УДК 517.937

С. А. Щоголев*, В. В. Джашитова

# ПРО РОЗВ'ЯЗКИ КОЛИВНОГО ТИПУ ЗЛІЧЕННОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У РЕЗОНАНСНОМУ ВИПАДКУ

*Для зліченної квазілінійної системи диференціальних рівнянь з діагональною матрицею коефіцієнтів лінійної частини отримано умови існування часткового розв'язку, зображуваного у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою в резонансному випадку.*

***Ключові слова:*** *зліченні системи диференціальних рівнянь, ряди Фур'є, повільно змінні коефіцієнти.*

**Вступ.** Зліченні системи диференціальних рівнянь [2, 7, 13] викликають постійний інтерес математиків. Серед публікацій, що вийшли за останні часи, відмітимо [6, 12]. Стаття продовжує дослідження авторів, розпочаті в [8, 10, 11], щодо існування та властивостей розв'язків зліченних систем, зображуваних абсолютно та рівномірно збіжними рядами Фур'є із повільно змінними коефіцієнтами та частотами.

**1. Основні позначення та означення.** Нехай

$$G(\varepsilon_0) = \{t,\ \varepsilon : t \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}.$$

***Означення 1.*** Говоримо, що функція $p(t,\varepsilon)$ належить до класу $S(m;\varepsilon_0)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, якщо виконуються такі умови:

*1*) $p : G(\varepsilon_0) \to \mathbb{C}$;

*2*) $p(t,\varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ за $t$;

*3*) $\dfrac{d^k p(t,\varepsilon)}{dt^k} = \varepsilon^k p_k^*(t,\varepsilon), \qquad 0 \le k \le m$,

причому $\|p\|_{S(m;\varepsilon_0)} \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=0}^{m} \sup\limits_{G(\varepsilon_0)} \left|p_k^*(t,\varepsilon)\right| < +\infty$.

***Означення 2.*** Говоримо, що функція $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ належить до класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, якщо ця функція зображається у вигляді

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) e^{in\theta(t,\varepsilon)}$$

і виконуються такі умови:

*1*) $f_n(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0), \quad n \in \mathbb{Z}$;

*2*) $\|f\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty$;

*3*) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \quad \varphi \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi \in S(m;\varepsilon_0), \quad \inf\limits_{G(\varepsilon_0)} \varphi(\tau,\varepsilon) = \varphi_0 > 0$.

Множина функцій класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ утворює лінійний простір, який перетворюється на повний нормований простір введенням норми $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Справджується такий ланцюжок включень:

$$F(0;\varepsilon_0;\theta) \supset F(1;\varepsilon_0;\theta) \supset \ldots \supset F(m;\varepsilon_0;\theta).$$

* sergas1959@gmail.com

Нехай задано дві функції з класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$:

$$u(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t,\varepsilon)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$v(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(t,\varepsilon)e^{in\theta(t,\varepsilon)}.$$

Добуток цих функцій означимо формулою [1]

$$(uv)(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{n-s}(t,\varepsilon)v_s(t,\varepsilon)\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)}. \qquad (1)$$

Очевидно, що $uv \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Сформулюємо деякі властивості норми $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Нехай $u, v \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ і $k = \mathrm{const}$. Тоді

***1°***) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = |k|\cdot\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;

***2°***) $\|u+v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} + \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;

***3°***) $\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \sum\limits_{k=0}^{m}\left\|\dfrac{1}{\varepsilon^k}\cdot\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}$;

***4°***) $\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le 2^m\,\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Дійсно, при $m = 0$ згідно з формулою (1) маємо

$$\|uv\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \le \|u\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Далі, на підставі властивостей ***1°–3°*** отримуємо

$$\begin{aligned}
\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} &= \sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{\partial^k(uv)}{\partial t^k}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \le \\
&\le \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^k}\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\left\|\frac{\partial^{k-j} v}{\partial t^{k-j}}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \le \\
&\le 2^m\left[\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^j}\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^j}\left\|\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\right] = \\
&= 2^m\,\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.
\end{aligned}$$

Зокрема, якщо $u \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, то $\forall k \in \mathbb{N}$ виконується $u^k \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, причому

$$\left\|u^k\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le 2^{m(k-1)}\,\|u\|^k_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

На підставі властивості ***4°*** можна стверджувати, що простір $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ утворює банахову алгебру [3].

***Означення 3.*** Говоримо, що нескінченновимірний вектор $x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon),\ldots)$ належить до класу $S_1(m;\varepsilon_0)$, якщо $x_j \in S(m;\varepsilon_0)$, $j = 1,2,\ldots$, причому

$$\|x\|_{S_1(m;\varepsilon_0)} \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_j \left\|x_j\right\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty.$$

***Означення 4.*** Говоримо, що нескінченна матриця $A(t,\varepsilon) = (a_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}$ належить до класу $S_2(m;\varepsilon_0)$, якщо $a_{jk} \in S(m;\varepsilon_0)$, причому

$$\|A\|_{S_2(m;\varepsilon_0)} \overset{\text{def}}{=} \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{jk}\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty .$$

***Означення 5.*** Говоримо, що нескінченновимірний вектор $x(t,\varepsilon,\theta) = \mathrm{col}(x_1(t,\varepsilon,\theta), x_2(t,\varepsilon,\theta),\ldots)$ належить до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, якщо $x_j \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, причому

$$\|x\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)} \overset{\text{def}}{=} \sup_j \|x_j\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} < +\infty .$$

***Означення 6.*** Говоримо, що нескінченна матриця $A(t,\varepsilon,\theta) = (a_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=1,2,\ldots}$ належить до класу $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, якщо $a_{jk} \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, причому

$$\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \overset{\text{def}}{=} \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{jk}\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} < +\infty .$$

Очевидно, що, якщо $A \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $x \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, то $Ax \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, при цьому $\|Ax\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)} \le 2^m \|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \|x\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Для нескінченної матриці $A$ означимо [4] лівосторонню обернену матрицю $A^{-1}$ рівністю $A^{-1} \cdot A = E$ і правосторонню обернену матрицю ${}^{-1}A$ рівністю $A \cdot {}^{-1}A = E$, де $E = \mathrm{diag}[1,1,\ldots]$. Умова $\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} < 1$ забезпечує існування матриці

$$(E + A)^{-1} = {}^{-1}(E + A) = E + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A^k .$$

Позначимо через $(A)_{jk}$ елемент $a_{jk}$ нескінченної матриці $A = (a_{jk})_{j,k=1,2,\ldots}$.

**2. Постановка задачі.** Розглядається зліченна система диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = i\varphi(t,\varepsilon)\Lambda x + f(t,\varepsilon,\theta) + \mu X(t,\varepsilon,\theta,x,\mu), \tag{2}$$

де $t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$, $\varphi(t,\varepsilon)$ − функція, що фігурує в означенні класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $x = \mathrm{col}(x_1, x_2,\ldots) \in D \subset \ell_1$ ($\ell_1$ − простір обмежених числових послідовностей), $f = \mathrm{col}(f_1, f_2,\ldots) \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, $\Lambda = \mathrm{diag}[r_1, r_2,\ldots]$, $r_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1,2,\ldots$, нескінченновимірна вектор-функція $X = \mathrm{col}(X_1, X_2,\ldots)$ належить до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$ відносно $t,\varepsilon,\theta$ та неперервна за $x \in D$ і $\mu \in (0,\mu_0) \subset \mathbb{R}^+$.

Метою статті є встановлення умов, за яких система (2) має частковий розв'язок $x(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F(m_1;\varepsilon_1;\theta)$, $0 \le m_1 \le m$, $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$. З огляду на вигляд лінійної частини системи (2) можемо сказати, що маємо справу з резонансним випадком. Випадок відсутності резонансу було досліджено в [11].

**3. Допоміжні результати.**

**Лема 1.** *Нехай задано зліченну систему диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx}{dt} = \left( \sum_{\ell=1}^{q} B_\ell(t,\varepsilon,\theta)\mu^\ell \right) x , \tag{3}$$

*де* $x = \mathrm{col}(x_1, x_2,\ldots)$, $B_\ell(t,\varepsilon,\theta) \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $\ell = 1,\ldots,q$, $\mu \in (0,\mu_0) \subset \mathbb{R}^+$. *Тоді існує* $\mu_1 \in (0,\mu_0)$ *таке, що* $\forall \mu \in (0,\mu_1)$ *існує перетворення*

$$x = \Phi(t,\varepsilon,\theta,\mu)y ,$$

*де* $\Phi(t,\varepsilon,\theta,\mu)\in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$ *, таке, що зводить систему* (3) *до вигляду*

$$\frac{dy}{dt}=\left(\sum_{\ell=1}^{q}U_\ell(t,\varepsilon)\mu^\ell+\varepsilon\sum_{\ell=1}^{q}V_\ell(t,\varepsilon,\theta)\mu^\ell+\mu^{q+1}W(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right)y\,,$$

*де* $U_\ell(t,\varepsilon)\in S_2(m;\varepsilon_0)$ , $V_\ell,W\in F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ , $\ell=1,\ldots q$ .

Д о в е д е н н я леми 1 наведено в праці [8].

Введемо вектор-функції

$$g(t,\varepsilon,\theta)=\exp(-i\theta\Lambda)f(t,\varepsilon,\theta)\,, \tag{4}$$

$$Y(t,\varepsilon,\theta,y,\mu)=\exp(-i\theta\Lambda)X(t,\varepsilon,\theta,\exp(i\theta\Lambda)y,\mu)\,, \tag{5}$$

де $\exp(i\theta\Lambda)=\mathrm{diag}\,[e^{i\theta r_1},e^{i\theta r_2},\ldots]$ , $\exp(-i\theta\Lambda)=\mathrm{diag}\,[e^{-i\theta r_1},e^{-i\theta r_2},\ldots]$ ,

$$\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)=M^{(0)}(t,\varepsilon)+\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)\,. \tag{6}$$

У формулі (6)

$$\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[g(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi}\exp(in\theta)\,,$$

де

$$\Gamma_n[g(t,\varepsilon,\theta)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)\,d\theta\,,$$

а вектор-функція $M^{(0)}(t,\varepsilon)$ визначається з рівняння

$$R(t,\varepsilon,M)=0\,, \tag{7}$$

де

$$R(t,\varepsilon,M)=\int_0^{2\pi}Y\big(t,\varepsilon,\theta,M(t,\varepsilon)+\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta),0\big)\,d\theta\,.$$

**Лема 2.** *Нехай система* (2) *задовольняє такі умови:*

(***i***) *функції* $X_j$ , $j=1,2,\ldots$ , *мають в* $D\times(0,\mu_0)$ *неперервні частинні похідні за* $x_1,x_2,\ldots,\mu$ *до порядку* $2q+1$ , $q\in\mathbb{N}$ , *включно, і, якщо* $x_1,x_2,\ldots\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ *, то ці частинні похідні також належать до класу* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ *, причому*

$$\max_j\sup_{\substack{\|x_k\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\le\rho\\ \mu\in(0,\mu_0)}}\left\|\frac{\partial^{2q+1}X_j(t,\varepsilon,\theta,x_1,x_2,\ldots,\mu)}{\partial x_{k_1}^{q_1}\partial x_{k_2}^{q_2}\cdots\partial x_{k_s}^{q_s}\partial\mu^{q_{s+1}}}\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}<+\infty\,,$$

$$q_1+q_2+\ldots+q_s+q_{s+1}=2q+1,\qquad k_1,k_2,\ldots,k_s\in\mathbb{N}\,;$$

(***ii***) *вектор-функція* $g(t,\varepsilon,\theta)$ *така, що*

$$\int_0^{2\pi}g(t,\varepsilon,\theta)d\theta=\mathbf{0}\,,$$

*де* $\mathbf{0}=\mathrm{col}\,(0,0,\ldots)$ ;

(***iii***) *рівняння* (7) *має розв'язок* $M=M^{(0)}(t,\varepsilon)\in S_1(m;\varepsilon_0)$ *такий, що* $\forall\, t,\varepsilon\in G(\varepsilon_0)$ *існує матриця*

$$\left(\frac{\partial R(t,\varepsilon,M^{(0)}(t,\varepsilon))}{\partial M}\right)^{-1}=(r_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}\,,$$

*причому* $r_{jk}(t,\varepsilon)\in S(m;\varepsilon_0)$ *і* $\max_{j,k}\left\|r_{jk}(t,\varepsilon)\right\|_{S(m;\varepsilon_0)}<+\infty$ .

*Тоді існує параметр* $\mu_2 \in (0, \mu_0)$ *такий, що* $\forall\, \mu \in (0, \mu_2)$ *існує перетворення*

$$x = \xi(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu) z, \qquad \xi(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F_1(m; \varepsilon_0; \theta),$$

$$\Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta),$$

*таке, що зводить систему* (2) *до вигляду*

$$\frac{dz}{dt} = \left( \sum_{\ell=1}^{q} K_\ell(t, \varepsilon) \mu^\ell \right) z + \varepsilon h(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \mu^{2q} r(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \varepsilon C(t, \varepsilon, \theta, \mu) z +$$

$$+ \mu^{q+1} P(t, \varepsilon, \theta, \mu) z + \mu Z(t, \varepsilon, \theta, z, \mu), \qquad (8)$$

*де* $K_\ell(t, \varepsilon) \in S_2(m; \varepsilon_0)$, $h, r \in F_1(m-1; \varepsilon_0; \theta)$, $C, P \in F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)$. *Вектор-функція* $Z$ *належить до класу* $F_1(m; \varepsilon_0; \theta)$ *відносно* $t$, $\varepsilon$, $\theta$ *і містить доданки, не нижче 2-го порядку відносно компонент вектора* $z$.

Д о в е д е н н я. Здійснивши в системі (2) підстановку

$$x = \exp(i\theta(t, \varepsilon)\Lambda) y,$$

де $y$ − новий невідомий вектор, отримаємо

$$\frac{dy}{dt} = g(t, \varepsilon, \theta) + \mu Y(t, \varepsilon, \theta, y, \mu). \qquad (9)$$

Тут вектор-функції $g$ та $Y$ визначено рівностями (4), (5). Поряд із системою (9) розглянемо допоміжну систему

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi}{d\theta} = g(t, \varepsilon, \theta) + \mu Y(t, \varepsilon, \theta, \xi, \mu), \qquad (10)$$

у якій $t$ та $\varphi$ вважаємо сталими. Коефіцієнти цієї системи є $2\pi$-періодичними функціями від змінної $\theta$. Згідно з методом малого параметра Пуанкаре [5] запишемо наближений $2\pi$-періодичний за $\theta$ розв'язок системи (10):

$$\tilde{\xi}(t, \varepsilon, \theta, \mu) = \sum_{k=0}^{2q-1} \xi^{(k)}(t, \varepsilon, \theta) \mu^k,$$

де коефіцієнти $\xi^{(k)}$ визначаються з ланцюжка векторних рівнянь:

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi^{(0)}}{d\theta} = g(t, \varepsilon, \theta), \qquad (11)$$

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi^{(1)}}{d\theta} = Y(t, \varepsilon, \theta, \xi^{(0)}, 0), \qquad (12)$$

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi^{(2)}}{d\theta} = \frac{\partial Y(t, \varepsilon, \theta, \xi^{(0)}, 0)}{\partial \xi} \xi^{(1)} + \frac{\partial Y(t, \varepsilon, \theta, \xi^{(0)}, 0)}{\partial \mu}, \qquad (13)$$

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi^{(s)}}{d\theta} = \frac{\partial Y(t, \varepsilon, \theta, \xi^{(0)}, 0)}{\partial \xi} \xi^{(s-1)} + \tilde{F}(t, \varepsilon, \theta, \xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(s-2)}),$$

$$s = 3, \ldots, 2q-1. \qquad (14)$$

Тут

$$\frac{\partial Y(t, \varepsilon, \theta, \xi^{(0)}, 0)}{\partial \xi} = \left( \frac{\partial Y_j(t, \varepsilon, \theta, \xi^{(0)}, 0)}{\partial \xi_k} \right)_{j,k=1,2,\ldots},$$

$$\frac{\partial Y(t, \varepsilon, \theta, \xi^{(0)}, 0)}{\partial \mu} = \mathrm{col}\left( \frac{\partial Y_1(t, \varepsilon, \theta, \xi^{(0)}, 0)}{\partial \mu}, \frac{\partial Y_2(t, \varepsilon, \theta, \xi^{(0)}, 0)}{\partial \mu}, \ldots \right).$$

Компоненти вектор-функцій $\tilde{F}(t,\varepsilon,\theta,\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(s-2)})$ є многочленами відносно компонент векторів $\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(s-2)}$, причому коефіцієнти цих многочленів є функціями з класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Розглянемо породжуюче векторне рівняння (11). Внаслідок умови (***ii***) леми це рівняння має $2\pi$-періодичний за змінною $\theta$ розв'язок $\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)$, який визначається формулою (6). Внаслідок умови (***iii***) леми цей розв'язок належить до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$. Рівність (7) забезпечує існування $2\pi$-періодичного за $\theta$ розв'язку рівняння (12):

$$\xi^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) = M^{(1)}(t,\varepsilon) + \eta^{(1)}(t,\varepsilon,\theta).$$

Тут $\eta^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, а вектор-функція $M^{(1)}(t,\varepsilon)$ визначається з рівняння

$$\frac{\partial R(t,\varepsilon,M^{(0)}(t,\varepsilon))}{\partial M} M^{(1)} = A^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{15}$$

де

$$A^{(1)}(t,\varepsilon) = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial Y(t,\varepsilon,\theta,\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta),0)}{\partial \xi} \eta^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\, d\theta - $$
$$- \int_0^{2\pi} \frac{\partial Y(t,\varepsilon,\theta,\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta),0)}{\partial \mu}\, d\theta.$$

Умова (***i***) леми та рівність (5) забезпечують належність вектор-функції $A^{(1)}(t,\varepsilon)$ до класу $S_1(m;\varepsilon_0)$. Умова (***iii***) леми забезпечує існування розв'язку

$$M^{(1)}(t,\varepsilon) = \left(\frac{\partial R(t,\varepsilon,M^{(0)}(t,\varepsilon))}{\partial M}\right)^{-1} A^{(1)}(t,\varepsilon)$$

рівняння (15) і належність цього розв'язку до класу $S_1(m;\varepsilon_0)$, а отже, належність вектор-функції $\xi^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$ до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$. Розглядаючи далі рівняння (13), (14), переконуємось, що умови (***i***), (***iii***) леми забезпечують для кожного з них існування $2\pi$-періодичного за $\theta$ розв'язку, і всі ці розв'язки належатимуть до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$. Таким чином, вектор-функція $\tilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ також належить до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$.

У системі (9) здійснимо підстановку

$$y = \tilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + y^{(1)},$$

де $y^{(1)}$ – новий невідомий вектор, відносно якого одержимо рівняння

$$\frac{dy^{(1)}}{dt} = \varepsilon h^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q} c^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \left(\sum_{\ell=1}^{q} D_\ell(t,\varepsilon,\theta)\mu^\ell\right) y^{(1)} +$$
$$+ \mu^{q+1} Q(t,\varepsilon,\theta,\mu) y^{(1)} + \mu Y^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,y^{(1)},\mu). \tag{16}$$

Тут $h^{(1)} \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $c^{(1)} \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, $D_\ell, Q \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, вектор-функція $Y^{(1)}$ належить до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$ відносно $t$, $\varepsilon$, $\theta$ і містить доданки, не нижче 2-го порядку відносно компонент вектора $y^{(1)}$.

Тепер на підставі леми 1 за допомогою підстановки

$$y^{(1)} = \Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu) z,$$

де $\Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, зводимо систему (16) до вигляду (8).

Лему 2 доведено. ♦

Розглянемо зліченну лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = A(t, \varepsilon) x^{(0)}, \tag{17}$$

де $A(t, \varepsilon) \in S_2(m; \varepsilon_0)$.

***Означення 7.*** Матрицею Ґріна системи (17) назвемо нескінченну матрицю $G(t, \tau, \varepsilon) = (g_{jk}(t, \tau, \varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}$, що задовольняє умови

***1***) при $t \neq \tau$:

$$\frac{\partial G(t, \tau, \varepsilon)}{\partial t} = A(t, \varepsilon) G(t, \tau, \varepsilon), \quad \frac{\partial G(t, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = -G(t, \tau, \varepsilon) A(\tau, \varepsilon);$$

***2***) $G(\tau + 0, \tau, \varepsilon) - G(\tau - 0, \tau, \varepsilon) = E, \quad G(t, t + 0, \varepsilon) - G(t, t - 0, \varepsilon) = -E$.

Матриця $G(t, \tau, \varepsilon)$ як функція від $t$ визначена всюди, за винятком $t = \tau$.

Поряд з системою (17) розглянемо зліченну лінійну неоднорідну систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon) + f(t, \varepsilon, \theta), \tag{18}$$

де $f(t, \varepsilon, \theta) \in F_1(m; \varepsilon_0; \theta)$, а матриця $A(t, \varepsilon)$ та сама, що й у системі (17).

**Лема 3.** *Нехай система* (17) *має матрицю Ґріна* $G(t, \tau, \varepsilon) = (g_{jk}(t, \tau, \varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}$ *таку, що*

$$|g_{jk}(t, \tau, \varepsilon)| \leq M_0 \exp(-\gamma_0 |t - \tau|),$$

*де* $M_0, \gamma_0 \in (0, +\infty)$, *причому* $M_0$ *і* $\gamma_0$ *не залежать від* $t$, $\tau$, $\varepsilon$. *Тоді система* (18) *має єдиний частковий розв'язок* $x(t, \varepsilon, \theta) \in F_1(m; \varepsilon_0; \theta)$, *причому існує* $\mathcal{K}_0 \in (0, +\infty)$ *таке, що*

$$\|x(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_1(m; \varepsilon_0; \theta)} \leq \frac{\mathcal{K}_0}{\gamma_0} \|f(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_1(m; \varepsilon_0; \theta)}.$$

Твердження леми 3 є безпосереднім наслідком праці [9].

**4. Основний результат.**

**Теорема 1.** *Нехай система* (2) *така, що*

(***i***) *виконуються умови леми* 2;

(***ii***) *для лінійної однорідної системи*

$$\frac{dz^{(0)}}{dt} = \left( \sum_{\ell=1}^{q} K_\ell(t, \varepsilon) \mu^\ell \right) z^{(0)} \tag{19}$$

(*матриці* $K_\ell(t, \varepsilon)$ *визначено в лемі* 2)

*існує матриця Ґріна* $G(t, \tau, \varepsilon, \mu) = (g_{jk}(t, \tau, \varepsilon, \mu))_{j,k=1,2,\ldots}$ *така, що*

$$|g_{jk}(t, \tau, \varepsilon, \mu)| \leq M_1 \exp(-\gamma_1 \mu^{q_0} |t - \tau|),$$

$q_0 \in [1, q]$, $M_1, \gamma_1 \in (0, +\infty)$ *і не залежать від* $t$, $\tau$, $\varepsilon$, $\mu$.

*Тоді існують* $\mu_3 \in (0, \mu_0)$, $\varepsilon_1(\mu) \in (0, \varepsilon_0)$ *такі, що* $\forall \mu \in (0, \mu_3)$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1(\mu))$ *система* (2) *має частковий розв'язок з класу* $F_1(m - 1; \varepsilon_1(\mu); \theta)$.

Д о в е д е н н я. На підставі леми 2 зведемо систему (2) до системи (8). Здійснивши у системі (8) підстановку

$$z = \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0}} z^{(1)}, \tag{20}$$

де $z^{(1)}$ – новий невідомий вектор, отримаємо

$$\frac{dz^{(1)}}{dt} = \left( \sum_{\ell=1}^{q} K_\ell(t,\varepsilon)\mu^\ell \right) z^{(1)} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} h(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+ \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} r(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon C(t,\varepsilon,\theta,\mu) z^{(1)} +$$

$$+ \mu^{q+1} P(t,\varepsilon,\theta,\mu) z^{(1)} + \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}} Z^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,z^{(1)},\mu). \tag{21}$$

Вигляд коефіцієнта при $Z^{(1)}$ обумовлений тим, що нелінійність $Z$ у системі (8) містить доданки, не нижче 2-го порядку відносно компонент вектора $z$.

Розглянемо відповідну лінійну неоднорідну систему:

$$\frac{dz^{(1,0)}}{dt} = \left( \sum_{\ell=1}^{q} K_\ell(t,\varepsilon)\mu^\ell \right) z^{(1,0)} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} h(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} r(t,\varepsilon,\theta,\mu). \tag{22}$$

На підставі леми 3 з огляду на умову (***ii***) теореми можемо стверджувати, що система (22) має єдиний частковий розв'язок $z^{(1,0)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, причому існує $\mathcal{K} \in (0,+\infty)$ таке, що

$$\left\| z^{(1,0)} \right\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \le \frac{\mathcal{K}}{\gamma_1 \mu^{q_0}} \left( \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} \|h\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} \|r\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \right) <$$

$$< \frac{\mathcal{K}}{\gamma_1} \left( \|h\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + \|r\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \right).$$

Розв'язок з класу $F_1(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$ системи (21) шукатимемо методом послідовних наближень, за початкове наближення вибираючи $z^{(1,0)}$, а подальші наближення визначаючи як розв'язки з класу $F_1(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$ злічених лінійних неоднорідних систем:

$$\frac{dz^{(1,s+1)}}{dt} = \left( \sum_{\ell=1}^{q} K_\ell(t,\varepsilon)\mu^\ell \right) z^{(1,s+1)} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} h(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+ \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} r(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon C(t,\varepsilon,\theta,\mu) z^{(1,s)} + \mu^{q+1} P(t,\varepsilon,\theta,\mu) z^{(1,s)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}} Z^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,z^{(1,s)},\mu). \tag{23}$$

Позначимо

$$\Omega = \left\{ z^{(1)} \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta) : \left\| z^{(1)} - z^{(10)} \right\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \le d \right\}.$$

З огляду на властивості нелінійності $Z^{(1)}$ існує $\mathcal{L}(d) \in (0,+\infty)$ таке, що $\forall z^{(1)}, y^{(1)} \in \Omega$ виконується нерівність

$$\left\| Z^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,z^{(1)},\mu) - Z^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,y^{(1)},\mu) \right\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \le$$

$$\le \mathcal{L}(d) \left\| z^{(1)} - y^{(1)} \right\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Використовуючи відому методику принципу стискуючих відображень [3], нескладно показати, що існують $\mu^* \in (0,\mu_0)$, $\mathcal{N}_1 \in (0,+\infty)$ такі, що $\forall \mu \in (0,\mu^*)$, $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon^*(\mu))$, де $\varepsilon^*(\mu) = \mathcal{N}_1 \mu^{2q_0-1}$, процес (23) збігається до розв'язку $z^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_1(m-1;\varepsilon^*(\mu);\theta)$.

Враховуючи рівність (20), одержуємо твердження теореми.

Теорему доведено. ♦

**5. *Приклад.*** Як приклад використання доведеної теореми дослідимо існування розв'язків з класу $F_1(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$ системи

$$\frac{dx_j}{dt} = -i\sqrt{2}\varphi(t,\varepsilon)\sin\theta + \mu x_j^2 + \mu^2 x_{j+1}^2, \qquad j = 1,2,\ldots, \tag{24}$$

де $\varphi(t,\varepsilon)$ − функція, що фігурує в означенні класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Покладемо у (19) $q=1$.

Перевіримо спочатку виконання умов леми 2. Тоді

$$X_j = x_j^2 + \mu x_{j+1}^2, \qquad j = 1,2,\ldots,$$

звідки бачимо, що умову (***i***) леми 2 виконано. Далі, оскільки $\Lambda = \mathrm{diag}\,[0,0,\ldots]$, то

$$Y_j = X_j, \qquad g(t,\varepsilon,\theta) = \mathrm{col}\,(g_1(t,\varepsilon,\theta), g_2(t,\varepsilon,\theta),\ldots),$$

$$g_j(t,\varepsilon,\theta) = -i\sqrt{2}\varphi(t,\varepsilon)\sin\theta, \qquad j = 1,2,\ldots,$$

і, таким чином, умову (***ii***) леми 2 також виконано.

Знайдемо

$$\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) = \mathrm{col}\,(\eta_1^{(0)}(t,\varepsilon,\theta), \eta_2^{(0)}(t,\varepsilon,\theta),\ldots),$$

де

$$\eta_j^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) = i\sqrt{2}\cos\theta, \qquad j = 1,2,\ldots;$$

$$Y_j(t,\varepsilon,\theta,M_1^{(0)}+\eta_1^{(0)}, M_2^{(0)}+\eta_2^{(0)},\ldots,0) =$$

$$= (M_j^{(0)}+\eta_j^{(0)})^2 = (M_j^{(0)} + i\sqrt{2}\cos\theta)^2 =$$

$$= (M_j^{(0)})^2 + 2M_j^{(0)} i\sqrt{2}\cos\theta - \cos 2\theta - 1, \qquad j = 1,2,\ldots,$$

звідки

$$R(t,\varepsilon,M) = \mathrm{diag}\,[M_1^2-1, M_2^2-1,\ldots,M_s^2-1,\ldots].$$

Таким чином, рівняння (7) набуває вигляду

$$M_j^2 - 1 = 0, \qquad j = 1,2,\ldots,$$

звідки випливає, що можна покласти $M_j^{(0)} = 1$, $j = 1,2,\ldots$, і тоді

$$\xi_j^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) = 1 + i\sqrt{2}\cos\theta, \qquad j = 1,2,\ldots.$$

Далі,

$$\left(\frac{\partial R(t,\varepsilon,M^{(0)})}{\partial M}\right) = \mathrm{diag}\,[2M_1^{(0)}, 2M_2^{(0)},\ldots] = \mathrm{diag}\,[2,2,\ldots],$$

отже,

$$\left( \frac{\partial R(t, \varepsilon, M^{(0)})}{\partial M} \right)^{-1} = \mathrm{diag}\,[1/2, 1/2, \ldots]$$

і, таким чином, умову (***iii***) леми 2 також виконано.

Обчислимо тепер матрицю $K_1(t, \varepsilon)$:

$$K_1(t, \varepsilon) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial Y(t, \varepsilon, M^{(0)}(t, \varepsilon) + \eta^{(0)}(t, \varepsilon, \theta), 0)}{\partial y} \, d\theta =$$

$$= \frac{\partial R(t, \varepsilon, M^{(0)})}{\partial M} = \mathrm{diag}\,[2, 2, \ldots].$$

Матриця Ґріна системи

$$\frac{dz^{(0)}}{dt} = \mu K_1(t, \varepsilon) z^{(0)}$$

має вигляд

$$G(t, \tau, \varepsilon, \mu) = g(t, \tau, \varepsilon, \mu) \cdot \mathrm{diag}\,[1, 1, \ldots],$$

де

$$g(t, \tau, \varepsilon, \mu) = \begin{cases} 0, & t > \tau, \\ -\exp(2\mu(t - \tau)), & t < \tau, \end{cases}$$

і оскільки

$$|g(t, \tau, \varepsilon, \mu)| \le \exp(-2\mu |t - \tau|),$$

то умови теореми виконано з константами $q_0 = q = 1$, $M_1 = 1$, $\gamma_1 = 2$.

Отже, можемо стверджувати, що існують $\mu_4 \in (0, \mu_0)$, $\varepsilon_2(\mu) \in (0, \varepsilon_0)$ такі, що $\forall \mu \in (0, \mu_4)$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_2(\mu))$ система (24) має частковий розв'язок з класу $F_1(m - 1; \varepsilon_2(\mu); \theta)$.

**Висновок**. Таким чином, для системи вигляду (2) встановлено умови, за яких ця система має частковий розв'язок з класу $F_1(m - 1; \varepsilon_1(\mu); \theta)$, де $\varepsilon_1(\mu) \in (0, \varepsilon_0)$.


1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – Москва: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1974. – 415 с.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1976. – 543 с.
   Те саме: *Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of the theory of functions and functional analysis. – New York: Dover Publ. Inc., 1999. – 288 p.
4. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – Москва: Физматгиз, 1960. – 471 с.
5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
6. *Пилипенко А. Ю., Танцюра М. В.* Гранична теорема для зліченних систем стохастичних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 10. – С. 1380–1402.
   Те саме: *Pylypenko A. Yu., Tantsyura M. V.* Limit theorem for countable systems of stochastic differential equations // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, No. 10. – P. 1591–1619. – https://doi.org/10.1007/s11253-017-1314-x.
7. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счётные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
8. *Щёголев С. А., Джашитова В. В.* О сведении счётной линейной системы с коэффициентами осциллирующего типа к одному специальному виду в резонансном случае // Дослідження в математиці і механіці. – 2016. – **21**, вип. 1(27). – С. 85–91.

9. *Щёголев С. А., Ситник В. А.* О существовании и устойчивости решений специального вида квазилинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2010. – **15**, вип. 18. – С. 102–111.
10. *Щоголев С. А., Джашитова В. В.* Про розв'язки коливного типу зліченних диференціальних систем із повільно змінними параметрами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 2. – С. 86–93.
    Те саме: *Shchogolev S. A., Jashitova V. V.* On the solutions of oscillating-type countable differential systems with slowly varying parameters // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, No. 5. – P. 587–597. – DOI 10.1007/s10958-018-3836-7.
11. *Щоголев С. А., Джашитова В. В.* Про спеціальні класи роз'язків зліченної блочно-діагональної диференціальної системи // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2016. – Вип. 1(28). – С. 159–167.
12. *Almanassra M., Suwan I.* The explicit solution to the countable systems of linear ordinary differential equations with constant coefficients // Mathematica Æterna. – 2014. – **4**, No. 8. – P. 827–837.
13. *Miller R. K., Michel A. N.* Stability theory for countably infinite systems of differential equations // Tohoku Math. J. – 1980. – **32**. – P. 155–168.

**О РЕШЕНИЯХ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ТИПА СЧЁТНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ**

*Для счётной квазилинейной системы дифференциальных уравнений с диагональной матрицей коэффициентов линейной части получены условия существования частного решения, представимого в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой в резонансном случае.*

***Ключевые слова***: *счётные системы дифференциальных уравнений, ряды Фурье, медленно меняющиеся коэффициенты.*

**ON OSCILLATING-TYPE SOLUTIONS OF THE COUNTABLE SYSTEM OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS IN RESONANCE CASE**

*For the countable quasilinear system of the differential equations with diagonal matrix of the coefficients of the linear part, the conditions of the existence of the particular solution, representable as an absolutely and uniformly convergent Fourier series with slowly varying coefficients and frequency, are obtained in the resonance case.*

***Key words***: *the countable system of differential equations, Fourier series, slowly varying coefficients.*

Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, Одеса

Одержано
21.02.19