УДК 517.927.6 +517.984.52

Я. О. Баранецький[*], П. І. Каленюк

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З БАГАТОТОЧКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ КРАЙОВИХ УМОВ ТИПУ ШТУРМА ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

Досліджено спектральні властивості несамоспряженої задачі для оператора диференціювання порядку $2n$ *з нелокальними умовами, що є збуреннями сильно регулярних самоспряжених умов типу Штурма. Вивчено випадки задач з регулярними та нерегулярними за Біркгофом збуреннями крайових умов. Побудовано систему власних функцій багатоточкової задачі. Встановлено достатні умови, при яких ця система є повною і при деяких додаткових припущеннях утворює базис Ріcса.*

Ключові слова: *метод Фур'є, нелокальна задача, оператор перетворення, базис Ріcса.*

Вступ. У працях [5, 6] було запропоновано поняття суттєво несамоспряженого оператора (оператора, система кореневих функцій якого містить нескінченну кількість приєднаних функцій) і вивчено властивості таких операторів. Спектральні властивості крайових задач із сильно регулярними за Біркгофом умовами досліджувалися у статтях [8, 10, 23].

Властивості задач з регулярними, але не сильно регулярними за Біркгофом умовами досліджувалися у працях [1–3, 5–7, 24]. Задачі з нерегулярними за Біркгофом умовами вивчались у роботах [12, 13, 16, 20–22]. Нелокальні задачі з інтегральними умовами вивчались у статті [15]. Ця робота є продовженням досліджень [1, 5, 6, 17–19].

1. Основні позначення. Нехай

$$H_0 := L_2(0,1),$$

$$W_2^{2n}(0,1) := \{y \in H_0 : y^{(m)} \in C[0,1],\ y^{(2n)} \in H_0,\ m = 0,1,\dots,2n-1\},$$

$$(y,u;W_2^{2n}(0,1)) := \sum_{k=0}^{2n} (y^{(k)}, u^{(k)}; H_0),$$

$$\|y; W_2^{2n}(0,1)\|^2 := (y,y;W_2^{2n}(0,1)),$$

$W^*(0,1)$ – простір лінійних неперервних функціоналів над $W_2^{2n}(0,1)$; E – тотожне перетворення в просторі H_0; $I : H_0 \to H_0$ – оператор інволюції; $Iy(x) \equiv y(1-x)$; $p_j := \frac{1}{2}(E + (-1)^j I)$ – ортопроектори простору H_0; $H_{0,j} := \{y \in H_0 : y = p_j y\}$; $K_j \equiv \{e^{icx} + (-1)^j e^{ic(1-x)},\ c \in \mathbb{R}\}$, $j = 0,1$.

$[H_0]$ – алгебра лінійних обмежених операторів $A : H_0 \to H_0$.

Означення 1. Функцію із простору $H_{0,0}$ ($H_{0,1}$) будемо називати симетричною (антисиметричною) відповідно. Крайову умову будемо називати симетричною (антисиметричною), якщо до ядра відповідного функціонала належить довільна функція із K_1 (K_0). Наприклад, умова

$$y(0) + y(1) = 0$$

є симетричною. Аналогічно, антисиметричною є умова

[*] baryarom@ukr.net

$$y(0) - y(1) = 0\,.$$

Вивчається багатоточкова задача

$$L_0 y := (-1)^n y^{(2n)}(x) = f(x), \qquad x \in (0,1)\,, \tag{1}$$

$$\ell_j y := y^{(j-1)}(0) - (-1)^j\, y^{(j-1)}(1) + \sum_{s=0}^{r} \sum_{m=0}^{k_j} b_{j,m,s}\, y^{(m)}(x_s) = 0\,,$$

$$b_{j,m,s} \in \mathbb{R}, \quad s = 0,1,\ldots,r, \quad m = 0,1,\ldots,k_j, \qquad j = 1,\ldots,n\,, \tag{2}$$

$$\ell_{n+j} y := y^{(j-1)}(0) + (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \qquad j = 1,\ldots,n\,. \tag{3}$$

Означення 2. Функцію із простору $W_2^{2n}(0,1)$ будемо називати розв'язком задачі (1)–(3), якщо вона справджує крайові умови (2), (3) і рівняння (1) в сенсі рівності у просторі H_0.

Нехай L – оператор задачі (1)–(3):

$$Ly := (-1)^n y^{(2n)}(x), \qquad y \in D(L) \subset W_2^{2n}(0,1)\,,$$

$$D(L) := \left\{ y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_s y = 0,\ s = 1,\ldots,2n \right\}.$$

Нехай H – сепарабельний гільбертовий простір.

Означення 3. Систему елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називають замкнутою (повною) в просторі H, якщо лінійна оболонка цієї системи всюди щільна в H, тобто будь-який елемент простору H можна наблизити лінійною комбінацією елементів цієї системи з будь-якою точністю за нормою простору H.

Означення 4. Систему елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називають тотальною в H, якщо лише нульовий елемент простору H є ортогональним до всіх елементів цієї системи.

Означення 5. Систему елементів $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називають біортогональною в H до системи елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$, якщо $(g_m, e_k; H) = \delta_{k,m}$, $k, m \in \mathbb{N}$.

Означення 6. Систему елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називають базисом Рісса простору H, якщо разом з оберненим існує обмежений оператор $A : H \to H$ такий, що система $\{Ae_k\}_{k=1}^{\infty}$ є ортонормованим базисом в H.

Нехай виконуються такі припущення

– ***припущення*** $\boldsymbol{P_1}$**:**

$$b_{j,m,s} = -(-1)^m b_{r-j,m,s} \in \mathbb{R}, \qquad x_j = 1 - x_{r-j}, \qquad s = 0,1,\ldots,r\,,$$
$$m = 0,1,\ldots,k_j, \quad j = 1,\ldots,n\,;$$

– ***припущення*** $\boldsymbol{P_2}$**:**

$$k_j \le j - 1, \qquad j = 1,\ldots,n\,.$$

Основним результатом роботи є

Теорема 1. *Нехай справджується припущення* $\boldsymbol{P_1}$. *Тоді оператор* L *має додатний дискретний спектр і повну та мінімальну в просторі* H_0 *систему* $V(L)$ *власних функцій. Якщо виконуються припущення* $\boldsymbol{P_1}$ *і* $\boldsymbol{P_2}$, *тоді система* $V(L)$ *є базисом Рісса простору* H_0.

2. Крайові самоспряжені задачі. Розглянемо для рівняння (1) задачу з крайовими умовами

$$\ell_{0,j}y := y^{(j-1)}(0) - (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \qquad j = 1,\dots,n, \tag{4}$$

$$\ell_{0,n+j}y := y^{(j-1)}(0) + (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \qquad j = 1,\dots,n. \tag{5}$$

Нехай L_0 – оператор задачі (1), (4), (5):

$$L_0 y := (-1)^n y^{(2n)}(x), \qquad y \in D(L_0) \subset W_2^{2n}(0,1),$$

$$D(L_0) := \{y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_{0,s}y = 0,\ s = 1,\dots,2n\}.$$

Зауваження 1. Крайові умови (4), (5) вибрано так, що справджуються співвідношення

$$\ell_{0,j} \in W_0^*(0,1), \qquad \ell_{0,n+j} \in W_1^*(0,1), \qquad j = 1,\dots,n, \tag{6}$$

де $W_0^*(0,1)$ і $W_1^*(0,1)$ – відповідно сукупність симетричних та асиметричних функціоналів із $W^*(0,1)$.

Зауваження 2. Крайові умови (4), (5) еквівалентні самоспряженим умовам типу Штурма

$$y^{(j-1)}(0) = y^{(j-1)}(1) = 0, \qquad j = 1,\dots,n.$$

Тому умови (4), (5) є сильно регулярними за Біркгофом [11].

Отже, оператор L_0 породжується самоспряженим виразом $(-1)^n y^{(2n)}(x)$ і самоспряженими крайовими умовами (4), (5).

Тому правильною є

Лема 1. *Оператор* L_0 *є самоспряженим.*

Визначимо власні функції оператора L_0. Корені ρ_j, $j = 1,\dots,n$, характеристичного рівняння $(-1)^n \rho^{2n} = \lambda$, $|\arg\rho| \le \frac{1}{2n}\pi$, яке відповідає диференціальному рівнянню

$$(-1)^n y^{(2n)} - \lambda y = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

означимо співвідношеннями $\rho_j = \omega_j \rho$, де

$$\omega_1 = i, \qquad \omega_j = \omega_1 \exp i\frac{1}{n}\pi(j-1), \qquad j = 2,3,\dots,n.$$

Розглянемо фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (7):

$$y_j(x,\rho) := e^{\omega_j\rho x} + e^{\omega_j\rho(1-x)} \in H_{0,0}, \qquad j = 1,\dots,n, \tag{8}$$

$$y_{n+j}(x,\rho) := e^{\omega_j\rho x} - e^{\omega_j\rho(1-x)} \in H_{0,1}, \qquad j = 1,\dots,n. \tag{9}$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$y(x,\rho) = \sum_{q=1}^{2n} C_q y_q(x,\rho), \qquad C_q \in \mathbb{C}, \tag{10}$$

диференціального рівняння (7) у крайові умови (4), (5), отримаємо рівняння для визначення власних значень оператора L_0:

$$\Delta(\rho, L_0) := \det[\ell_{0,r} y_q]_{r,q=1,\dots,2n} = 0.$$

Зі співвідношень (6), (8), (9) отримуємо рівності

$$\ell_{0,j} y_{n+r}(x,\rho) = 0, \qquad \ell_{0,n+j} y_r(x,\rho) = 0, \qquad j,r = 1,\dots,n.$$

Тому

$$\Delta(\rho) = \Delta_0(\rho)\Delta_1(\rho) = 0,$$

де

$$\Delta_0(\rho, L_0) := \det[\ell_{0,j} y_r]_{r,j=1,\dots,n} = 0,$$

$$\Delta_1(\rho, L_0) := \det[\ell_{0,n+j} y_{n+r}]_{r,j=1,\dots,n} = 0.$$

Нехай $\rho_{s,q}$ – розв'язки рівняння $\Delta_s(\rho) = 0$, а $\lambda_{s,q} = (-1)^n(\rho_{s,q})^{2n}$ – відповідні власні значення оператора L_0, пронумеровані в порядку зростання, $s = 0,1$, $q = 1,2,\dots$.

Побудуємо систему власних функцій оператора L_0. За елементами систем (8), (9) означимо функції

$$v_{0,q}(x, L_0) := \gamma_{0,q} \begin{Vmatrix} y_1(x,\rho_{0,q}) & \dots & y_n(x,\rho_{0,q}) \\ \ell_{0,2} y_1 & \dots & \ell_{0,2} y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \ell_{0,n} y_1 & \dots & \ell_{0,n} y_n \end{Vmatrix}, \qquad q = 1,2,\dots,$$

які після деяких перетворень набудуть вигляду

$$v_{0,q}(x, L_0) = \gamma_{1,q} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} y_1(x,\rho_{0,q}) & \dots & y_r(x,\rho_{0,q}) & \dots & y_n(x,\rho_{0,q}) \\ \omega_1(1-e^{\omega_1\rho_{0,q}}) & \dots & \omega_r(1-e^{\omega_r\rho_{0,q}}) & \dots & \omega_n(1-e^{\omega_n\rho_{0,q}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{n-1}(1-(-1)^n e^{\omega_1\rho_{0,q}}) & \dots & \omega_r^{n-1}(1-(-1)^n e^{\omega_r\rho_{0,q}}) & \dots & \omega_n^{n-1}(1-(-1)^n e^{\omega_n\rho_{0,q}}) \end{Vmatrix},$$

$$q = 1,2,\dots. \tag{11}$$

Параметри $\gamma_{1,q}$ виберемо так, щоб $\left\| v_{0,q}(x, L_0); H_0 \right\| = 1$, $q = 1,2,\dots$.

Аналогічно визначаємо власні функції $v_{1,q}(x, L_0) \in H_{0,1}$:

$$v_{1,q}(x, L_0) := \gamma_{2,q} \begin{Vmatrix} y_{n+1}(x,\rho_{1,q}) & \dots & y_{2n}(x,\rho_{1,q}) \\ \ell_{0,n+2} y_1 & \dots & \ell_{0,n+2} y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \ell_{0,2n} y_1 & \dots & \ell_{0,2n} y_n \end{Vmatrix}, \quad q = 1,2,\dots, \tag{12}$$

де параметри $\gamma_{2,q}$ вибираємо таким чином, щоб виконувались рівності $\left\| v_{1,q}(x, L_0); H_0 \right\|^2 = 1$, $q = 1,2,\dots$.

Отже, згідно з лемою 1 система

$$V(L_0) := \{v_{s,q}(x, L_0) \in H_0 : s = 0,1,\ q = 1,2,\dots\}$$

власних функцій самоспряженого оператора L_0 є ортонормованим базисом простору H_0.

Зауваження 3. Системи функцій

$$V_s(L_0) := \{v_{s,q}(x, L_0) \in H_0, q = 1,2,\dots\}, \qquad s = 0,1,$$

є ортономованими базисами в просторах $H_{0,0}$, $H_{0,1}$ відповідно.

Подамо власні функції (11), (12) співвідношеннями

$$v_{0,q}(x,L_0) = \gamma_{1,q}\sum_{r=1}^{n}\Delta^0_{0,r}(\rho_{0,q})y_r(x,\rho_{0,q}),$$

$$v_{1,q}(x,L_0) = \gamma_{2,q}\sum_{r=1}^{n}\Delta^0_{1,n+r}(\rho_{1,q})y_n(x,\rho_{1,q}),$$

$$\Delta^0_{0,r}(\rho_{0,q}) :=$$

$$= \left\|\begin{matrix} \omega_1(1-e^{\omega_1\rho_{0,q}}) & \dots & \omega_{r-1}(1-e^{\omega_{r-1}\rho_{0,q}}) & \omega_{r+1}(1-e^{\omega_{r+1}\rho_{0,q}}) & \dots & \omega_n^1(1-e^{\omega_n\rho_{0,q}}) \\ \omega_1^2(1+e^{\omega_1\rho_{0,q}}) & \dots & \omega_{r-1}^2(1+e^{\omega_{r-1}\rho_{0,q}}) & \omega_{r+1}^2(1+e^{\omega_{r+1}\rho_{0,q}}) & \dots & \omega_n^2(1+e^{\omega_n\rho_{0,q}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{n-1}(1-(-1)^n e^{\omega_1\rho_{0,q}}) & \dots & \omega_{r-1}^{n-1}(1-(-1)^n e^{\omega_{r-1}\rho_{0,q}}) & \omega_{r+1}^{n-1}(1-(-1)^n e^{\omega_{r+1}\rho_{0,q}}) & \dots & \omega_n^{n-1}(1-(-1)^n e^{\omega_n\rho_{0,q}}) \end{matrix}\right\|,$$

$$\Delta^0_{1,n+r}(\rho_{1,q}) :=$$

$$= \left\|\begin{matrix} \omega_1(1-e^{\omega_1\rho_{1,q}}) & \dots & \omega_{r-1}(1-e^{\omega_{r-1}\rho_{1,q}}) & \omega_{r+1}(1-e^{\omega_{r+1}\rho_{1,q}}) & \dots & \omega_n^1(1-e^{\omega_n\rho_{1,q}}) \\ \omega_1^2(1+e^{\omega_1\rho_{1,q}}) & \dots & \omega_{r-1}^2(1+e^{\omega_{r-1}\rho_{1,q}}) & \omega_{r+1}^2(1+e^{\omega_{r+1}\rho_{1,q}}) & \dots & \omega_n^2(1+e^{\omega_n\rho_{1,q}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{n-1}(1-(-1)^n e^{\omega_1\rho_{1,q}}) & \dots & \omega_{r-1}^{n-1}(1-(-1)^n e^{\omega_{r-1}\rho_{1,q}}) & \omega_{r+1}^{n-1}(1-(-1)^n e^{\omega_{r+1}\rho_{1,q}}) & \dots & \omega_n^{n-1}(1-(-1)^n e^{\omega_n\rho_{1,q}}) \end{matrix}\right\|,$$

$$r = 1,\dots,n, \qquad q = 1,2,\dots .$$

Розглянемо для рівняння (1) самоспряжені задачі з крайовими умовами при кожному $p \in N$, $N := \{1,\dots,n\}$:

$$\ell_{1,p,p}y := y^{(2n-p-1)}(0) + (-1)^p y^{(2n-p-1)}(1) = 0, \tag{13}$$

$$\ell_{1,p,j}y := y^{(j-1)}(0) - (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \quad j \ne p, \quad j = 1,\dots,n, \tag{14}$$

$$\ell_{1,p,n+j}y := y^{(j-1)}(0) + (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \quad j = 1,\dots,n. \tag{15}$$

Нехай $L_{1,p}$ − оператор задачі (1), (13)−(15):

$$L_{1,p}y := (-1)^n y^{(2n)}(x), \qquad y \in D(L_{1,p}) \subset W_2^{2n}(0,1),$$

$$D(L_{1,p}) := \{y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_{1,p,s}y = 0,\ s = 1,\dots,2n\}.$$

Оскільки крайові умови (5) і (15) співпадають, то

$$\Delta_1(\rho, L_0) \equiv \Delta_1(\rho, L_{1,1}) \equiv \dots \equiv \Delta_1(\rho, L_{1,n}).$$

Підстановкою функцій $v_{1,q}(x,L_0)$ у крайові умови (14), (15) переконуємось, що $v_{1,q}(x,L_0) \in D(L_{1,p})$.

Тому оператори L_0, $L_{1,p}$, $p \in N$, мають спільну частину власних значень $\sigma_1(L_0) = \{\lambda_{1,q}(L_0),\ q = 1,2,\dots\}$ і власних функцій $V_1(L_0)$.

3. Нелокальні крайові задачі. Розглянемо при кожному $b \in \mathbb{R}$, $p \in N$ задачу для рівняння (1) з крайовими умовами

$$\ell_{2,p,j}y := y^{(j-1)}(0) - (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \quad j \ne p, \quad j = 1,\dots,n, \tag{16}$$

$$\ell_{2,p,p}y := y^{(2n-p-1)}(0) + (-1)^p y^{(2n-p-1)}(1) +$$

$$+ b(y^{(2n-p-1)}(0) - (-1)^p y^{(2n-p-1)}(1)) = 0, \tag{17}$$

$$\ell_{2,p,n+j}y := y^{(j-1)}(0) + (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \quad j = 1,\dots,n. \tag{18}$$

Нехай $L_{2,p}$ – оператор задачі (1), (16)–(18):

$$L_{2,p}y := (-1)^n y^{(2n)}(x), \qquad y \in D(L_{2,p}) \subset W_2^{2n}(0,1),$$

$$D(L_{2,p}) := \{y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_{2,p,s}y = 0,\ s = 1,\dots,2n\}.$$

Лема 2. *Власні значення операторів* $L_{1,p}$ *і* $L_{2,p}$ *співпадають. Система власних функцій* $V(L_{2,p})$ *оператора* $L_{2,p}$ *є базисом Рісса простору* H_0.

Д о в е д е н н я. Розглянемо спектральну задачу (7), (16)–(18). Підставляючи загальний розв'язок диференціального рівняння (7) у крайові умови (16)–(18), отримаємо рівняння для визначення власних значень оператора $L_{2,p}$:

$$\Delta(\rho, L_{2,p}) := \det[\ell_{2,p,r}y_j]_{r,j=1,\dots,2n} = 0.$$

Зі співвідношень (6), (8), (9), (16)–(18) маємо рівності

$$\ell_{2,p,j}y_r(x,\rho) = \ell_{1,p,j}y_r(x,\rho),$$

$$\ell_{2,p,n+j}y_r(x,\rho) = \ell_{1,p,n+j}y_r(x,\rho) = 0,$$

$$\ell_{2,p,j}y_{n+r}(x,\rho) = 0, \qquad p,j,r = 1,\dots,n.$$

Тому

$$\Delta(\rho, L_{1,p}) = \Delta(\rho, L_{2,p}) = \Delta_0(\rho, L_{1,p})\Delta_1(\rho, L_{1,p}),$$

де

$$\Delta_0(\rho, L_{1,p}) = \det[\ell_{1,p,r}y_j]_{r,j=1,\dots,n}, \quad \Delta_1(\rho, L_{1,p}) = \det[\ell_{1,p,n+r}y_{n+j}]_{r,j=1,\dots,n}.$$

Отже, оператори $L_{1,p}$ і $L_{2,p}$ мають однакові власні значення $\lambda_{s,q}(L_{1,p}) = \lambda_{s,q}(L_{2,p})$, $s = 0,1$, $q = 1,2,\dots$, і спільну систему власних функцій $V_0(L_0) \subset H_{0,0}$.

Побудуємо власні функції $v_{1,q}(x, L_{2,p})$, $q = 1,2,\dots$, оператора $L_{2,p}$ які відповідають власним значенням $\lambda_{1,q}(L_{1,p}) = \lambda_{1,q}(L_{2,p})$, $q = 1,2,\dots$.

Нехай $\rho_{1,q}$ – корені рівняння

$$\Delta_1(\rho, L_{2,p}) := \det[\ell_{2,p,n+r}y_{n+j}]_{r,j=1,\dots,n} = 0.$$

Розглянемо функції

$$y_{1,r}(x,\rho_{1,q}) := e^{\omega_j\rho_{1,q}x} + e^{\omega_j\rho_{1,q}(1-x)} \in H_{0,0}, \quad q = 1,2,\dots,$$

$$y_{2,p}(x,\rho_{1.q}) := \sum_{r=1}^{n} \Delta_{p,r}(\rho_{1,q})y_{1,r}(x,\rho_{1,q}), \tag{19}$$

де

$$\Delta_{p,r}(\rho_{1,q}) := \det[\ell_{2,p,j}y_{1,s}(x,\rho_{1,q})]_{\substack{j,s=1,\dots,n\\ j\neq p,\, s\neq r}}.$$

Безпосередньою підстановкою функцій (19) у крайові умови (16)–(18) отримуємо рівності

$$\ell_{2,p,j}y_{2,p}(x,\rho_{1.q}) = 0, \quad j \neq p, \quad j = 1,\dots,2n, \quad p = 1,\dots,n, \quad q = 1,2,\dots. \tag{20}$$

Власні функції $v_{1,q}(x, L_{2,p})$ оператора $L_{2,p}$ означимо співвідношенням

$$v_{1,q}(x, L_{2,p}) := v_{1,q}(x, L_0) + \eta_{p,q}y_{2,p}(x,\rho_{1.q}), \quad p = 1,\dots,n, \quad q = 1,2,\dots. \tag{21}$$

Підставляючи вираз (21) у крайові умови (18), маємо

$$\eta_{p,q} = -\left(\ell_{2,p,p}y_{2,p,q}(x,\rho_{1,q})\right)^{-1}\ell_{2,p,p}v_{1,q}(x,L_0).$$

Нехай $y_{3,p}(x,\rho_{1.q}) := \eta_{p,q}y_{2,p}(x,\rho_{1,q})$, якщо $b=1$. Тоді із формули (21) отримаємо

$$v_{1,q}(x,L_{2,p}) = v_{1,q}(x,L_0) + by_{3,p}(x,\rho_{1.q}),\ \ p=1,\dots,n,\ \ q=1,2,\dots. \tag{22}$$

Отже, оператор $L_{2,p}$ має систему $V(L_{2,p})$ власних функцій (22) і

$$v_{0,q}(x,L_{2,p}) = v_{0,q}(x,L_0), \qquad q=1,2,\dots. \tag{23}$$

Умови (16)−(18) є сильно регулярними за Біркгофом [11, 23]. Тому система $V(L_{2,p})$ є базисом Рісса в просторі H_0. Лему доведено. ♦

Зауваження 4. Базис Рісса є майже нормованою системою [4]. Тому, беручи до уваги співвідношення

$$\left\| v_{1,q}(x,L_{2,p}),H_0 \right\| = 1 + |b| \left\| y_{3,p}(x,\rho_{1,q}),H_0 \right\| < \infty,$$

отримуємо обмеженість послідовності чисел

$$\left\| y_{3,p}(x,\rho_{1,q}),H_0 \right\| \le C_{1,p} < \infty, \quad p=1,\dots,n, \quad q=1,2,\dots. \tag{24}$$

4. Оператори перетворення. Виберемо будь-яку числову послідовність $\{\theta_q\}_{q=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ і розглянемо визначений у просторі H_0 оператор B_p, власні значення якого співпадають з власними значеннями оператора L_0, а власні функції визначаються співвідношеннями

$$v_{0,q}(x,B_p) := v_{0,q}(x,L_0), \qquad q=1,2,\dots, \tag{25}$$

$$v_{1,q}(x,B_p) := v_{1,q}(x,L_0) + \theta_q y_{3,p}(x,\rho_{1,q}), \qquad q=1,2,\dots. \tag{26}$$

Нехай $R(B_p): H_0 \to H_0$ − оператор, який відображає $V(L_0)$ в $V(B_p)$ і

$$R(B_p)v_{s,q}(x,L_0) := v_{s,q}(x,B_p), \qquad s=0,1, \qquad q=1,2,\dots.$$

Із означення оператора $R(B_p) := E + S(B_p)$ отримуємо

$$S(B_p): H_{0,1} \to H_{0,0}, \qquad S(B_p): H_{0,0} \to 0, \qquad S^2(B_p) = 0.$$

Тому існує оператор $\left(R(B_p)\right)^{-1} = E - S(B_p)$.

Лема 3. *Для будь-якої послідовності* $\{\theta_q\}_{q=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *система функцій* $V(B_p)$ *є повною і мінімальною в просторі* H_0, $p=1,\dots,n$.

Д о в е д е н н я. Покажемо від протилежного, що система функцій $V(B_p)$ є тотальною (повною) в просторі H_0.

Нехай існує функція $h = h_0 + h_1$, $h_s \in H_{0,s}$, яка є ортогональною до всіх елементів системи $V(B_p)$. Враховуючи, що система (25) є ортонормованим базисом простору $H_{0,0}$, отримуємо, що $h_0 = 0$. Отже, $h = h_1 \in H_{0,1}$.

Із припущення ортогональності функції h до елементів системи $V(B_p)$ маємо рівності

$$\left(h, v_{1,q}(x,B_p); H_0\right) = \left(h_0, v_{1,q}(x,L_0); H_0\right) = 0, \qquad q=1,2,\dots.$$

Беручи до уваги, що система $V_1(L_0)$ є ортонормованим базисом простору $H_{0,0}$, отримуємо, що $h_1 \equiv 0$, $h \equiv 0$. ♦

Лема 4. *Система функцій* $V(B_p)$ *є базисом Рісса в просторі* H_0 *тоді й лише тоді, коли послідовність* $\{\theta_q\}_{q=1}^{\infty}$ *є обмеженою.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Якщо система функцій $V(B_p)$ є базисом Рісса, то вона є майже нормованою.

Тому, враховуючи (23)–(26), отримуємо нерівність

$$0 < C_{2,p} \le \left\| v_{1,q}(x, B_p); H_0 \right\|^2 \le C_{1,p}^2 (1 + |\theta_k|)^2 \le C_{3,p} < \infty .$$

Достатність. Враховуючи формули (25), (26), для будь-якої функції $h \in H_0$ отримаємо такі нерівності:

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} \left| (R^*(B_p)h, v_{s,q}(x, L_0); H_0) \right|^2 = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} \left| h, v_{s,q}(x, L_0); H_0) \right|^2 \le$$

$$\le C(\theta) \left\| h; H_0 \right\|^2, \qquad C(\theta) = \max C_{1,p}^2 (1 + \theta_q^2)^2 ,$$

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} \left| (R^*(B_p)h, v_{s,q}(x, L_0); H_0) \right|^2 \le C(\theta) \left\| h; H_0 \right\|^2 .$$

Отже, оператори $R^*(B_p)$ і $(R^*(B_p))^{-1} : H_0 \to H_0$ є обмеженими. Тобто система функцій, біортогональна до системи $V(B_p)$, є базисом Рісса за означенням. ♦

Сукупність операторів B_p, власні функції яких визначаються формулами (25), (26), позначимо через $\Gamma_p(L_0)$. Відповідну множину операторів перетворення

$$R(B_{p,1}) = E + S(B_{p,1}), \qquad R(B_{p,2}) = E + S(B_{p,2})$$

позначимо через $\Phi_p(L_0)$: $R(B_{p,1}), R(B_{p,2}) \in \Phi_p(L_0)$.

На множині $\Phi_p(L_0)$ введемо операцію множення операторів перетворення:

$$R(B_{p,1})R(B_{p,2}) := E + S(B_{p,1}) + S(B_{p,2}) = R(B_{p,2})R(B_{p,1}) ,$$

а також обернений оператор

$$(R(B_p))^{-1} = E - S(B_p) .$$

Отже, $\Phi_p(L_0)$ є абелевою групою відносно операції множення.

Виберемо n послідовностей дійсних чисел $\{\theta_{p,q}\}_{q=1}^{\infty}$, $p = 1, \ldots, n$, які позначимо через Θ, і розглянемо оператор B_Θ, власні значення якого співпадають з власними значеннями оператора L_0, а власні функції визначаються співвідношеннями

$$v_{0,q}(x, B_\Theta) = v_{0,q}(x, L_0), \qquad q = 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

$$v_{1,q}(x, B_\Theta) = v_{1,q}(x, L_0) + \sum_{p=1}^{n} \theta_{p,q} y_{3,p}(x, \rho_{1.p,q}), \qquad q = 1, 2, \ldots . \tag{28}$$

Розглянемо оператор перетворення $R(B_\Theta) := E + S(B_\Theta) : H_0 \to H_0$, який відображає систему власних функцій $V(L_0)$ оператора L_0 у систему власних функцій $V(B_\Theta)$ оператора B_Θ:

$$R(B_\Theta)v_{s,q}(x,L_0) := v_{s,q}(x,B_\Theta), \quad s=0,1, \quad q=1,\dots .$$

З означення оператора B_Θ отримуємо

$$S(B_\Theta): H_{1,0} \to H_{0,0}, \quad H_{0,0} \to 0, \quad S^2(B_\Theta) = 0 .$$

Тому існує оператор $(R(B_\Theta))^{-1} = E - S(B_\Theta)$.

Лема 5. *Для будь-яких послідовностей* $\{\theta_{p,q}\}_{q=1}^{\infty}$, $p=1,\dots,n$, *система власних функцій* $V(B_\Theta)$ *оператора* B_Θ *є повною і мінімальною у просторі* H_0.

Система функцій $V(B_\Theta)$ *є базисом Рісса в просторі* H_0 *тоді й лише тоді, коли послідовності* $\{\theta_{p,q}\}_{q=1}^{\infty}$ *є обмеженими.*

Д о в е д е н н я леми проводиться аналогічно до доведення лем 4, 5.

Сукупність операторів B_Θ, власні функції яких визначені формулами (27), (28), позначимо через $\Gamma(L_0)$. Відповідну множину операторів перетворення позначимо через $\Phi(L_0)$.

Зауваження 5. На множині $\Phi(L_0)$ можна означити операцію множення і довести, що $\Phi(L_0)$ є абелевою групою.

5. Багатоточкові задачі. Розглянемо для кожного $p \in N$ для рівняння (1) нелокальну задачу з багатоточковими умовами

$$\ell_{3,p,p} y := y^{(p-1)}(0) - (-1)^p y^{(p-1)}(1) + \sum_{s=0}^{r}\sum_{m=0}^{k_p} b_{p,m,s} y^{(m)}(x_s) = 0 ,$$

$$b_{p,m,s} \in \mathbb{R} , \tag{29}$$

$$\ell_{3,p,j} y := y^{(j-1)}(0) - (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \qquad j \neq p, \quad j=1,\dots,n , \tag{30}$$

$$\ell_{3,p,n+j} y := y^{(j-1)}(0) + (-1)^j y^{(j-1)}(1) = 0, \qquad j=1,\dots,n . \tag{31}$$

Нехай $L_{3,p}$ – оператор задачі (1), (29)–(31):

$$L_{3,p} y := (-1)^n y^{(2n)}(x), \qquad y \in D(L_{3,p}) \subset W_2^{2n}(0,1),$$

$$D(L_{3,p}) := \{y \in W_2^{2n}(0,1) : \ell_{3,p,s} y = 0, \ s=1,\dots,2n\}.$$

Лема 6. *Нехай припущення* $\boldsymbol{P}_1$ *справджується для умови* (29) *при деякому* $p \in N$. *Тоді власні значення операторів* L_0 *і* $L_{3,p}$ *співпадають, а система власних функцій* $V(L_{3,p})$ *оператора* $L_{3,p}$ *є повною і мінімальною у просторі* H_0. *Якщо при* $p \in N$ *справджуються припущення* $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, *тоді система* $V(L_{3,p})$ *є базисом Рісса простору* H_0.

Д о в е д е н н я. Ізоспектральність операторів L_0 і $L_{3,p}$ встановлюємо підстановкою загального розв'язку (10) диференціального рівняння (7) у багатоточкові умови (29)–(31). Отримана система порядку $2n$ має матрицю коефіцієнтів, яка містить мінор n-го порядку, усі елементи $\ell_{3,p,n+j} y_s(x,\rho)$ якого дорівнюють нулеві при $j,s=1,\dots,n$. Тому

$$\det[\ell_{3,p,j} y_r]_{j,r=1,\ldots,2n} = \det[\ell_{0,m} y_s]_{m,s=1,\ldots,n} \det[\ell_{3,p,n+m} y_{n+s}]_{m,s=1,\ldots,n} =$$

$$= \det[\ell_{0,j} y_r]_{j,r=1,\ldots,2n} .$$

Безпосередньою підстановкою можемо переконатися, що

$$v_{0,q}(x, L_0) \in D(L_{3,p}), \qquad q = 1, \ldots .$$

Отже, $v_{0,q}(x, L_{3,p}) = v_{0,q}(x, L_0)$, $q = 1, \ldots$.

Враховуючи рівності (20), власні функції $v_{1,q}(x, L_{3,p})$ оператора $L_{3,p}$ визначаємо формулами

$$v_{1,q}(x, L_{3,p}) := v_{1,q}(x, L_0) + \eta_{1,p,q} y_{3,p}(x, \rho_{1.q}), \qquad q = 1, 2, \ldots .$$

Підставляючи цей вираз у багатоточкову умову (29), маємо

$$\eta_{1,p,q} = -(\ell_{3,p} y_{3,p,q}(x, \rho_{1,q}))^{-1} \ell_{3,p} v_{1,q}(x, L_0), \qquad q = 1, 2, \ldots . \tag{32}$$

Отже, оператор $L_{3,p}$ є елементом множини $\Gamma_p(L_0)$. Тому, з огляду на твердження леми 3, отримаємо повноту і мінімальність системи функцій $V(L_{3,p})$ у просторі H_0.

У випадку, коли справджуються припущення $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, безпосередніми обчисленнями встановлюємо обмеженість послідовностей $\{\eta_{1,p,q}\}_{q=1}^{\infty}$.

Тому, застосовуючи лему 4, отримуємо друге з тверджень леми 6. ♦

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Ізоспектральність операторів L_0 і L встановлюємо подібно, як при доведенні леми 6. Оператор L визначаємо як елемент множини $\Gamma(L_0)$. Безпосередньою підстановкою можемо переконатись, що $v_{0,q}(x, L_0) \in D(L)$, $q = 1, 2, \ldots$.

Отже, $v_{0,q}(x, L) = v_{0,q}(x, L_0)$, $q = 1, 2, \ldots$.

Власні функції $v_{1,q}(x, L)$ оператора L визначаємо формулами

$$v_{1,q}(x, L) := v_{1,q}(x, L_0) + \sum_{p=1}^{n} \eta_{1,p,q} y_{3,p}(x, \rho_{1.q}), \qquad q = 1, 2, \ldots .$$

Враховуючи умови (29), для параметрів $\eta_{1,p,q}$ отримуємо рівності (32).

Отже, згідно з лемою 5 система функцій $V(L)$ є повною і мінімальною у просторі H_0.

У випадку, коли справджуються припущення $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, оператори перетворення $R(L_{3,p})$ є обмеженими. Тому, враховуючи рівність $R(L) = \prod_{p=1}^{n} R(L_{3,p})$, маємо, що $R(L) \in [H_0]$.

Таким чином, з огляду на друге твердження леми 5, отримаємо, що система функцій $V(L)$ є базисом Рісса у просторі H_0.

Теорему доведено. ♦

1. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І.* Крайові задачі з регулярними, але не сильно регулярними за Біркгофом умовами для оператора двократного диференціювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 4. – С. 7–23.
   Те саме: *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I.* Boundary-value problems with Birkhoff regular but not strongly regular conditions for a second-order differential operator // J. Math. Sci. – 2019. – **238**, No. 1. – P. 1–21.
   https://doi.org/10.1007/s10958-019-04214-z.

2. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І.* Нелокальна багатоточкова задача з кратним спектром для звичайного диференціального рівняння порядку $2n$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 3. – С. 32–45.
3. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І., Коляса Л. І.* Спектральні властивості несамоспряжених нелокальних крайових задач для оператора диференціювання парного порядку // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 6. – С. 739–751.
   Те саме: *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kolyasa L. I.* Spectral properties of nonself-adjoint nonlocal boundary-value problems for the operator of differentiation of even order // Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, No. 6. – P. 851–865.
   – https://doi.org/10.1007/s11253-018-1538-4.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
   Те саме: *Gohberg I. C., Krein M. G.* Introduction to the theory of linear nonself-adjoint operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1969. – xv+378 p.
5. *Ильин В. А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1976. – **142**: Сб статей: Теория чисел, математический анализ и их приложения. – С. 148–155.
   Те саме: *Il'in V. A.* Existence of a reduced system of eigen- and associated functions for a nonselfadjoint ordinary differential operator // Proc. Steklov Inst. Math. – 1979. – **142**: Number theory, mathematical analysis and their applications. – P. 157–164. – Zbl 0434.34018.
6. *Ильин В. А., Крицков Л. В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. Темат. обзор. Функц. анализ. – **96**. – Москва: ВИНИТИ, 2006. – С. 5–105.
   Те саме: *Il'in V. A., Kritskov L. V.* Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators // J. Math. Sci. – 2003. – **116**, No. 5. – P. 3489–3550. – https://doi.org/10.1023/A:1024180807502.
7. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1993. – 230 с.
8. *Каленюк П., Баранецький Я., Коляса Л.* Нелокальна крайова задача для оператора диференціювання парного порядку // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Б. Й. Пташника. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 91–109.
9. *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 2(39). – С. 82–93.
10. *Михайлов В. П.* О базисах Рисса в $\mathfrak{L}_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. – 1962. – **144**, № 5. – С. 981–984.
11. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
12. *Хромов А. П.* Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. заметки. – 1976. – **19,** № 5. – Р. 763–772.
   Те саме: *Khromov A. P.* Differential operator with irregular splitting boundary conditions // Math. Notes. – 1976. – **19**, No. 5. – P. 451–456.
   https://doi.org/10.1007/BF01142570.
13. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. – 1966. – **70** (112), № 3. – С. 310–329.
14. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**, № 5(209). – С. 235–236.
   Те саме: *Shkalikov A. A.* On the basis problem of the eigenfunctions of an ordinary differential operator // Rus. Math. Surveys. – 1979. – **34**, No. 5. – P. 249–250. – http://dx.doi.org/10.1070/RM1979v034n05ABEH003901.
15. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. – 1982. – № 6. – С. 41–51.
16. *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Функц. анализ и его прил. – 1976. – **10**, № 4. – С. 69–80.

Те саме: *Shkalikov A. A.* The completeness of eigenfunctions and associated functions of an ordinary differential operator with irregular-separated boundary conditions // Funct. Anal. Appl. − 1976. − **10**, No. 4. − P. 305−316. − https://doi.org/10.1007/BF01076030.

17. *Baranetskij Ya. O., Ivasiuk I. Ya., Kalenyuk P. I., Solomko A. V.* The nonlocal boundary problem with perturbations of antiperiodicity conditions for the elliptic equation with constant coefficients // Карпат. мат. публікації. − 2018. − **10**, № 2. − С. 215−234. − doi: 10.15330/cmp.10.2.215-234.
18. *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kolyasa L. I., Kopach M. I.* Nonlocal multipoint problem for an ordinary differential equations of even order involution // Мат. студії. − 2018. − **49**, № 1. − С. 80−94. − doi:10.15330/ms.49.1. 80-94.
19. *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kolyasa L. I., Kopach M. I.* The nonlocal problem for the differential-operator equation of the even order with involution // Карпат. мат. публікації. − 2017. **9**, No. 2. − P. 109−119. − doi:10.15330/cmp.9.2.109-119.
20. *Freiling G.* Irregular boundary value problems revisited // Results Math. − 2012. − **62**, No. 3-4. − P. 265−294. − https://doi.org/10.1007/s00025-012-0281-7.
21. *Kandemir M., Mukhtarov O., Yakubov Ya.* Irregular boundary value problems with discontinuous coefficients and the eigenvalue parameter // Mediterr. J. Math. − 2009. − **6**, No. 3. − P. 317−338. − https://doi.org/10.1007/s00009-009-0011-x.
22. *Locker J.* Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two-point differential operators // Mem. Am. Math. Soc. − 2008. − **195**, No. 911. − viii+177 p. http://dx.doi.org/10.1090/memo/0911. https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2437836.
23. *Minkin A. M.* Odd and even cases of Birkhoff-regularity // Math. Nachr. − 1995. − **174,** No. 1. − P. 219−230. − https://doi.org/10.1002/mana.19951740115.
24. *Sadybekov M. A., Imanbaev N. S.* Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property // Eurasian Math. J. − 2017. − **8**, No. 2. − P. 40−46.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ТИПА ШТУРМА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Исследованы спектральные свойства несамосопряженной задачи для оператора дифференцирования порядка $2n$ *с нелокальными условиями, которые являются возмущениями сильно регулярных самосопряженных условий типа Штурма. Изучены случаи задач с регулярными и нерегулярными по Биркгофу возмущениями краевых условий. Построена система собственных функций многоточечной задачи. Получены достаточные условия, при которых эта система является полной и при некоторых дополнительных предположениях образует базис Рисса.*

Ключевые слова: *нелокальная задача, оператор преобразования, базис Рисса.*

A NON-LOCAL PROBLEM WITH MULTIPOINT PERTURBATIONS OF THE BOUNDARY CONDITIONS OF THE STURM-TYPE FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF EVEN ORDER

The spectral properties of a non-self-adjoint problem for differentiation operator of order $2n$ *with nonlocal conditions, which are perturbations of strongly regular self-adjoint Sturm-type conditions are investigated. The cases of problems with Birkhoff regular and irregular perturbations of boundary conditions are studied. A system of eigenfunctions of the multi-point problem is constructed. The sufficient conditions under which this system is complete and forms the Riesz basis under some additional assumptions are established.*

Key words: *nonlocal problem, transformation operator, Riesz basis.*

Ін-т прикл. математики та фундам. наук
Нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів

Одержано
11.03.19