальными условиями

$$\dot{C}(0) = C(0) = 0. \quad (26)$$

Время остановки движения пластины определяется из уравнения

$$\dot{C}(t_*) = 0$$

и тогда степень остаточной повреждаемости соответствующей пластины будет характеризоваться величиной  $C(t_*)$ .

1. Дерибас А. А. Физика упрочнения и сварки взрывом. – Новосибирск: Наука, 1972. – 188 с.
2. Ильюшин А. А. Пластичность: В 2 ч. – Ч. 1: Упруго-пластические деформации. – Москва-Ленинград: Гостехтеориздат, 1948. – 378 с

3. Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жесткопластических элементов конструкций. – Новосибирск: Наука, 1984. – 234 с
4. Кошур В. Д., Немировский Ю. В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. – Новосибирск: Наука, 1990. – 196 с.
5. Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций // Новое в зарубежной науке. Сер. Механика. Проблемы динамики упругопластических сред. – 1975. – Вып. 5. – С. 155–247.
6. Немировский Ю. В. Динамический изгиб эллиптических и круглых плит из жестко-пластического материала // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2017. – № 1(31). – С. 79–84.
7. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое сопротивление плоских пластических преград. – Новосибирск: Гео, 2009. – 311 с.
8. Яковлев И. В., Сиротенко Л. Д., Ханов А. М. Сварка взрывом армированных композиционных материалов. – Новосибирск: Наука, 1991. – 119 с.
9. Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive welding of composite materials // J. Compos. Mater. – 1969. – 3, No. 4. – P. 669–701.

### ДИНАМІЧНИЙ ЗГІН ПЛАСТИЧНИХ ПОЛІМЕТАЛІЧНИХ ПЛИТ З КУСКОВО-ГЛАДКИМИ ЕЛІПТИЧНИМИ КОНТУРАМИ

Розроблено єдиний підхід до дослідження пластичного деформування поліметалічних ізотропних плит з гладкими і кусково-гладкими опорними контурами при дії динамічних навантажень вибухового типу. Розглядаються плити різного типу: еліптичні, напів- і чверть-еліптичні, еліптичний пояс, еліптичний сектор. Матеріали шарів можуть бути ідеально пластичними або лінійно-зміцнювальними.

**Ключові слова:** еліпс, напівеліпс, еліптичний пояс, еліптичний сектор, ізотропні пластичні матеріали, ідеальна пластичність, лінійне зміцнення, навантаження вибухового типу, залишкова пошкоджуваність.

### DYNAMIC BENDING OF PLASTIC POLYMETALLIC PLATES WITH PIECEWISE-SMOOTH ELLIPTICAL CONTOURS

An unified approach to the study of plastic deformation of polymetallic isotropic plates with smooth and piecewise-smooth supporting contours due to the action of dynamic loads of explosive type is developed. The plates of different types: elliptical, semi- and quarter-elliptical, elliptical belt, elliptic sector are considered. The materials of the layers can be perfectly plastic or linear-hardening.

**Key words:** ellipse, semiellipse, elliptical zone, elliptical sector, isotropic plastic materials, perfect plasticity, linear hardening, loading of the explosive type, residual damage.

Ин-т теорет. и прикл. механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено  
21.04.18