

НЕСТАЦІОНАРНІ НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ

Запропоновано методику визначення температурних полів у півпросторі з урахуванням теплового випромінювання, температурної залежності теплофізичних характеристик, густин поверхневих та об'ємних джерел тепла за нерівномірного розподілу початкової температури. Відповідні задачі теплопровідності з використанням перетворення Кірхгофа, функції Гріна і лінійних сплайнів зведено до розв'язання рекурентної системи нелінійних алгебричних рівнянь. Наведено приклади числових досліджень.

Ключові слова: *термочутливий півпростір, теплове випромінювання, нестационарне температурне поле, перетворення Кірхгофа, функція Гріна, лінійні сплайни.*

Під час виготовлення чи експлуатації елементи конструкцій сучасної техніки часто піддаються високотемпературному нагріванню. Розрахунки їхнього теплового стану, як правило, проводять на основі нелінійних математичних моделей. Для розв'язання відповідних нестационарних нелінійних задач теплопровідності, крім числових, широко використовують наближені аналітичні методи [1–5, 7–12, 15–18 та ін.]. При цьому в багатьох випадках нехтують температурною залежністю окремих характеристик. Значну увагу приділено розробці методів розв'язування задач для лінеаризованого рівняння теплопровідності при нелінійних граничних умовах. Точність отриманих розв'язків не завжди було досліджено.

У цій роботі з використанням і узагальненням підходів, викладених у [13, 14], запропоновано методику визначення температурних полів у півпросторі з урахуванням широкого спектра факторів, що зумовлюють нелінійність відповідної задачі теплопровідності. Методика передбачає використання перетворення Кірхгофа, функції Гріна лінійної задачі теплопровідності для півпростору, лінійних сплайнів і розв'язання рекурентних систем нелінійних алгебричних рівнянь відносно значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на обмежувальній поверхні та значень її похідної за часом на внутрішніх плоско-паралельних поверхнях.

1. Формулювання задачі. Нехай обмежувальна поверхня $\tilde{z} = 0$ півпростору, який займає область $\tilde{z} \geq 0$ і має початкову температуру $t_0 T_0(\tilde{z})$, нагрівається шляхом конвективного теплообміну з середовищем зі змінною у часі температурою $t_c T_c(\tau)$ і тепловим потоком густини $q_0 q(T, \tau)$. Крім того, у півпросторі діють внутрішні джерела тепла густини $W_0 W(T, \tilde{z}, \tau)$. Одночасно з обмежувальною поверхні відводяться теплові потоки власного випромінювання згідно з законом Стефана – Больцмана. Визначимо одновимірне нестационарне температурне поле півпростору з урахуванням температурних залежностей коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t(T) = \lambda_0 \Lambda(T)$, об'ємної теплоємності $c_v(T) = c_0 C(T)$, коефіцієнта тепловіддачі $\alpha(T) = \alpha_0 \alpha_*(T)$ і ступеня чорноти поверхні півпростору $\varepsilon(T) = \varepsilon_0 \varepsilon_*(T)$. Тут множники біля функцій мають розмірності відповідних величин.

За таких припущень нелінійна задача теплопровідності у безрозмірних величинах матиме вигляд

* dept19@iapmm.lviv.ua

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\Lambda}(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right] = \bar{C}(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \text{Fo}} - \text{Po} \bar{W}(\bar{T}, z, \text{Fo}), \quad (1)$$

$$\left(\bar{\Lambda}(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \text{Bi} \bar{\alpha}(\bar{T}) [\bar{T} - \bar{t}_c \bar{T}_c(\text{Fo})] - \text{Sk} \bar{\varepsilon}(\bar{T}) \bar{T}^4 + \text{Ki} \bar{q}(\bar{T}, \text{Fo}) \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

$$\bar{T} \Big|_{z \rightarrow \infty} < \infty, \quad (3)$$

$$\bar{T} \Big|_{\text{Fo}=0} = \bar{t}_0 \bar{T}_0(z), \quad (4)$$

де $\bar{T} = \frac{T}{T_s}$, $z = \frac{\tilde{z}}{\ell}$, $\text{Fo} = \frac{a_0 \tau}{\ell^2}$, $a_0 = \frac{\lambda_0}{c_0}$, $\text{Bi} = \frac{\ell \alpha_0}{\lambda_0}$,

$$\text{Sk} = \frac{\ell \varepsilon_0 \sigma_0}{\lambda_0} T_s^3, \quad \text{Ki} = \frac{\ell q_0}{\lambda_0 T_s}, \quad \text{Po} = \frac{\ell^2 W_0}{\lambda_0 T_s}, \quad \bar{t}_0 = \frac{t_0}{T_s}, \quad \bar{t}_c = \frac{t_c}{T_s},$$

$$\bar{T}_0(z) = T_0(z\ell), \quad \bar{T}_c(\text{Fo}) = T_c \left(\frac{\ell^2 \text{Fo}}{a_0} \right),$$

$$[\bar{\Lambda}(\bar{T}), \bar{C}(\bar{T}), \bar{\alpha}(\bar{T}), \bar{\varepsilon}(\bar{T})] = [\Lambda(T), C(T), \alpha_*(T), \varepsilon_*(T)] \Big|_{T=T_s \bar{T}},$$

$$\bar{q}(\bar{T}, \text{Fo}) = q \left(T_s \bar{T}, \frac{\ell^2 \text{Fo}}{a_0} \right), \quad \bar{W}(\bar{T}, z, \text{Fo}) = W \left(T_s \bar{T}, z\ell, \frac{\ell^2 \text{Fo}}{a_0} \right),$$

σ_0 – стала Стефана – Больцмана, T_s – характерна для задачі температура, ℓ – параметр, який має розмірність довжини.

2. Побудова розв'язку задачі. Застосовуючи перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int_{\bar{T}^*}^{\bar{T}} \bar{\Lambda}(\bar{T}) d\bar{T}$$

за припущення, що існує функція $\bar{T} = \bar{T}(\theta)$, обернена до $\theta = \theta(\bar{T})$, задачу (1)–(4) зводимо до такої:

$$\frac{\partial^2 \theta(z, \text{Fo})}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta(z, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - W^t(z, \text{Fo}), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = f(\text{Fo}), \quad (6)$$

$$\theta \Big|_{z \rightarrow \infty} < \infty, \quad (7)$$

$$\theta \Big|_{\text{Fo}=0} = \theta_0(z), \quad (8)$$

де

$$W^t(z, \text{Fo}) = \left[1 - \frac{\bar{C}(\bar{T}(\theta))}{\bar{\Lambda}(\bar{T}(\theta))} \right] \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Po} \bar{W}(\bar{T}(\theta), z, \text{Fo}),$$

$$f(\text{Fo}) = \left\{ \text{Bi} \bar{\alpha}(\bar{T}(\theta)) [\bar{T}(\theta) - \bar{t}_c \bar{T}_c(\text{Fo})] + \right. \\ \left. + \text{Sk} \bar{\varepsilon}(\bar{T}(\theta)) \bar{T}^4(\theta) - \text{Ki} \bar{q}(\bar{T}(\theta), \text{Fo}) \right\} \Big|_{z=0},$$

$$\theta_0(z) = \int_{\bar{T}^*}^{\bar{t}_0 \bar{T}_0(z)} \bar{\Lambda}(\bar{T}) d\bar{T},$$

$\bar{T}^* = \frac{T_*}{T_s}$, T_* – нижня межа діапазону температур, у якому змінюються теплофізичні характеристики (ТФХ).

З використанням функції Гріна

$$G(z, \zeta, \text{Fo}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\text{Fo}}} \left[\exp\left(-\frac{(\zeta+z)^2}{4\text{Fo}}\right) + \exp\left(-\frac{(\zeta-z)^2}{4\text{Fo}}\right) \right],$$

яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{\partial G}{\partial \text{Fo}},$$

а також граничні і початкову умови

$$\left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad G|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad G|_{\text{Fo}=0} = \delta(z - \zeta), \quad (9)$$

шукану функцію подамо у вигляді

$$\theta(z, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_0(z, \text{Fo}) - \mathfrak{G}_f(z, \text{Fo}) + \mathfrak{G}_w(z, \text{Fo}), \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_0(z, \text{Fo}) &= \int_0^{\infty} \theta_0(\zeta) G(z, \zeta, \text{Fo}) d\zeta, \\ \mathfrak{G}_f(z, \text{Fo}) &= \int_0^{\text{Fo}} f(\xi) G(z, 0, \text{Fo} - \xi) d\xi, \\ \mathfrak{G}_w(z, \text{Fo}) &= \int_0^{\text{Fo}} \int_0^{\infty} W^t(\zeta, \xi) G(z, \zeta, \text{Fo} - \xi) d\zeta d\xi. \end{aligned}$$

Щоб знайти невідомі $\theta(0, \text{Fo})$ та $\theta(z, \text{Fo})$ і $\frac{\partial \theta(z, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}}$, які входять відповідно у $f(\text{Fo})$ та $W^t(\zeta, \text{Fo})$, заміняємо у доданку $\mathfrak{G}_w(z, \text{Fo})$ рівності (10) верхню межу невластного інтеграла деяким числом b , яке вибираємо (шляхом числового експерименту) так, щоб в кінці часового інтервалу $\text{Fo} = \text{Fo}^*$ виконувалась умова $\bar{T}(b, \text{Fo}^*) \approx \bar{T}_*$. Отриманий інтеграл подаємо у вигляді суми інтегралів від z_{j-1} до z_j , $j = 1, 2, \dots, N$, $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = b$, у кожному з яких $W^t(\zeta, \xi)$ заміняємо на $W_j^t(\xi)$ відповідно, де $W_j^t(\xi) \approx W^t(z_j^*, \xi)$, $z_j^* = \frac{z_{j-1} + z_j}{2}$. Після цього функції $f(\text{Fo})$ і $W_j^t(\text{Fo})$ апроксимуємо лінійними сплайнами:

$$\begin{aligned} \chi_\eta(\text{Fo}) \approx & s_{\eta,1}^{(1)} \text{Fo} + s_{\eta,1}^{(0)} + \sum_{q=1}^{K-1} (s_{\eta,q+1}^{(1)} \text{Fo} + s_{\eta,q+1}^{(0)} - \\ & - s_{\eta,q}^{(1)} \text{Fo} - s_{\eta,q}^{(0)}) S(\text{Fo} - \text{Fo}_q), \quad \eta = f, j, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} s_{\eta,q}^{(1)} &= \frac{\chi_\eta(\text{Fo}_q) - \chi_\eta(\text{Fo}_{q-1})}{\text{Fo}_1}, \\ s_{\eta,q}^{(0)} &= \frac{\chi_\eta(\text{Fo}_{q-1}) \text{Fo}_q - \chi_\eta(\text{Fo}_q) \text{Fo}_{q-1}}{\text{Fo}_1}, \end{aligned}$$

$\chi_f(\text{Fo}) = f(\text{Fo})$, $\chi_j(\text{Fo}) = W_j^t(\text{Fo})$, $\text{Fo}_0 = 0$, $\text{Fo}_q = q\text{Fo}_1$, $q = 1, 2, \dots, K$; $\text{Fo}_K = \text{Fo}^*$, а $\text{Fo}_1 = \frac{a_0 \Delta \tau}{\ell^2}$, $\Delta \tau$ – відповідно безрозмірний і розмірний крок сітки, $S(\cdot)$ – функція Гевісайда.

Обчисливши з використанням апроксимацій (11) відповідні інтеграли, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_f(z, \mathbf{F}_0) &= f(\mathbf{F}_0)H(z, 0) - \\ &- \left[s_{f,1}^{(1)} + \sum_{q=1}^{K-1} (s_{f,q+1}^{(1)} - s_{f,q}^{(1)})S(\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_{0_q}) \right] R(z, 0) + s_{f,1}^{(1)}R(z, \mathbf{F}_0) + \\ &+ \sum_{q=1}^{K-1} (s_{f,q+1}^{(1)} - s_{f,q}^{(1)})R(z, \mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_{0_q})S(\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_{0_q}) - s_{f,1}^{(0)}H(z, \mathbf{F}_0), \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_w(z, \mathbf{F}_0) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left\{ -W_j^t(\mathbf{F}_0)\bar{H}_j(z, 0) - \right. \\ &- \left[s_{j,1}^{(1)} + \sum_{q=1}^{K-1} (s_{j,q+1}^{(1)} - s_{j,q}^{(1)})S(\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_{0_q}) \right] \bar{R}_j(z, 0) + s_{j,1}^{(1)}\bar{R}_j(z, \mathbf{F}_0) + \\ &+ \left. \sum_{q=1}^{K-1} (s_{j,q+1}^{(1)} - s_{j,q}^{(1)})\bar{R}_j(z, \mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_{0_q})S(\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_{0_q}) - s_{j,1}^{(0)}\bar{H}_j(z, \mathbf{F}_0) \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} H(z, \eta) &= -2 \exp(-X^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta} - z \operatorname{erf}(X), \\ R(z, \eta) &= z \left(\eta + \frac{1}{6} z^2 \right) \operatorname{erf}(X) + \frac{1}{3} (4\eta + z^2) \exp(-X^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta}, \\ \bar{H}_j(z, \eta) &= U(z, z_j, \eta) + U(-z, z_j, \eta) - U(z, z_{j-1}, \eta) - U(-z, z_{j-1}, \eta), \\ \bar{R}_j(z, \eta) &= V(z, z_j, \eta) + V(-z, z_j, \eta) - V(z, z_{j-1}, \eta) - V(-z, z_{j-1}, \eta), \\ U(z, \zeta, \eta) &= \left(\eta + \frac{1}{2} Z^2 \right) \operatorname{erf}(Y) + Z \exp(-Y^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta}, \\ V(z, \zeta, \eta) &= \left(\frac{\eta^2 + \eta Z^2}{2} + \frac{Z^4}{24} \right) \operatorname{erf}(Y) + \frac{1}{12} Z(10\eta + Z^2) \exp(-Y^2)\sqrt{\pi^{-1}\eta}, \\ X &= \frac{z}{2\sqrt{\eta}}, \quad Y = \frac{Z}{2\sqrt{\eta}}, \quad Z = z + \zeta. \end{aligned}$$

При $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{0_q}$, $q = 1, 2, \dots, K$, із формул (12) і (13) одержимо

$$\mathfrak{F}_f(z, \mathbf{F}_{0_q}) = f_q[\psi(z) - z] + \Psi_q(z), \quad (14)$$

$$\mathfrak{F}_w(z, \mathbf{F}_{0_q}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left\{ W_{j,q}^t[\psi_j(z) - \bar{H}_{j0}(z)] + \Psi_{jq}(z) \right\}, \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= -f_0[H(z, \mathbf{F}_{0_1}) + \psi(z)], \\ \Psi_{j1}(z) &= -W_{j,0}^t[\bar{H}(z, \mathbf{F}_{0_1}) + \psi_j(z)], \\ \psi(z) &= \frac{R(z, \mathbf{F}_{0_1}) - z^3/6}{\mathbf{F}_{0_1}}, \quad \psi_j(z) = \frac{\bar{R}_j(z, \mathbf{F}_{0_1}) - \bar{R}_{j0}(z)}{\mathbf{F}_{0_1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_q(z) &= -f_{q-1}\Psi(z) + s_{f,1}^{(1)}R(z, \mathbf{Fo}_q) - s_{f,q-1}^{(1)}R(z, \mathbf{Fo}_1) + \\
&\quad + \sum_{p=1}^{q-2} \frac{f_{p+1} - 2f_p + f_{p-1}}{\mathbf{Fo}_1} R(z, \mathbf{Fo}_q - \mathbf{Fo}_p) - f_0 H(z, \mathbf{Fo}_q), \\
\Psi_{jq}(z) &= -W_{j,q-1}^t \Psi_j(z) + s_{j,1}^{(1)}\bar{R}_j(z, \mathbf{Fo}_q) - s_{j,q-1}^{(1)}\bar{R}_j(z, \mathbf{Fo}_1) + \\
&\quad + \sum_{p=1}^{q-2} \frac{W_{j,p+1}^t - 2W_{j,p}^t + W_{j,p-1}^t}{\mathbf{Fo}_1} \bar{R}_j(z, \mathbf{Fo}_q - \mathbf{Fo}_p) - \\
&\quad - W_{j,0}^t \bar{H}(z, \mathbf{Fo}_q), \quad q = 2, 3, \dots, K, \\
2\bar{H}_{j0}(z) &= (z_j + z)^2 + (z_j - z)^2 L_j(z) - (z_{j-1} + z)^2 - (z_{j-1} - z)^2 L_{j-1}(z), \\
24\bar{R}_{j0}(z) &= (z_j + z)^4 + (z_j - z)^4 L_j(z) - (z_{j-1} + z)^4 - (z_{j-1} - z)^4 L_{j-1}(z), \\
L_j(z) &= \text{sgn}(z_j - z), \\
f_q = f(\mathbf{Fo}_q), \quad W_{j,q}^t &= \left[1 - \frac{\bar{C}(\bar{T}(\theta_{jq}))}{\bar{\Lambda}(\bar{T}(\theta_{jq}))} \right] y_{jq} + \text{Po} \bar{W}_{j,q}, \\
W_{j,q} &= \bar{W}(\bar{T}(\theta_{jq}), z_j^*, \mathbf{Fo}_q), \quad y_{jq} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{Fo}} \right|_{z=z_j^*, \mathbf{Fo}=\mathbf{Fo}_q}, \\
\theta_{jq} &\approx \left(\frac{y_{jq} + y_{j0}}{2} + A_{jq} \right) \mathbf{Fo}_1 + \theta_0(z_j^*), \quad A_{jq} = \sum_{k=1}^{q-1} y_{jk}. \tag{16}
\end{aligned}$$

Значення y_{j0} знаходимо з використанням (10) і початкової умови з (9).

Застосовуючи метод колокацій, із (10) з урахуванням (14) і (15) отримуємо рекурентну систему нелінійних алгебричних рівнянь для знаходження значень θ_q , y_{jq} :

$$\begin{aligned}
\theta_q + f_q \Psi_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N W_{j,q}^t [z_j^2 - z_{j-1}^2 - \Psi_j(0)] &= \mathfrak{D}_0(0, \mathbf{Fo}_q) - \Psi_{0q} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Psi_{jq}(0), \\
\frac{1}{2} \mathbf{Fo}_1 y_{jq} + f_q [\Psi(z_j^*) - z_j^*] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N W_{j,q}^t [\bar{H}_{j0}(z_j^*) - \Psi_j(z_j^*)] &= \\
&= \mathfrak{D}_0(z_j^*, \mathbf{Fo}_q) - \Psi_q(z_j^*) - \left(\frac{y_{j0}}{2} + A_{jq} \right) \mathbf{Fo}_1 - \\
&- \theta_0(z_j^*) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Psi_{jq}(z_j^*), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad q = 1, 2, \dots, K, \tag{17}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\theta_q &= \theta(0, \mathbf{Fo}_q), \quad \Psi_{01} = \frac{1}{2} \Psi_0 f_0, \quad \Psi_0 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\mathbf{Fo}_1}{\pi}}, \\
\Psi_{0q} &= \Psi_0 \left\{ -2f_{q-1} + f_{q-2} + [qf_1 + f_0(1.5 - q)]\sqrt{q} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{p=1}^{q-2} (f_{p+1} - 2f_p + f_{p-1})(q-p)^{3/2} \right\}, \quad q = 2, 3, \dots, K.
\end{aligned}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо f_q та $W_{j,q}^t$, на основі (14) і (15) знайдемо $\mathfrak{F}_f(z, \text{Fo}_q)$ і $\mathfrak{F}_w(z, \text{Fo}_q)$, а за допомогою (12) і (13) – $\mathfrak{F}_f(z, \text{Fo})$ і $\mathfrak{F}_w(z, \text{Fo})$. Скориставшись тепер (10), отримаємо розв'язок задачі (5)–(8). Зауважимо, що значення $\theta(z_j^*, \text{Fo}_q)$ можна знайти також з використанням (16).

У випадку матеріалу півпростору з простою нелінійністю, тобто, коли справджується співвідношення $C(T)/\Lambda(T) = 1$, знаходження температурного поля зводиться до розв'язання отриманої з (17) системи рівнянь відносно значень змінної Кірхгофа θ_q і θ_{jq} :

$$\begin{aligned} \theta_q + f_q \Psi_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N w_{j,q} [z_j^2 - z_{j-1}^2 - \Psi_j(0)] &= \mathfrak{F}_0(0, \text{Fo}_q) - \Psi_{0q} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Psi_{jq}(0), \\ \theta_{jq} + f_q [\Psi(z_j^*) - z_j^*] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N w_{j,q} [\bar{H}_{j0}(z_j^*) - \Psi_j(z_j^*)] &= \\ &= \mathfrak{F}_0(z_j^*, \text{Fo}_q) - \Psi_q(z_j^*) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Psi_{jq}(z_j^*), \\ & j = 1, 2, \dots, N, \quad q = 1, 2, \dots, K, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} w_{j,q} &= \text{Po} \bar{W}(\bar{T}(\theta_{jq})), \quad \theta_{jq} = \theta(z_j^*, \text{Fo}_q), \\ \Psi_{jq}(z) &= -w_{j,q-1} \Psi_j(z) + s_{j,1}^{(1)} \bar{R}_j(z, \text{Fo}_q) - s_{j,q-1}^{(1)} \bar{R}_j(z, \text{Fo}_1) + \\ &+ \sum_{p=1}^{q-2} \frac{w_{j,p+1} - 2w_{j,p} + w_{j,p-1}}{\text{Fo}_1} \bar{R}_j(z, \text{Fo}_q - \text{Fo}_p) - w_{j,0} \bar{H}(z, \text{Fo}_q). \end{aligned}$$

Після розв'язання системи (18) за формулами (14) і (15) знайдемо $\mathfrak{F}_f(z, \text{Fo}_q)$ і $\mathfrak{F}_w(z, \text{Fo}_q)$, а за формулами (12), (13) – $\mathfrak{F}_f(z, \text{Fo})$ і $\mathfrak{F}_w(z, \text{Fo})$.

За відомими змінними Кірхгофа температуру визначаємо із залежності $\bar{T} = \bar{T}(\theta)$.

3. Приклади числових розрахунків.

1°. Досліджували розподіл температури у півпросторі, обмежувальна поверхня якого нагрівається протягом часу $\tau_* = 125$ с тепловим потоком густини q_0 , при $T_s = \ell q_0 / \lambda_0 = 225$ °С, $t_0 = T_* = 0$, $\ell = 0.022$ м і таких ТФХ, що відповідають сталі 20К:

$$\begin{aligned} \lambda_t(T) &= (55.059(1 - 5.97 \cdot 10^{-4} T)) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{°С})], \\ c_v(T) &= (32.667 \cdot 10^5 (1 + 7 \cdot 10^{-4} T)) [\text{Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot \text{°С})]. \end{aligned}$$

Для цієї задачі $\bar{\Lambda}(\bar{T}) = 1 - \beta_\lambda \bar{T}$, $\bar{C}(\bar{T}) = 1 + 0.1597 \bar{T}$, $\bar{T}(\theta) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\beta_\lambda \theta}}{\beta_\lambda}$,

$f(\text{Fo}) = S(\text{Fo} - \text{Fo}_*) - 1$, $\text{Fo}_* = a_0 \tau_* / \ell^2$, $a_0 = 16.854 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\beta_\lambda = 0.1343$, $K_i = 1$, $W_{j,q} = 0$, $y_{j0} = 0$, $\theta_0(z) = 0$. Тоді система рівнянь (17) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Fo}_1 y_{jq} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N W_{j,q}^t [\bar{H}_{j0}(z_j^*) - \Psi_j(z_j^*)] &= \\ &= -\mathfrak{F}_f(z_j^*, \text{Fo}_q) - \Psi_q(z_j^*) - A_{jq} \text{Fo}_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Psi_{jq}(z_j^*), \\ & j = 1, 2, \dots, N, \quad q = 1, 2, \dots, K. \end{aligned}$$

Тут

$$\vartheta_f(z, Fo) = J(z, Fo - Fo_*)S(Fo - Fo_*) - J(z, Fo),$$

$$J(z, Fo) = 2\sqrt{\frac{Fo}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Fo}\right) - z \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Fo}}\right).$$

На рис. 1 зображено залежність температури від часу на поверхнях $z = 0, 0.875, 2.125, 4.0$ при $b = 4, N = 16, \Delta\tau = 0.125$ с. Суцільні криві відповідають значенням з урахуванням температурозалежних ТФХ, штрихові криві – сталим ТФХ при $T = 0$. Штрихпунктирні криві побудовано за припущення простої нелінійності.

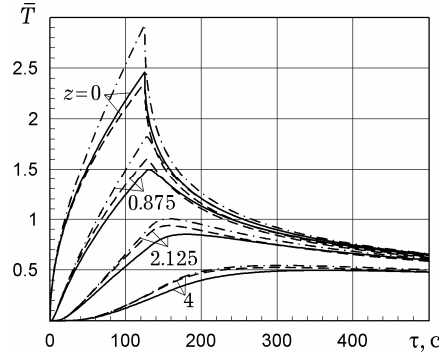


Рис. 1

З порівняльного аналізу графіків випливає, що максимальні значення температур на поверхні півпростору досягаються в кінці дії імпульсу, а всередині півпростору – в моменти часу, які перевищують тривалість імпульсу. Для цих же часів на поверхні півпростору температури є меншими за сталих ТФХ, а на внутрішніх поверхнях – за температурозалежних коефіцієнтів тепло- і температуропровідності. Всередині півпростору різниця між цими температурами може перевищувати 15%. Якщо не враховувати температурну залежність коефіцієнта температуропровідності (випадок простої нелінійності), то температури ще більше, ніж за всіх сталих ТФХ, відрізняються від обчислених з урахуванням температурної залежності обох коефіцієнтів. Причому ця відмінність з віддаленням від поверхні півпростору зменшується і вже при $z = 4$ вона практично відсутня.

Зазначимо, що за постійно діючого теплового потоку на поверхні шару точність розв'язку, отриманого з використанням аналогічної методики, досліджено в праці [13].

2°. Розглядали також півпростір із склокераміки, ТФХ якої є такими [1]:

$$\lambda_t(T) = (1.22(1 + 1.967 \cdot 10^{-4}(T - T_*))) \text{ [Вт/(м} \cdot \text{К)],}$$

$$c_v(T) = (4.1 \cdot 10^6(1 - 0.2683e^{-1.9(T-T_*)})) \text{ [Вт} \cdot \text{с/(м}^3 \cdot \text{К)].}$$

Вивчали температурне поле, яке описує розв'язок задачі (1)–(4), при $Po = 0, \bar{\alpha}(\bar{T}) = 1, \bar{t}_0 = \bar{T}_*, \bar{T}_0(z) = 1, \bar{T}_c(Fo) = 1, \bar{\varepsilon}(\bar{T}) = 1, \bar{q}(\bar{T}, Fo) = 1, T_* = 300 \text{ К}, T_s = t_c + q_0/\alpha_0 = 6000 \text{ К}, \alpha_0 = 470 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}, \ell = 0.022 \text{ м.}$

Обчислення виконано за таких параметрів:

$$\bar{\Lambda}(\bar{T}) = 1 + \beta_\lambda(\bar{T} - \bar{T}_*), \quad \bar{C}(\bar{T}) = 1 - 0.2683e^{-11.4(\bar{T} - \bar{T}_*)},$$

$$\alpha_0 = 2.9756 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \beta_\lambda = 1.18, \quad Bi = 8.475, \quad \theta_0(z) = 0, \quad W_{j,q} = 0,$$

$$y_{j0} = 0, \quad f(Fo) = Bi \bar{T}(\theta(0, Fo)) + Sk \bar{T}^4(\theta(0, Fo)),$$

$$\bar{T}(\theta) = \bar{T}_* + \frac{\sqrt{1 + 2\beta_\lambda \theta} - 1}{\beta_\lambda}.$$

Для знаходження θ_q і y_{jq} використовуємо систему рівнянь

$$\theta_q + f_q \psi_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N W_{j,q}^t [z_j^2 - z_{j-1}^2 - \psi_j(0)] = T_L(0, Fo_q) - \Psi_{0q} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Psi_{jq}(0),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Fo_1 y_{jq} + f_q [\psi(z_j^*) - z_j^*] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N W_{j,q}^t [\bar{H}_{j0}(z_j^*) - \psi_j(z_j^*)] = \\ = T_L(z_j^*, Fo_q) - \Psi_q(z_j^*) - A_{jq} Fo_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Psi_{jq}(z_j^*), \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad q = 1, 2, \dots, K,$$

де

$$\bar{T}_L(z, Fo) = \text{Bi } J(z, Fo).$$

Розглядали також випадок сталих ТФХ, за які брали значення температурозалежних ТФХ при $T = T_*$. Розв'язок відповідної задачі, яка є нелінійною тільки з огляду на граничну умову, згідно з (10) подаємо у вигляді

$$\bar{T}(z, Fo) = \bar{T}_* + \bar{T}_L(z, Fo) - \mathfrak{S}_f(z, Fo), \quad (19)$$

де в доданку $\mathfrak{S}_f(z, Fo)$ підінтегральна функція

$$f(Fo) = \text{Bi } \bar{T}(0, Fo) + \text{Sk } \bar{T}^4(0, Fo).$$

Температуру $\bar{T}(0, Fo_q)$ визначаємо із системи алгебричних рівнянь

$$\bar{T}(0, Fo_q) + f_q \psi_0 = \bar{T}_* + \bar{T}_L(0, Fo_q) - \Psi_{0q}, \quad q = 1, 2, \dots, K.$$

Зауважимо, що при $\text{Sk} = 0$ зазначена задача має аналітичний розв'язок

$$\begin{aligned} \bar{T}(z, Fo) = \bar{T}_* + (1 - \bar{T}_*) \left[\text{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{Fo}} \right) - \right. \\ \left. - \exp(z \text{Bi} + \text{Bi}^2 Fo) \text{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{Fo}} + \text{Bi} \sqrt{Fo} \right) \right], \quad (20) \end{aligned}$$

одержаний у [6] за допомогою інтегрального перетворення Лапласа.

Числові дослідження виконували за сталих і залежних від температури ТФХ.

У табл. 1 наведено значення температури на поверхні півпростору, обчислені на основі (19) за різних кроків сітки сплайна для одних і тих самих моментів часу при $\text{Sk} = \frac{\ell \varepsilon_0 \sigma_0}{\lambda_0} T_s^3 = 0$, а в табл. 2 – при $\text{Sk} = 220.73$. Для порівняння у табл. 1 наведено ще відповідні значення, обчислені за формулою (20).

З табл. 1 випливає, що найбільша похибка спостерігається на початковій стадії нагріву, причому максимальне її значення, яке досягається при $\Delta\tau = 0.125$ с, не перевищує 0.2%. Зі згущенням сітки вона стає ще меншою. Похибка зменшується також зі збільшенням часового інтервалу. І вже при $\tau = 500$ с температури з точністю до шести значущих цифр на всіх сітках співпадають з обчисленими на основі аналітичного розв'язку.

При малих часах вплив теплового випромінювання незначний, а при великих часах значення температури більш ніж у два рази є меншими від обчислених без його врахування (див. табл. 1, табл. 2). Результати табл. 2 підтверджують стійкість методу і високу точність отриманих розв'язків.

Таблиця 1

τ, c	Запропонована методика				Формула (20)
	$\Delta\tau, c$				
	0.125	0.0625	0.015625	0.0078125	
0.0078125				0.069636	0.069588
0.015625			0.077613	0.077546	0.077516
0.03125			0.088607	0.088568	0.088547
0.0625		0.104176	0.103836	0.103809	0.103795
0.125	0.125429	0.124910	0.124707	0.124689	0.124680
0.25	0.153365	0.153072	0.152939	0.152927	0.152921
0.5	0.190730	0.190544	0.190457	0.190449	0.190445
1	0.239307	0.239190	0.239134	0.239129	0.239127
2	0.300404	0.300332	0.300298	0.300285	0.300294
4	0.374058	0.374016	0.373996	0.373994	0.373993
8	0.458229	0.458206	0.458195	0.458194	0.458193
16	0.548383	0.548371	0.548366	0.548365	0.548365
32	0.638040	0.638034	0.638031	0.638031	0.638031
64	0.720460	0.720457	0.720456	0.720456	0.720456
128	0.790717	0.790716	0.790716	0.790716	0.790716
256	0.846870	0.846869	0.846869	0.846869	0.846869
500	0.888363	0.888363	0.888363	0.888363	0.888363

Таблиця 2

τ, c	$\Delta\tau, c$				
	0.125	0.0625	0.03125	0.015625	0.0078125
0.0078125					0.0696273
0.015625				0.0775933	0.0775261
0.03125			0.0886939	0.0885608	0.0885210
0.0625			0.1037953	0.1037177	0.1036913
0.125	0.1250875	0.1245781	0.1244292	0.1243786	0.1243609
0.25	0.1523556	0.1520783	0.1519842	0.1519514	0.1519398
0.5	0.1875965	0.1874302	0.1873722	0.1873519	0.1873447
1	0.2296439	0.2295498	0.2295169	0.2295053	0.2295013
2	0.2733235	0.2732769	0.2732609	0.2732553	0.2732533
4	0.3106717	0.3106531	0.3106468	0.3106446	0.3106438
8	0.3374591	0.3374529	0.3374508	0.3374501	0.3374498
16	0.3551051	0.3551032	0.3551025	0.3551023	0.3551022
32	0.3666081	0.3666075	0.3666073	0.3666072	0.3666072
64	0.3742294	0.3742292	0.3742292	0.3742291	0.3742291
128	0.3793729	0.3793728	0.3793728	0.3793728	0.3793728
256	0.3828943	0.3828943	0.3828943	0.3828942	0.3828942
500	0.3852603	0.3852603	0.3852603	0.3852603	0.3852603
600	0.3857734	0.3857734	0.3857734	0.3857734	0.3857734
700	0.3861709	0.3861709	0.3861709	0.3861709	0.3861709
800	0.3864904	0.3864904	0.3864904	0.3864904	0.3864904
900	0.3867546	0.3867546	0.3867546	0.3867546	0.3867546
1000	0.3869776	0.3869776	0.3869776	0.3869776	0.3869776

Оцінювали також похибку числових результатів, отриманих за одночасного урахування теплового випромінювання і термочутливості, залежно від довжини проміжку $[0, b]$ і кількості N розбиттів. У табл. 3 подано значення температури на поверхнях півпростору у фіксовані моменти часу, обчислені при $\Delta\tau = 0.125c$ за розбиття проміжку $[0, 1]$ ($b = 1$) на чотири

($N = 4$) і вісім ($N = 8$) частин та проміжку $[0, 2]$ ($b = 2$) – на шістнадцять частин ($N = 16$). Бачимо добру узгодженість відповідних результатів за різних N і для різних моментів часу, що підтверджує стійкий характер запропонованого алгоритму і за координатною сіткою.

Розмір області $0 \leq z \leq b$ (області, поза якою температура є близькою до $\bar{T}_* = 0.05$ або співпадає з нею), як і треба було очікувати, істотно залежить від часового інтервалу. При $\tau = 500$ с з достатньою для практичних потреб точністю можна обмежитись проміжком $[0, 1]$, поділеним на чотири частини. Для меншого часового інтервалу меншим буде b і відповідно N , а отже, і порядок системи алгебричних рівнянь.

Таблиця 3

			$\tau, \text{с}$					
			1	8	50	125	300	500
z	N	b						
0	4	1	0.21736	0.33880	0.37085	0.37850	0.38303	0.38482
	8	1	0.21921	0.34122	0.37060	0.37843	0.38301	0.38481
	16	2	0.21921	0.34122	0.37060	0.37843	0.38302	0.38486
0.0625	4	1	0.05003	0.21931	0.31763	0.34491	0.36140	0.36799
	8	1	0.06014	0.22497	0.31698	0.34473	0.36136	0.36797
	16	2	0.06014	0.22497	0.31698	0.34473	0.36141	0.36817
0.1875	4	1	0.05000	0.08628	0.21585	0.27762	0.31765	0.33393
	8	1	0.05000	0.08478	0.21559	0.27765	0.31768	0.33394
	16	2	0.05000	0.08478	0.21559	0.27765	0.31782	0.33446
0.3125	4	1	0.05000	0.05432	0.13730	0.21536	0.27464	0.29993
	8	1	0.05000	0.05349	0.13720	0.21533	0.27463	0.29992
	16	2	0.05000	0.05349	0.13720	0.21534	0.27489	0.30082
0.4375	4	1	0.05000	0.05046	0.08955	0.16251	0.23360	0.26654
	8	1	0.05000	0.05020	0.08898	0.16239	0.23359	0.26654
	16	2	0.05000	0.05020	0.08898	0.16240	0.23404	0.26791
0.5625	4	1	0.05000	0.05003	0.06520	0.12158	0.19586	0.23444
	8	1	0.05000	0.05000	0.06493	0.12143	0.19582	0.23441
	16	2	0.05000	0.05000	0.06493	0.12146	0.19657	0.23638
0.6875	4	1	0.05000	0.05000	0.05540	0.09274	0.16241	0.20418
	8	1	0.05000	0.05000	0.05492	0.09249	0.16231	0.20413
	16	2	0.05000	0.05000	0.05492	0.09256	0.16351	0.20683
0.8125	4	1	0.05000	0.05000	0.05159	0.07383	0.13376	0.17623
	8	1	0.05000	0.05000	0.05140	0.07361	0.13363	0.17616
	16	2	0.05000	0.05000	0.05140	0.07380	0.13548	0.17978
0.9375	4	1	0.05000	0.05000	0.05045	0.06242	0.11004	0.15094
	8	1	0.05000	0.05000	0.05033	0.06208	0.10986	0.15085
	16	2	0.05000	0.05000	0.05034	0.06251	0.11262	0.15560
1	4	1	0.05000	0.05000	0.05045	0.06242	0.11004	0.15094
	8	1	0.05000	0.05000	0.05033	0.06208	0.10986	0.15085
	16	2	0.05000	0.05000	0.05034	0.06251	0.11262	0.15560
1.25	4	1	0.05000	0.05000	0.05000	0.05143	0.07145	0.10166
	8	1	0.05000	0.05000	0.05000	0.05133	0.07130	0.10156
	16	2	0.05000	0.05000	0.05000	0.05190	0.07558	0.10859
1.5	4	1	0.05000	0.05000	0.05000	0.05016	0.05791	0.07724
	8	1	0.05000	0.05000	0.05000	0.05014	0.05781	0.07715
	16	2	0.05000	0.05000	0.05000	0.05031	0.06110	0.08392
1.75	4	1	0.05000	0.05000	0.05000	0.05001	0.05250	0.06309
	8	1	0.05000	0.05000	0.05000	0.05001	0.05245	0.06302
	16	2	0.05000	0.05000	0.05000	0.05004	0.05430	0.06824
2	4	1	0.05000	0.05000	0.05000	0.05000	0.05068	0.05573
	8	1	0.05000	0.05000	0.05000	0.05000	0.05066	0.05569
	16	2	0.05000	0.05000	0.05000	0.05000	0.05140	0.05880

На рис. 2 зображено розподіл температури за теплового випромінювання уздовж координати z для моментів часу $\tau = 2.5, 10, 100, 300, 500$ с. Суцільні криві побудовано з урахуванням температурної залежності ТФХ, а штрихові – за сталих ТФХ при $T = T_*$. Найбільший вплив термочутливості спостерігаємо при великих часах на деякій віддалі від поверхні півпростору. Максимальна різниця між відповідними значеннями понад 15%. На самій поверхні і в приповерхневій області при всіх часах, а всередині півпростору при малих часах вплив термочутливості є неістотним.

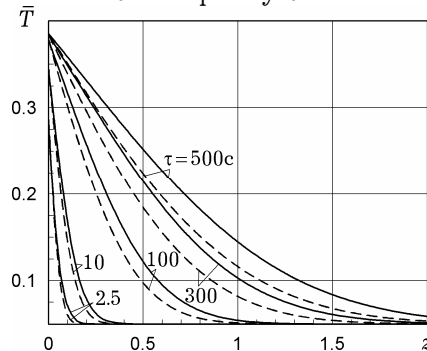


Рис. 2

Висновки. Розроблено аналітично-числову методику розрахунку нестационарних температурних полів у півпросторі за врахування низки факторів, що зумовлюють нелінійність відповідних задач. Характерним для цієї методики є те, що нелінійні задач теплопровідності за допомогою перетворення Кірхгофа, відповідної функції Гріна і лінійних сплайнів зведено до систем нелінійних алгебричних рівнянь рекурентного типу відносно значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на обмежувальній поверхні та її похідної за часом на внутрішніх плоско-паралельних поверхнях. Числові приклади засвідчили стійкість отриманих розв'язків залежно від густин часової і координатної сіток та можливість досягнення високої їхньої точності. Досліджено вплив теплового випромінювання і термочутливості.

1. *Белик В. Д., Урюков Б. А., Фролов Г. А., Ткаченко Г. В.* Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 2008. – **81**, № 6. – С. 1058–1062.
 The same: *Belik V. D., Uryukov B. A., Frolov G. A., Tkachenko G. V.* Numerical-analytical method of solution of a nonlinear unsteady heat-conduction equation // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2008. – **81**, No. 6. – P. 1099–1103.
<https://doi.org/10.1007/s10891-009-0150-8>
2. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы нестационарной теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1978. – 328 с.
3. *Березовский А. А.* Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. – Киев: Наук. думка, 1968. – 165 с.
4. *Гарматій Г. Ю., Попович В. С.* Моделювання і визначення неусталеного термопружного стану двошарової термочутливої пластини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 131–138.
 The same: *Harmatii G. Yu., Popovych V. S.* Modeling and determination of the nonsteady thermoelastic state of a two-layer thermosensitive plate // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 2. – P. 162–172.
5. *Иванов В. В., Видин Ю. В., Колесник В. А.* Процессы прогрева многослойных тел лучисто-конвективным путем. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1990. – 160 с.
6. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
7. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
8. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Споллом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.

9. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Процюк Б. В.* Про розвиток досліджень термо-механічної поведінки термочутливих тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 3. – С. 7–27.
Te same: *Kushnir R. M., Popovych V. S., Protsyuk B. V.* On the development of investigations of the thermomechanical behavior of thermally sensitive bodies // *J. Math. Sci.* – 2019. – **236**, No. 1. – P. 1–20.
10. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившіся температурні поля і напруження в тонких пластинках. – Київ: Наук. думка, 1972. – 308 с.
11. *Попович В. С., Вовк О. М.* Термопружний стан контактуючих термочутливих півпросторів з тепловиділеннями на межі дотику впродовж певного часу // *Вісн. Київ. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. Спецвипуск.* – 2015. – С. 213–218.
12. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П.* Металургійна термомеханіка. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2002. – 633 с.
13. *Процюк Б. В.* Квазістатическіе температурні напруження в многослойной термочувствительной пластине при нагреве тепловым потоком // *Теорет. и прикл. механика.* – 2003. – Вып. 38. – С. 63–69.
14. *Процюк Б.* Метод інтегральних рівнянь у нестационарних задачах теплопровідності термочутливих тіл // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2009. – Вып. 10. – С. 96–105.
15. *Процюк Б. В., Горун О. П.* Квазістатичний термопружний стан термочутливого трискладового шару за конвективно-променевого теплообміну // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – **58**, № 2. – С. 98–108.
Te same: *Protsyuk B. V., Horun O. P.* Quasistatic thermoelastic state of a heat-sensitive three-component layer under the conditions of convective-radiative heat exchange // *J. Math. Sci.* – 2017. – **223**, No. 2. – P. 117–131.
16. *Шевчук В. А., Гавриць О. П.* Вибір ітеративного методу розв'язання нелінійної нестационарної задачі теплопровідності для півпростору при радіаційному охолодженні // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 4. – С. 179–185.
Te same: *Shevchuk V. A., Havryś O. P.* Choice of the iterative method for the solution of nonlinear nonstationary problem of heat conduction for a half space in the course of radiative cooling // *J. Math. Sci.* – 2017. – **220**, No. 2. – P. 226–234. – <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3179-1>.
17. *Kupiec K., Komorowicz T.* Simplified model of transient radiative cooling of spherical body // *Int. J. Therm. Sci.* – 2010. – **49**, No. 7. – P. 1175–1182.
18. *Kushnir R., Protsyuk B.* Determination of the thermal fields and stresses in multi-layer solids by means of the constructed Green functions // *In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski.* – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Предложена методика определения температурных полей в полупространстве с учетом теплового излучения, температурной зависимости теплофизических характеристик, плотностей поверхностных и объемных источников тепла при неравномерном распределении начальной температуры. Соответствующие задачи теплопроводности с использованием преобразования Кирхгофа, функции Грина и линейных сплайнов сведены к решению рекуррентной системы нелинейных алгебраических уравнений. Приведены примеры числовых исследований.

Ключевые слова: термочувствительное полупространство, тепловое излучение, нестационарное температурное поле, преобразование Кирхгофа, функция Грина, линейные сплайны.

NONSTATIONARY NONLINEAR HEAT CONDUCTION PROBLEMS FOR HALF-SPACE

The method of determining the temperature fields in the half-space with regard for the thermal radiation, temperature dependence of thermophysical characteristics, density of surface and volume heat sources for nonuniform distribution of the initial temperature is proposed. With use the Kirchhoff transform, Green's function and linear splines the corresponding heat conduction problems are reduced to the solution of the recurrent system of nonlinear algebraic equations. Examples of numerical studies are presented.

Key words: thermosensitive half-space, thermal radiation, non-stationary temperature field, Kirchhoff transformations, Green's function, linear splines.