УДК 512.547.25

О. А. Тилищак*

ПРО ЧИСЛО НЕРОЗКЛАДНИХ МОДУЛЯРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЦИКЛІЧНОЇ p-ГРУПИ НАД ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ СКІНЧЕННОЇ ДОВЖИНИ

Побудовано серію нерозкладних модулярних зображень циклічної p-групи $\langle a \rangle$ над комутативним локальним нецілісним кільцем головних ідеалів характеристики p вигляду $a \to E + M$, де E – одинична матриця, M – мономіальна матриця. Установлено критерій еквівалентності таких зображень, а також число нееквівалентних нерозкладних зображень заданого вигляду фіксованого степеня для введеного відношення $*$-еквівалентності.

Ключові слова: *модулярне зображення, нерозкладне зображення, $*$-еквівалентність, мономіальна матриця.*

Вступ. Відомо (див. [16]), що скінченна p-група має скінченне число нерозкладних зображень над полем характеристики p тоді й лише тоді, коли її силовська p-підгрупа циклічна. Проблема класифікації всіх нерозкладних модулярних зображень скінченних груп розглядається В. М. Бондаренком і Ю. А. Дроздом у роботі [3], результати якої, разом з результатами [11] (а також іншими результатами цих авторів), є важливим етапом розвитку сучасної теорії зображень, пов'язаним з ручними та дикими матричними задачами. Зауважимо, що задача про ручні та дикі випадки актуальна і для зображень груп над кільцями (які не є полями). Перші результати про дикість отримано для зображень циклічних груп, а саме в роботах [4] для деяких областей цілісності та в [1] для кілець, які не є областями цілісності.

Якщо мова йде про кількість нерозкладних модулярних зображень (а саме з такою тематикою пов'язана ця стаття), слід, зокрема, звернути увагу на праці [5–9, 15]. З результатів П. М. Гудивка, І. Б. Чухрая [9] випливає, що скінченна p-група G порядку $|G| > 2$ над комутативним локальним кільцем характеристики p^s, $s \ge 1$, яке не є полем, має нееквівалентні нерозкладні матричні зображення довільного степеня $n > 1$, не меншого ніж порядок поля лишків кільця K. Якщо поле лишків локального кільця K скінченної довжини скінченне, то кільце K є скінченним і в [13] число нееквівалентних нерозкладних матричних зображень довільного степеня $n > 1$ циклічної p-групи над таким кільцем K характеристики p оцінюється знизу.

Мета цієї статті – продовжити дослідження в цьому напрямку, абстрагувавшись від оборотних параметрів зображень, побудованих у [13], та розширивши область застосувань на локальні кільця скінченної довжини з довільним полем лишків. Проблема обчислень, навіть при скінченному полі лишків, полягає в тому, що кількість нееквівалентних зображень з різними значеннями оборотних параметрів і фіксованими значеннями інших параметрів не є сталою. Матричні нерозкладні зображення циклічних груп досліджуються не лише з точністю до класичної еквівалентності, а й з точністю до (введеної в цій статті для деяких зображень) $*$-еквівалентності. Підкреслимо, що вивчення матриць чи матричних зображень з точністю до спеціальних (не класичних) еквівалентностей виникають при дослідженні різних задач (див., наприклад, [10, 12, 14 (розд. 7)]).

* alxtlk@gmail.com

1. Критерій подібності мономіальних матриць над локальними кільцями головних ідеалів. Тут і надалі позначатимемо через K комутативне локальне кільце головних ідеалів, через K^* – групу його оборотних елементів відносно множення, через $R = tK$ – єдиний максимальний ідеал (радикал) кільця K. Елемент $t \in K$ визначається однозначно з точністю до оборотного множника, і будь-який ненульовий елемент $x \in K$ має вигляд $x = \varepsilon t^s$, де $\varepsilon \in K^*$ і $s \ge 0$ (тут $t^0 = 1$, див. [17]). Число s (яке не залежить від вибору t) називаємо *вагою елемента* x і позначаємо через $w(x)$. Елемент ε вже залежить від t. Більш того, навіть при фіксованому t, якщо K не є областю цілісності, він визначається елементом x неоднозначно, а саме $\varepsilon t^s = \varepsilon' t^s$ тоді і лише тоді, коли ε і ε' рівні за модулем $\operatorname{Ann}(t^s) = \{y \in K \mid yt^s = 0\}$, тобто $\varepsilon - \varepsilon' \in \operatorname{Ann}(t^s)$. Степінь нільпотентності елемента x позначаємо через $\ell(x)$. Якщо x ненільпотентний, то вважаємо, що $\ell(x) = \infty$. Вводимо також позначення $\ell(R) = \ell(t)$. Якщо K – поле, то $\ell(R) = 1$, і навпаки. Якщо K – область цілісності, яка не є полем, то $\ell(R) = \infty$, і навпаки. Якщо K не є областю цілісності, то K називають локальним кільцем довжини $\ell(R)$.

Услід за [2], матрицю A над кільцем K:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_i \ne 0, \qquad i = 1, \dots, n,$$

назвемо *канонічно циклічною*. (Питання подібності мономіальних матриць легко зводиться до питання подібності канонічно циклічних матриць над довільним комутативним кільцем з одиницею.) Послідовність $\overline{a} = (a_1, \dots, \dots, a_{n-1}, a_n)$ назвемо визначальною послідовністю матриці A і будемо писати $A = M(\overline{a}) = M(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$.

Послідовність ваг $\overline{w}(\overline{a}) = (w(a_1), \dots, w(a_{n-1}), w(a_n))$ членів визначальної послідовності $\overline{a}$ називаємо *ваговою послідовністю* матриці A і позначаємо $\overline{w}(A)$. Тоді $\overline{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$, де $s_i = w(a_i)$ і ε_i – елемент із K^* (які, згідно з викладеним вище, визначаються послідовністю $\overline{a}$ неоднозначно). У цьому випадку матрицю $M(\overline{a})$ позначатимемо також через $M(\overline{a}) = M(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ або $M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$, де $\overline{w} = \overline{w}(\overline{a})$ і $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$. Очевидно, що

$$M(\overline{a}) = M(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = M(t^{s_1}, \dots, t^{s_{n-1}}, t^{s_n}) \cdot \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n).$$

Дві послідовності $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, члени яких належать деякій множині, назвемо *циклічно еквівалентними*, якщо $\overline{y}$ отримується з $\overline{x}$ циклічною перестановкою її членів: $\overline{y} = (x_{k+1}, \dots, x_n, x_1 \dots, x_k)$, $0 \le k < n$. Легко бачити, що є подібними дві канонічно циклічні матриці з циклічно еквівалентними визначальними послідовностями.

Теорема 1 [**2**]. *Матриці* $M = M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ *і* $M' = M(\overline{w}', \overline{\varepsilon}')$, *де* $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$, $\overline{\varepsilon}' = (\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_{n-1}', \varepsilon_n')$, *подібні тоді й лише тоді, коли* $\overline{w}$ *і* $\overline{w}'$ *є циклічно еквівалентними, а елементи* $\varepsilon = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$ *і* $\varepsilon' = \varepsilon_1' \cdots \varepsilon_{n-1}' \varepsilon_n'$ *кільця* K *рівні за модулем* $\operatorname{Ann}(t^s)$, *де* s – *найбільший член вагової послідовності* $\overline{w}$.

2. $*$-подібність матриць.

Означення 1. Квадратні матриці A і B одного порядку n над кільцем K назвемо $*$-подібними, якщо для деякої підставної матриці P порядку n над кільцем K виконується рівність

$$A = P^{-1}\operatorname{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n)B\cdot\operatorname{diag}(\delta_{n+1},\ldots,\delta_{2n})P,$$

де $\delta_i\in K^*$, $i=1,\ldots,2n$.

Очевидно, що $\operatorname{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n)P_\varphi = P_\varphi\operatorname{diag}(\delta_{\varphi(1)},\ldots,\delta_{\varphi(n)})$, де P_φ − підставна матриця підстановки n-го степеня φ, $\delta_i\in K^*$, $i=1,\ldots,n$. Тоді легко показати, що відношення $*$-подібності є відношенням еквівалентності.

Зрозуміло, що подібні матриці необов'язково є $*$-подібними, і навпаки.

Лема 1. *Клітки Жордана $J_n(\lambda_1)$ та $J_n(\lambda_2)$ порядку n з елементами $\lambda_1\in K$ та $\lambda_2\in K$ на головних діагоналях є $*$-подібними тоді й тільки тоді, коли елементи λ_1 та λ_2 асоційовані в кільці K (тобто відрізняються оборотним множником).*

Д о в е д е н н я. Дійсно, якщо $\lambda=\varepsilon t^s$, де $\varepsilon\in K^*$ і $0\le s\le \ell(R)$, то маємо серію $*$-подібних матриць

$$J_n(\lambda)=J_n(\varepsilon t^s)=\begin{pmatrix}\varepsilon t^s & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \varepsilon t^s & 1 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon t^s & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon t^s\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}t^s & \varepsilon^{-1} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \varepsilon t^s & 1 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon t^s & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon t^s\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}t^s & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \varepsilon^2 t^s & 1 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon t^s & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon t^s\end{pmatrix}\sim\ldots\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}t^s & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & t^s & 1 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & t^s & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon^n t^s\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}t^s & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & t^s & 1 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & t^s & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t^s\end{pmatrix}=J_n(t^s).$$

При різних s, $0\le s\le\ell(R)$, клітки Жордана $J_n(t^s)$ не є $*$-подібними. Дійсно, якщо

$$J_n(t^{s_1})=P^{-1}\operatorname{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n)J_n(t^{s_2})\operatorname{diag}(\delta_{n+1},\ldots,\delta_{2n})P,$$

$0\le s_1<s_2\le\ell(R)$, для деякої підставної матриці P порядку n над кільцем K та $\delta_i\in K^*$, $i=1,\ldots,2n$, то

$$PJ_n(t^{s_1})P^{-1}=\operatorname{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n)J_n(t^{s_2})\operatorname{diag}(\delta_{n+1},\ldots,\delta_{2n})$$

є верхньотрикутною матрицею. Оскільки

$$PJ_n(t^{s_1})P^{-1}=P\big(t^{s_1}E+J_n(0)\big)P^{-1}=t^{s_1}E+PJ_n(0)P^{-1},$$

то $PJ_n(0)P^{-1}$ є також верхньотрикутною матрицею (тут E − *одинична матриця порядку* n). Нехай P − підставна матриця підстановки φ, а e_i,

$i = 1,\ldots,n$, – стовпчик висоти n з єдиним ненульовим елементом в i-й позиції, який дорівнює 1, і нехай $j = 2,\ldots,n$. Тоді

$$PJ_n(0)P^{-1}e_{\varphi(j)} = PJ_n(0)e_jP^{-1} = Pe_{j-1}J_n(0)P^{-1} = e_{\varphi(j-1)}PJ_n(0)P^{-1}.$$

Оскільки матриця $PJ_n(0)P^{-1}$ є верхньотрикутною, то $\varphi(j-1) \le \varphi(j)$, $j = 2,\ldots,n$. Отже, неспадна підстановка φ є тотожною, а $P = E$. Але тоді

$$J_n(t^{s_1}) = \operatorname{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n)J_n(t^{s_2})\operatorname{diag}(\delta_{n+1},\ldots,\delta_{2n})$$

і $t^{s_1} = \delta_1 t^{s_2}\delta_{n+1}$, що неможливо. ♦

Відомо, що жорданові клітки $J_n(\lambda)$ при різних значеннях λ над областю цілісності K не є подібними. Однак при асоційованих значеннях і тільки при них вони є $*$-подібними. Тобто при різних, але асоційованих, значеннях λ відповідні клітки $J_n(\lambda)$ не є подібними, але є $*$-подібними. Зауважимо, що над довільним кільцем K жорданові клітки $J_n(\lambda)$ при різних значеннях λ можуть бути подібними. Так, якщо число 2 – характеристика кільця K, в якому $t \ne 0$, $t^2 = 0$, то $J_n(t)$ подібна до клітки $J_n(0)$. Дійсно,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}J_n(t)\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & 1\\ 0 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = J_n(0).$$

Над цим самим кільцем K жорданові клітки $J_n(t)$ та $J_n(0)$ не є $*$-подібними, оскільки t і 0 неасоційовані.

Лема 2. *Матриці* $M = M(\bar{w},\bar{\varepsilon})$ *і* $M' = M(\bar{w}',\bar{\varepsilon}')$, *де* $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n)$, $\bar{\varepsilon}' = (\varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_{n-1}',\varepsilon_n')$, $*$*-подібні тоді й лише тоді, коли* $\bar{w}$ *та* $\bar{w}'$ *є циклічно еквівалентними.*

Д о в е д е н н я. *Достатність.* Припустимо, що $\bar{w}$ *та* $\bar{w}'$ є циклічно еквівалентними, і нехай маємо $*$-подібність матриці

$$M = M(\bar{w},\bar{\varepsilon}) = M(t^{s_1},\ldots,t^{s_n})\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \sim$$
$$\sim M(t^{s_1},\ldots,t^{s_n}) = M(\bar{w},(1,\ldots,1)),$$

де $\bar{w} = (s_1,s_2,\ldots,s_n)$. Аналогічно також $M' = M(\bar{w}',\bar{\varepsilon}') \sim M(\bar{w}',(1,\ldots,1))$, де $\bar{w}' = (s_1',s_2',\ldots,s_n')$. З [2] випливає, що, коли $\bar{w}$ та $\bar{w}'$ є циклічно еквівалентними, то $M(\bar{w},(1,\ldots,1)) = M(t^{s_1},\ldots,t^{s_n})$ і $M(\bar{w}',(1,\ldots,1)) = M(t^{s_1'},\ldots,t^{s_n'})$ переставно подібні, тобто для деякої підставної матриці P порядку n над кільцем K маємо $M(t^{s_1},\ldots,t^{s_n}) = P^{-1}M(t^{s_1'},\ldots,t^{s_n'})P$. Тоді $M(\bar{w},(1,\ldots,1))$ та $M(\bar{w}',(1,\ldots,1))$ $*$-подібні, а отже, M та M' є $*$-подібними.

Необхідність. Нехай M та M' $*$-подібні. Як і раніше, це еквівалентне тому, що $M(\bar{w},(1,\ldots,1))$ та $M(\bar{w}',(1,\ldots,1))$ $*$-подібні також, і $M(\bar{w},(1,\ldots,1)) = P^{-1}\operatorname{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n)M(\bar{w}',(1,\ldots,1))\operatorname{diag}(\delta_{n+1},\ldots,\delta_{2n})P$ для деякої підставної матриці P порядку n над кільцем K та $\delta_i \in K^*$, $i = 1,\ldots,2n$, то

$$M(\bar{w},(1,\ldots,1)) = P^{-1}\operatorname{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n)M(\bar{w}',(\delta_{n+1},\ldots,\delta_{2n}))P =$$
$$= P^{-1}M(\bar{w}',(\delta_2\delta_{n+1},\ldots,\delta_n\delta_{2n},\delta_1\delta_{2n}))P.$$

Але тоді $M(\overline{w},(1,\ldots,1))$ і $M(\overline{w}',(\delta_2\delta_{n+1},\ldots,\delta_n\delta_{2n},\delta_1\delta_{2n}))$ подібні, і за теоремою 1, $\overline{w}$ та $\overline{w}'$ циклічно еквівалентні. ♦

З теореми 1 випливає, що подібні матриці $M = M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$, $M' = M(\overline{w}',\overline{\varepsilon}')$ є $*$-подібними. Крім того, $*$-подібні матриці $M = M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$, $M' = M(\overline{w}',\overline{\varepsilon}')$ є подібними тоді й тільки тоді, коли елементи $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$, $\varepsilon' = \varepsilon_1' \ldots \varepsilon_{n-1}'\varepsilon_n'$ кільця K рівні за модулем $\mathrm{Ann}(t^s)$, де s − найбільший член вагової послідовності $\overline{w} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Тому потужність множини матриць заданого вигляду, які є $*$-подібними до матриці $M = M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$, що розглядається з точністю до подібності, дорівнює

$$\left|K/(\mathrm{Ann}(t^s))\right| - \left|R/(\mathrm{Ann}(t^s))\right| = \left|K/(t^{\ell(R)-s}K)\right| - \left|R/(t^{\ell(R)-s}K)\right|$$

і є не меншою, ніж потужність

$$|K/R| - |R/R| = |K/R| - 1$$

мультиплікативної групи поля відношень кільця K.

Назвемо послідовність $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з елементами з довільної множини періодичною, якщо $\overline{x} = (x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_k)$ для деякого натурального $k < n$. У цьому випадку k назвемо періодом послідовності $\overline{x}$. Розглянемо клас W послідовностей, циклічно еквівалентних послідовності $\overline{x}$. На W природно розглянути дію циклічної групи H порядку $|H| = n$, яка перетворить W в одну H-орбіту. Послідовність $\overline{x}$ є періодичною тоді і тільки тоді, коли в неї нетривіальний стабілізатор, який, очевидно, буде циклічною підгрупою групи H. А отже, найменший період періодичної послідовності $\overline{x}$ ділить n, будь-який період послідовності $\overline{x}$ ділиться на її найменший період.

У [2] показано, що, якщо послідовність $\overline{w}$ неперіодична, то матриця $M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$ є нерозкладною. Але неперіодичною буде і будь-яка послідовність $\overline{w}'$, отримана з $\overline{w}$ циклічним зсувом. Тому всі матриці $M(\overline{w}',\overline{\varepsilon}')$, $*$-подібні до матриці $M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$, теж нерозкладні.

3. Число класів $*$-подібних нерозкладних матриць $M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$. З'ясуємо потужність множини нерозкладних матриць $M(\overline{w},\overline{\varepsilon})$, розглядувану з точністю до $*$-подібності з неперіодичною ваговою послідовністю $\overline{w}$ над локальним кільцем K довжини $\ell = \ell(R) > 1$. За лемою 2, вона скінченна і дорівнює числу $U(\ell, n)$ класів циклічно еквівалентних неперіодичних послідовностей $\overline{w} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, де s_i − вага ненульового елемента кільця K, тобто $s_i \in \{0, 1, \ldots, \ell-1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В одному класі циклічно еквівалентних неперіодичних послідовностей є рівно n послідовностей, оскільки будь-який циклічний зсув неперіодичної послідовності генерує відмінну від початкової послідовність.

Оскільки найменший період періодичної послідовності є дільником її довжини, а періодичних послідовностей з найменшим періодом d є $d \cdot U(\ell, d)$, то одержуємо рекурентну формулу

$$U(\ell, n) = \left(\ell^n - \sum_{d|n, d<n} d \cdot U(\ell, d)\right) / n.$$

Базу рекурсії складає, очевидно, випадок $U(\ell, 1) = \ell^1 = \ell$.

Нехай для простоти $n = q^r$, де q − просте число, $r > 0$. Тоді

$$U(\ell, n) = U(\ell, q^r) = \left(\ell^{q^r} - \sum_{i=0}^{r-1} q^i \cdot U(\ell, q^i) \right) / q^r$$

або

$$\sum_{i=0}^{r} q^i \cdot U(\ell, q^i) = \ell^{q^r} .$$

Отже, $U(\ell, n) = U(\ell, q^r) = \ell^{q^r} - \ell^{q^{r-1}}$.

Теорема 2. *Нехай* $n = q_1^{r_1} q_2^{r_2} \cdots q_m^{r_m}$, *де* q_i *− різні прості числа,* $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$. *Число класів* $*$*-подібних нерозкладних матриць* $M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ *з неперіодичною ваговою послідовністю* $\overline{w}$ *над комутативним локальним кільцем* K *довжини* $\ell = \ell(R)$ *є скінченним і дорівнює*

$$\left(\ell^n + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} (-1)^k \ell^{\overline{\frac{n}{q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_k}}}} \right) / n .$$

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що будь-яка матриця $M(\overline{w}, \overline{\varepsilon})$ з неперіодичною ваговою послідовністю $\overline{w}$ є нерозкладною, а число класів $*$-подібних таких нерозкладних матриць є скінченним і дорівнює числу $U(\ell, n)$ класів циклічно еквівалентних неперіодичних послідовностей $\overline{w} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, де $s_i \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$, $i = 1, \ldots, n$. Розглянемо множини P_x усіх періодичних послідовностей з періодом x. Кожна періодична послідовність довжини n з елементами з множини $\{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$ має період, менший ніж n, що є дільником n. Тому така послідовність належить принаймні одній множині P_{n/q_i}, $i = 1, \ldots, m$. Отже,

$$n \cdot U(\ell, n) = \ell^n - \left| \bigcup_{i=1}^{m} P_{n/q_i} \right| .$$

Оскільки $|P_x| = \ell^x$, $P_x \cap P_y = P_{(x,y)}$, де (x, y) − найбільший спільний дільник чисел x і y, то за формулою включень-виключень маємо

$$\begin{aligned} n \cdot U(\ell, n) &= \ell^n + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} (-1)^k \left| P_{n/q_{i_1}} \cap P_{n/q_{i_2}} \cap \ldots \cap P_{n/q_{i_k}} \right| = \\ &= \ell^n + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} (-1)^k \left| P_{n/(q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_k})} \right| = \\ &= \ell^n + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} (-1)^k \ell^{\overline{\frac{n}{q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_k}}}} . \end{aligned}$$

Отже,

$$U(\ell, n) = \left(\ell^n + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} (-1)^k \ell^{\overline{\frac{n}{q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_k}}}} \right) / n . \qquad \blacklozenge$$

4. Число класів $*$-еквівалентних деяких нерозкладних модулярних зображень циклічних p-груп над комутативним локальним кільцем. Нехай тепер K − локальне кільце довжини $\ell = \ell(R) > 1$, p − просте число, і характеристика кільця K дорівнює p. Легко бачити, що

$$\Gamma_A : a \to \Gamma_A(a) = E + t^{\ell - 1} A ,$$

де E − одинична матриця порядку n над кільцем K і A − довільна квадратна матриця порядку n над кільцем K, є матричним зображенням нетривіальної циклічної p-групи $G = \langle a \rangle$ над кільцем K. З [9] випливає, що потужність нееквівалентних нерозкладних зображень Γ_A фіксованого степеня n є не меншою від потужності $|K/R|$ поля відношень кільця K. Для доведення використовувались зображення $\Gamma_{J_n(\lambda)}$, які є нерозкладними і нееквівалентними при різних $\lambda \in K$ за модулем R.

Означення 2. Нехай E − одинична матриця порядку n над кільцем K. Назвемо $*$-еквівалентними зображення Γ і Δ степеня n нетривіальної циклічної p-групи $G = \langle a \rangle$ над кільцем K, якщо $\Gamma(a) - E$ і $\Delta(a) - E$ є $*$-подібними.

Якщо для деякої квадратної матриці A порядку n над кільцем K відображення $\Gamma : a \to E + A$ є зображенням, то для $*$-подібної матриці, взагалі кажучи, може і не бути зображенням. Однак це не так для зображень Γ_A. Два такі зображення є $*$-еквівалентними, якщо відповідні матриці $t^{\ell-1}A$ $*$-подібні або, що одне і те ж, відповідні матриці A є $*$-подібними за модулем $\mathrm{Ann}(t^{\ell-1}) = tK = R$, тобто в полі K/R. Матриці $J_n(\lambda)$ згідно з лемою 1 є $*$-подібними за модулем R тоді й тільки тоді, коли відповідні $\lambda \in K$ асоційовані за модулем R, тобто одночасно належать радикалу R або одночасно йому не належать. Отже, у множині зображень $\Gamma_{J_n(\lambda)}$ при фіксованому n є тільки два зображення з точністю до $*$-еквівалентності.

Розглянемо інші зображення циклічної p-групи над тим самим кільцем спеціального вигляду.

Твердження 1 [**13**]. *Нехай* $G = \langle a \rangle$ *− циклічна* p*-група,* K *− комутативне локальне кільце головних ідеалів характеристики* p*, радикал якого* $R = tK$*,* t *− нільпотентний елемент степеня* $\ell > 1$*,* E *− одинична матриця порядку* n *і* $s_i \in N \cup \{0\}$*,* $s_{i+nk} = s_i$*,* $k = 1, 2, \ldots$*, а* ε_i*,* $i = 1, \ldots, n$*, − елементи з* K^**. Відображення*

$$\Gamma_{\bar{w},\bar{\varepsilon}} : a \to \Gamma_{\bar{w},\bar{\varepsilon}}(a) = E + M(\bar{w}, \bar{\varepsilon}) = E + M(\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_n t^{s_n}) \tag{1}$$

є зображенням групи G *тоді й тільки тоді, коли*

$$\sum_{j=0}^{|G|-1} s_{i+j} \ge \ell, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Отже, відображення (1) є зображенням групи G над кільцем K тоді й тільки тоді, коли для матриці $M' = M(\bar{w}', \bar{\varepsilon}')$, $*$-подібної до $M = M(\bar{w}, \bar{\varepsilon})$, відображення

$$\Gamma_{\bar{w}',\bar{\varepsilon}'} : a \to \Gamma_{\bar{w}',\bar{\varepsilon}'}(a) = E + M(\bar{w}', \bar{\varepsilon}') = E + M\left(\varepsilon_1' t^{s_1'}, \ldots, \varepsilon_n' t^{s_n'}\right)$$

є зображенням групи G над кільцем K. За лемою 2, зображення $\Gamma_{\bar{w},\bar{\varepsilon}}$ та $\Gamma_{\bar{w}',\bar{\varepsilon}'}$ є $*$-еквівалентними тоді й тільки тоді, коли $\bar{w}$ і $\bar{w}'$ циклічно еквівалентні. Очевидно, еквівалентні зображення вигляду (1) будуть $*$-еквівалентними.

Якщо послідовність $\bar{w}$ є неперіодичною, то, як показано в [2], матриця $M(\bar{w}, \bar{\varepsilon})$, а отже, і зображення $\Gamma_{\bar{w},\bar{\varepsilon}}$ є нерозкладними. Але неперіодичною буде і будь-яка послідовність, отримана з $\bar{w}$ циклічним зсувом. Тому всі зображення, $*$-еквівалентні зображенню $\Gamma_{\bar{w},\bar{\varepsilon}}$, теж нерозкладні. З теореми 1 випливає, що один клас $*$-еквівалентних зображень вигляду (1) розбивається на попарно неперетинні класи еквівалентних зображень із конґруентними значеннями $\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ в одному класі та неконґруентними в різних за модулем класах $\mathrm{Ann}(t^s)$, де s – найбільший елемент вагової послідовності $\bar{w}$. Тому потужність множини класів еквівалентних зображень, що містяться в одному класі $*$-еквівалентних зображень вигляду (1), дорівнює

$$\left|(K/\mathrm{Ann}(t^s)) \setminus (tK/\mathrm{Ann}(t^s))\right| = \left|(K/t^{\ell(R)-s}K) \setminus (tK/t^{\ell(R)-s}K)\right|.$$

Таким чином, у комбінаторних термінах з'ясовано число нерозкладних зображень вигляду (1) з точністю до $*$-еквівалентності групи G над кільцем K.

Теорема 3. *Нехай* $G = \langle a \rangle$ *– циклічна* p*-група порядку* $|G|$, K *– комутативне локальне кільце головних ідеалів характеристики* p, *радикал якого* $R = tK$, t *– нільпотентний елемент степеня* $\ell > 1$, E *– одинична матриця порядку* n *і* $s_i \in N \bigcup \{0\}$, $s_{i+nk} = s_i$, $k = 1, 2, \ldots$, ε_i, $i = 1, \ldots, n$ *– елементи із* K^*. *Число нерозкладних зображень з точністю до* $*$*-еквівалентності групи* G *над кільцем* K *вигляду*

$$\Gamma_{\bar{w},\bar{\varepsilon}} : a \to \Gamma_{\bar{w},\bar{\varepsilon}}(a) = E + M(\bar{w}, \bar{\varepsilon}) = E + M(\varepsilon_1 t^{s_1}, \ldots, \varepsilon_n t^{s_n})$$

рівне числу з точністю до циклічної еквівалентності неперіодичних послідовностей $\bar{w} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$, $\sum_{j=0}^{|G|-1} s_{i+j} \geq \ell$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Автор щиро вдячний професору В. М. Бондаренку за увагу до роботи і цінні поради.

1. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцом классов вычетов // Мат. сборник, – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 275–277.
2. *Бондаренко В. М., Бортош М. Ю.* Нерозкладні та ізоморфні об'єкти в категорії мономіальних матриць над локальним кільцем // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 7. – С. 889–904.
   Те саме: *Bondarenko V. M., Bortosh M. Yu.* Indecomposable and isomorphic objects in the category of monomial matrices over a local ring// Ukr. Math. J. – 2017. – **69**, No. 7. – P. 1034–1050. – https://doi.org/10.1007/s11253-017-1413-8.
3. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
   Те саме: *Bondarenko V. M., Drozd Yu. A.* Representation type of finite groups // J. Soviet Math. – 1982. – **20**, No. 6. – P. 2515–2528.
   https://doi.org/10.1007/BF01681468.
4. *Гудивок П. М.* О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп // Докл. АН СССР. – 1974. – **214**, № 5. – С. 993–996.
5. *Гудивок П. М.* Про обмеженість степенів нерозкладних модулярних зображень скінченних груп над кільцями головних ідеалів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 8. – С. 683–685.
6. *Гудивок П. М., Дроботенко В. С., Лихтман А. И.* О представлениях конечных групп над кольцом классов вычетов по модулю m // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 1. – С. 82–89.
7. *Гудивок П. М., Погориляк В. И.* О неразложимых представлениях конечных p-групп над коммутативными локальными кольцами // Доп. НАН України. – 1996. – № 5. – С. 7–11.
8. *Гудивок П. М., Тилищак О. А.* Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1998. – Вип. 3. – С. 78–83.
9. *Гудивок П. М., Чухрай І. Б.* Про число нерозкладних матричних зображень даного степеня скінченної p-групи над комутативними локальними кільцями характеристики p^s // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2000. – Вип. 5. – С. 33–40.
10. *Гудивок П. М., Шапочка І. В.* О черниковских p-группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 3. – С. 291–304.
    Те саме: *Gudivok P. M., Shapochka I. V.* On Chernikov p-groups // Ukr. Math. J. – 1999. – **51**, No. 3. – P. 329–342. – https://doi.org/10.1007/BF02592471.

11. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104–114.
12. *Петричкович В. М.* Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. – 312 с.
13. *Тилищак О. А.* Про число нерозкладних модулярних зображеннь циклічної p-групи над скінченним локальним кільцем // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2018. – Вип. 16. – С. 19–29.
14. *Щедрик В. П.* Факторизація матриць над кільцями елементарних дільників. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – 304 с.
15. *Gudivok P. M., Chukhraj I. B.* On the number of nonequivalent indecomposable matrix representations of the given degree of a finite p-group over commutative local ring of characteristic p^s // An. St. Univ. Ovidius Constanta. Ser. Mat. – 2000. – **8**, No. 2. – P. 27–36.
16. *Higman D. G.* Indecomposable representations at characteristic p // Duke Math. J. – 1954. – **21**. – P. 377–381. – https://doi.org/10.1215/s0012-7094-54-02138-9.
17. *Zariski O., Samuel P.* Commutative algebra. – Vol. 1. – Montreal: D. Van Nostrand Company, Canada, 1965. – 329 p.

О ЧИСЛЕ НЕРАЗЛОЖИМЫХ МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ p-ГРУППЫ НАД ЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Построена серия неразложимых модулярных представлений циклической p-группы $\langle a\rangle$ над коммутативным локальным нецелостным кольцом главных идеалов характеристики p вида $a \to E+M$, где E – единичная матрица, M – мономиальная матрица. Установлены критерий эквивалентности таких представлений, а также число неэквивалентных неразложимых представлений заданного вида фиксированной степени для введенного отношения $*$-эквивалентности

Ключевые слова: *модулярне представление, неразложимое представление, $*$-эквивалентность, мономиальная матрица.*

ON NUMBER OF INDECOMPOSABLE MODULAR REPRESENTATIONS OF CYCLIC p-GROUP OVER LOCAL RING OF FINITE LENGTH

The series of indecomposable modular representations of cyclic p-group $\langle a\rangle$ over commutative local non-integral principle ideal ring of characteristic p is constructed in the form $a \to E+M$, where E is an identity matrix, M is a monomial matrix. The criterion of equivalence of these representations is established as well as the number of non-equivalent indecomposable representations in a given form of a fixed degree to introduced relation of $*$-equivalence is calculated.

Key words: *modular representation, indecomposable representation, $*$-equivalence, monomial matrix.*

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ,
Ужгород. нац. ун-т, Ужгород

Одержано
01.05.18