

ВИКОРИСТАННЯ ПОНЯТЬ КОРОТКОГО І ДОВГОГО РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

На основі напівбезмоментної теорії В. З. Власова апроксимації власних частот коливань циліндричної оболонки подано в явному вигляді з урахуванням деформаційної складової. Показано, що вплив цієї складової є незначним. Визначено межі застосовності формул апроксимацій та здійснено їх порівняння з літературними даними. Виявлено, що отримані залежності добре описують експериментальні результати. Показано, що в межах коректності застосування отримані формули краще описують нижні частоти спектра коливань циліндричних оболонок. Наведено рівняння частот і форм коливань для можливих умов опирання оболонки, а також запропоновано прості інженерні формули для аналізу спектра частот коливань.

Ключові слова: циліндрична оболонка, напівбезмоментна теорія Власова, власні частоти коливань, апроксимаційні формули.

Вступ. На сьогодні в літературі запропоновано багато аналітичних і числових методів розв'язування задач про вільні та вимушені коливання ізотропних і композитних циліндричних оболонок, наприклад, точні аналітичні методи [14], методи Релея – Рітца [7], Бубнова – Гальоркіна [11, 15], розв'язання в ряди [10], хвильові розв'язки [8]. У зв'язку з бурхливим, особливо в останні десятиліття, розвитком загальних обчислювальних комплексів на основі методу скінчених елементів (МСЕ) на перший погляд здається сумнівною потреба подальших аналітичних досліджень. Однак, на жаль, розв'язки, отримані за допомогою МСЕ, є складними для аналізу, а відомі аналітичні вирази здебільшого є складними для практичних обчислень [10, 14]. З інженерної точки зору, наявність простих аналітичних формул для оцінки власних частот коливань є актуальною, по-перше, для розв'язання задач динамічного аналізу оболонок [2, 3], а по-друге, для тестування і верифікації розв'язків, отриманих за допомогою МСЕ. Наявність таких формул дозволяє також швидко оцінити частотний спектр конструкції і, в разі необхідності, уточнити розрахунок за допомогою МСЕ.

Загострення інтересу до «інженерних формул» спостерігалось у 60-70 роках минулого століття, коли і були запропоновані апроксимаційні вирази на основі методу Буб – нова – Гальоркіна [11, 12, 15]. Мабуть, одні з найкращих інженерних оцінок отримано за допомогою гіпотез В. З. Власова і варіаційних принципів у книзі С. Н. Кана [1]. Особливо слід відмітити мембранну апроксимацію. Однак недоліком результатів цієї роботи є подекуди некоректне застосування гіпотез, а також відсутність розв'язків для крайових умов загального вигляду. Порівняльний аналіз різних апроксимаційних «явних» формул для оцінки власних частот коливань циліндричних оболонок з відомими аналітичними розв'язками наведено в [4].

Отримання явних формул для оцінки власних частот коливань циліндричних оболонок для різних умов закріплення є основною метою цієї роботи. На жаль, у навчальній і довідковій літературі такі формули відсутні, хоча вони є цінними для розрахунків та аналізу отриманих результатів. Наведено межі застосування отриманих апроксимаційних формул. Також проаналізовано вплив деформаційної складової на власні частоти та здійснено порівняння з експериментальними даними і результатами інших дослідників. Незважаючи на те, що отримані формули є відносно простими (якщо їх порівнювати з точними розв'язками), їх отримання є математично чітким і базується на припущеннях щодо характеру похідних від основних функцій, що зроблено вперше.

* dubykir@gmail.com

1. Математичне формулювання задачі.

1.1. Вихідні рівняння. Візьмемо загальновідому систему рівнянь рівноваги оболонок [3] за вихідну:

$$\frac{\partial}{\partial x} N_x + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} L + \rho h \ddot{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} N_\varphi + \frac{\partial}{\partial x} L + \frac{1}{R} Q_\varphi + \rho h \ddot{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Q_x + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} Q_\varphi - \frac{1}{R} N_\varphi + \rho h \ddot{w} = 0, \quad (3)$$

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} M_{x\varphi}, \quad Q_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} M_\varphi + \frac{\partial}{\partial x} M_{x\varphi}, \quad (4)$$

де R – радіус серединної поверхні оболонки, h – її товщина, ρ – густина матеріалу, N_x , N_φ – сили розтягу, Q_x , Q_φ – перерізуючі сили, L – дотична сила, M_x , M_φ – локальні згинальні моменти, $M_{x\varphi}$ – дотичний момент, $u(x, \varphi, t)$, $v(x, \varphi, t)$, $w(x, \varphi, t)$ – переміщення відповідно в осьовому, коловому і радіальному напрямках.

Внутрішні сили та моменти пов'язані з деформаціями за допомогою фізичних співвідношень:

$$N_\varphi = -H(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_x), \quad N_x = -H(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_\varphi), \quad L = -G\varepsilon_{x\varphi}h, \quad (5)$$

$$M_x = -H\delta(\chi_x + \mu\chi_\varphi), \quad M_\varphi = -H\delta(\chi_\varphi + \mu\chi_x), \quad M_{x\varphi} = -\frac{H\delta}{2}(1-\mu)\chi_{x\varphi}, \quad (6)$$

де ε_x , ε_φ , $\varepsilon_{x\varphi}$ – деформації серединної поверхні, χ_x , χ_φ , $\chi_{x\varphi}$ – кривини у відповідних напрямках, $H = Eh/(1-\mu^2)$, $\delta = h^2/12$, E – модуль Юнга, μ – коефіцієнт Пуассона, G – модуль пружності другого роду.

Зв'язок між деформаціями і переміщеннями точок серединної поверхні оболонки описується рівняннями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_{x\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\gamma_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_\varphi = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{R}. \quad (8)$$

Кривини пов'язані з переміщеннями такими диференціальними залежностями

– без урахування деформаційної складової:

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_\varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \quad \chi_{x\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x}, \quad (9)$$

– з її врахуванням:

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_\varphi = -\frac{w}{R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \quad (9')$$

$$\chi_{x\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x}.$$

Тут і надалі формули, що враховують деформаційну складову, позначено номером з «'».

З використанням рівнянь (5), (6) і (9) запишемо необхідні в подальшому вирази для поперечних зусиль (4):

$$\begin{aligned}
Q_x &= D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} - \frac{1+\mu}{2R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} \right], \\
Q_\varphi &= D \left[\frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{1-\mu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right],
\end{aligned} \tag{10}$$

де $D = H\delta = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$.

З урахуванням формул (9') деформаційної складової вирази (10) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
Q_x &= D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\mu}{R^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^2 \partial x} \right) \right] + \\
&\quad + D \frac{1-\mu}{2} \left[\frac{2}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} \right], \\
Q_\varphi &= D \left[\frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right) + \frac{\mu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right] + \\
&\quad + D \frac{1-\mu}{2} \left[\frac{2}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right].
\end{aligned} \tag{10'}$$

Розв'язки задач про коливання циліндричної оболонки переважно будуть за допомогою розвинень у ряди Фур'є:

$$\Psi(x, \varphi, t) = \sum_n \Psi_n \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} \sin \omega t. \tag{11}$$

З використанням розвинення (11) систему диференціальних рівнянь із частинними похідними зводять до системи звичайних диференціальних рівнянь 8-го порядку, що значно спрощує її розв'язання. Пропонуємо подальше спрощення шляхом використання припущень щодо характеру других похідних функції $\Psi(x, \varphi, t)$, тобто понять короткого та довгого розв'язків.

1.2. Використання поняття довгого розв'язку. Припустимо, що

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, \varphi, t)}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 \Psi(x, \varphi, t)}{\partial \varphi^2}. \tag{12}$$

Враховуючи (12), із системи (1)–(9) отримаємо такі оцінки внутрішніх зусиль:

$$N_x > L > N_\varphi, \quad Q_\varphi \gg Q_x. \tag{13}$$

Фактично нерівності (13) відповідають гіпотезам зв'язку між компонентами вектора переміщень напівбезмоментної теорії В. З. Власова:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \ll \{w, v\}, \quad \left(\frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial x} \right) \ll \{w, v\}. \tag{14}$$

Враховуючи гіпотези (14), зусилля і переміщення можна виразити лише через одну невідому функцію $v(x, \varphi, t)$. Однак в такому випадку рівняння (1), (2) стають некоректними, тому ці функції потрібно вилучити з рівнянь статички до застосування гіпотез (14). На противагу цьому, можна знизити порядок ключового диференціального рівняння з 8-го до 4-го, і замість восьми шуканих функцій перейти до чотирьох: $N_x(x, \varphi, t)$, $L(x, \varphi, t)$, $u(x, \varphi, t)$, $v(x, \varphi, t)$. Усі крайові умови та інші функції слід виразити через ці чотири визначальні функції.

Продиференціювавши (3) по φ і віднявши результат від рівняння (1), продиференційованого по x , отримаємо

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 Q_x}{\partial \varphi^2 \partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 Q_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\rho h}{R} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi \partial t^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2 \partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} R \right) = 0. \quad (15)$$

Підставляючи вирази поперечних сил (10) або (10') і визначивши N_x через (5) і (7) з урахуванням (13), рівняння (15) запишемо в термінах переміщень $u(x, \varphi, t)$, $v(x, \varphi, t)$, $w(x, \varphi, t)$. З використанням гіпотез (14), задачу зведемо до такого рівняння відносно функції $v(x, \varphi, t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{EhR^2}{D} v \right) + \\ & + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(2 \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 v - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\rho h R^4}{D} \ddot{v} \right] + \\ & + \frac{1}{R^4} \left[\left(\frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 v + \frac{\rho h R^4}{D} \left(\frac{\partial^4 \ddot{v}}{\partial \varphi^4} - \frac{\partial^2 \ddot{v}}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

З урахуванням деформаційної складової це рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{EhR^2}{D} v \right) + \\ & + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[2 \frac{\partial^6 v}{\partial \varphi^6} + 3 \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \right. \\ & \left. - \mu \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) - 2 \frac{\rho h R^4}{D} \ddot{v} \right] + \\ & + \frac{1}{R^4} \left[\left(\frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 v + \frac{\rho h R^4}{D} \left(\frac{\partial^4 \ddot{v}}{\partial \varphi^4} - \frac{\partial^2 \ddot{v}}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (16')$$

Подамо функцію $v(x, \varphi, t)$ у вигляді

$$v(x, \varphi, t) = \Psi(x) \sin n\varphi \sin \omega t. \quad (17)$$

З урахуванням (17), рівняння (16), (16') зведемо до такого:

$$\frac{d^4 \Psi(x)}{dx^4} + 2A \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} - B\Psi(x) = 0, \quad (18)$$

де вирази для A , B (або $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$ у випадку (16')), мають вигляд

$$A = \frac{1}{R^2} \frac{-n^6 + n^4 - n^2(1 - \mu)/4 + \rho h R^4 \omega^2 / D}{n^4 + EhR^2 / D}, \quad (19)$$

$$A' = \frac{1}{R^2} \frac{-n^6 + 3n^4/2 + n^2 - \mu n^2(n^2 - 1)/2 + \rho h R^4 \omega^2 / D}{n^4 + EhR^2 / D}, \quad (19')$$

$$B = B' = \frac{1}{R^4} \frac{\rho h R^4 \omega^2 n^2 (n^2 + 1) / D - n^4 (n^2 - 1)^2}{n^4 + EhR^2 / D}. \quad (20)$$

Розв'язок рівняння (18) знайдемо у вигляді

$$\Psi(x) = C_1 \cos \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_1 x + C_3 \operatorname{ch} \lambda_2 x + C_4 \operatorname{sh} \lambda_2 x, \quad (21)$$

де C_j , $j = 1, \dots, 4$, – сталі інтегрування; λ_1 , λ_2 – корені характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\pm A + \sqrt{A^2 + B}}. \quad (22)$$

Таким чином, усі головні шукані функції довгого розв'язку можна визначити у такому вигляді:

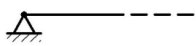
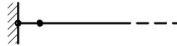
$$\begin{aligned} v(x, \varphi) &= (C_1 \cos \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_1 x + C_3 \operatorname{ch} \lambda_2 x + C_4 \operatorname{sh} \lambda_2 x) \sin n\varphi, \\ u(x, \varphi) &= \left(-C_1 \frac{R}{n} \lambda_1 \sin \lambda_1 x + C_2 \frac{R}{n} \lambda_1 \cos \lambda_1 x + \right. \\ &\quad \left. + C_3 \frac{R}{n} \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_2 x + C_4 \frac{R}{n} \lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_2 x \right) \cos n\varphi, \\ N_x(x, \varphi) &= -H(1 - \mu^2) \left(-\lambda_1^2 \frac{R}{n} (C_1 \cos \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_1 x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R}{n} \lambda_2^2 (C_3 \operatorname{sh} \lambda_2 x + C_4 \operatorname{ch} \lambda_2 x) \right) \cos n\varphi, \\ L(x, \varphi) &= H(1 - \mu^2) \left(\frac{R^2}{n^2} \left(\lambda_1^2 + \frac{\rho h \omega^2}{H(1 - \mu^2)} \right) (C_2 \cos \lambda_1 x - C_1 \sin \lambda_1 x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^2}{n^2} \left(\lambda_2^2 + \frac{\rho h \omega^2}{H(1 - \mu^2)} \right) (C_3 \operatorname{ch} \lambda_2 x + C_4 \operatorname{sh} \lambda_2 x) \right) \sin n\varphi. \quad (23) \end{aligned}$$

Для різних способів закріплення оболонки потрібно використовувати крайові умови, наведені в табл. 1. Тоді з урахуванням умови існування нетривіальних розв'язків з (23) отримаємо рівняння частот, наведені у табл. 2, де

$$\alpha = -\frac{R\lambda_1}{n}, \quad \beta = \frac{R\lambda_2}{n}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{R}{n} \alpha \left(\lambda_1^2 + \frac{\rho h \omega^2}{H(1 - \mu^2)} \right), \quad \tilde{\beta} = \frac{R}{n} \beta \left(\lambda_2^2 + \frac{\rho h \omega^2}{H(1 - \mu^2)} \right).$$

Для знаходження власних форм коливань слід скористатись [9].

Таблиця 1. Умови на краю оболонки.

№	Спосіб закріплення			Крайові умови	
	Позначення	Назва	Рисунок	Довгий розв'язок	Короткий розв'язок
1	Ш	Шарнір		$v = 0,$ $N_x = 0$	$w = 0,$ $M_x = 0$
2	З	Жорстке заземлення		$v = 0,$ $u = 0$	$w = 0,$ $\gamma_x = 0$
3	В	Вільне опирання		$N_x = 0,$ $L = 0$	$M_x = 0,$ $Q_x = 0$
4	О	Осьове закріплення без тангенціальних обмежень		$u = 0,$ $L = 0$	$\gamma_x = 0,$ $Q_x = 0$

Для спрощення пошуку власних частот можна отримати апроксимаційні формули. У випадку шарнірного закріплення колові переміщення можна розвинути в ряд $v(x, \varphi, t) = \sin(m\pi x/\ell) \sin n\varphi \sin \omega t$, де ℓ – довжина оболонки, підставляючи які в (16) або (16'), отримаємо в явному вигляді формулу для колової частоти.

Позначимо $m\pi = \eta_m$, де η_m – корінь, який залежить від умов закріплення оболонки. Тоді

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{1}{\frac{\rho R^4 h}{D} \left(\left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^2 + n^2(n^2 + 1) \right)} \left(\left(\frac{ER^2 h}{D} + n^4 \right) \left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^4 + \left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^2 \left(2n^4 - 2n^2 + \frac{1-\mu}{2} \right) n^2 + n^4(n^2 - 1)^2 \right), \quad (24)$$

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{1}{\frac{\rho R^4 h}{D} \left(\left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^2 + n^2(n^2 + 1) \right)} \left(\left(\frac{ER^2 h}{D} + n^4 \right) \left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^4 + \left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^2 \left(2n^4 + \mu n^2 - 3n^2 - \mu + 1 \right) n^2 + n^4(n^2 - 1)^2 \right). \quad (24')$$

Значення параметра η_m , точні та отримані для інших способів закріплення оболонки за допомогою наближеного розв'язання трансцендентних рівнянь аналогічно до визначення коренів рівнянь для згинальних частот коливань балок [5], наведено в табл. 2.

Таблиця 2. Корені частотного рівняння.

Тип	Рисунок	Частотне рівняння	Корені для (17), η_m
III-III		$\sin \lambda_1 \ell \operatorname{sh} \lambda_2 \ell = 0$	$m\pi$ (точний)
3-3		$2\alpha\beta \cos \lambda_1 \ell \operatorname{ch} \lambda_2 \ell + \sin \lambda_1 \ell \operatorname{sh} \lambda_2 \ell (\beta^2 - \alpha^2) = 2\alpha\beta$	$\frac{2m+1}{2} \pi$ (наближений)
B-B		$2\alpha\beta \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \lambda_1 \lambda_2 \cos \lambda_1 \ell \operatorname{ch} \lambda_2 \ell + \sin \lambda_1 \ell \operatorname{sh} \lambda_2 \ell (\beta^2 \tilde{\alpha}^2 \lambda_2^2 - \tilde{\beta}^2 \alpha^2 \lambda_1^2) = 2\alpha\beta \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \lambda_1 \lambda_2$	$\frac{2m-1}{2} \pi$ (наближений)
3-III		$\beta \operatorname{tg} \lambda_1 \ell = -\alpha \operatorname{th} \lambda_2 \ell$	$\frac{4m+1}{4} \pi$ (наближений)
3-B		$\cos \lambda_1 \ell \operatorname{ch} \lambda_2 \ell (\beta^2 \tilde{\alpha} \lambda_2 - \alpha^2 \tilde{\beta} \lambda_1) + \alpha\beta \sin \lambda_1 \ell \operatorname{sh} \lambda_2 \ell (\tilde{\alpha} \lambda_2 - \tilde{\beta} \lambda_1) = \alpha\beta (\tilde{\alpha} \lambda_1 - \tilde{\beta} \lambda_2)$	$\frac{2m-1}{2} \pi$ (наближений)
III-B		$\tilde{\alpha} \tilde{\beta} \lambda_1 \sin \lambda_1 \ell \operatorname{ch} \lambda_2 \ell = \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \lambda_2 \cos \lambda_1 \ell \operatorname{sh} \lambda_2 \ell$	$\frac{4m-3}{4} \pi$ (наближений)
O-O		$\sin \lambda_1 \ell \operatorname{sh} \lambda_2 \ell (\alpha \tilde{\beta} + \tilde{\alpha} \beta) = 0$	$(m-1)\pi$ (точний)
3-O		$\cos \lambda_1 \ell \operatorname{sh} \lambda_2 \ell (\alpha \tilde{\beta} \tilde{\beta} + \tilde{\alpha} \beta^2) = \sin \lambda_1 \ell \operatorname{ch} \lambda_2 \ell (\alpha^2 \tilde{\beta} + \alpha \tilde{\alpha} \beta)$	$\frac{4m-1}{4} \pi$ (наближений)
III-O		$\cos \lambda_1 \ell \operatorname{ch} \lambda_2 \ell (\alpha \tilde{\beta} + \tilde{\alpha} \beta) \times (\lambda_1 \alpha - \lambda_2 \beta) = 0$	$\frac{2m-1}{2} \pi$ (точний)
B-O		$\cos \lambda_1 \ell \operatorname{sh} \lambda_2 \ell (\alpha \tilde{\beta} + \tilde{\alpha} \beta) \lambda_1 \alpha \tilde{\beta} = -\sin \lambda_1 \ell \operatorname{ch} \lambda_2 \ell (\alpha \tilde{\beta} + \tilde{\alpha} \beta) \lambda_2 \tilde{\alpha} \beta$	$\frac{4m-5}{2} \pi$ (наближений)

При використанні (24), (24') слід мати на увазі, що параметр η_m є точним розв'язком тільки для трьох типів крайових умов (табл. 2). Для інших умов точнішим є безпосередній розв'язок частотних рівнянь з табл. 2.

1.3. Використання поняття короткого розв'язку. Нехай

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, \varphi, t)}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 \Psi(x, \varphi, t)}{\partial \varphi^2}. \quad (25)$$

Аналіз (1)–(9) з урахуванням (25) дозволяє оцінити внутрішні зусилля в оболонці таким чином:

$$N_\varphi > L > N_x, \quad Q_x \gg Q_\varphi. \quad (26)$$

Виконання нерівностей (26) справджує гіпотези зв'язку між компонентами вектора переміщень

$$\frac{1}{2 + \mu} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \ll w, v, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{w}{R} \ll w, v. \quad (27)$$

Враховуючи гіпотези (27), усі зусилля і переміщення можна визначити через одну шукану функцію $w(x, \varphi, t)$. На основі (26) робимо висновок, що $N_\varphi = -Eh\varepsilon_\varphi$. Тоді можемо розглядати лише рівняння (3), де поперечні зусилля подано виразами (10) або (10'). Підставивши ці вирази та поклавши $N_\varphi = -Ehw/R$, рівняння (3) запишемо у переміщеннях $u(x, \varphi, t)$, $v(x, \varphi, t)$, $w(x, \varphi, t)$. Нехтуючи коловими та осьовими переміщеннями, оскільки $w \gg u, v$, задачу можна звести до системи рівнянь відносно функції $w(x, \varphi, t)$:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\mu}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2 \partial x^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{1 - \mu^2}{R^2 h^2} w + \frac{\rho h}{D} \ddot{w} = 0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\mu w + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \\ + \frac{1}{R^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{1 - \mu^2}{R^2 h^2} w + \frac{\rho h}{D} \ddot{w} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Подамо $w(x, \varphi, t)$ у вигляді

$$w(x, \varphi, t) = \Psi(x) \cos n\varphi \sin \omega t.$$

Тоді рівняння (28) набуде вигляду (18), де замість (19), (19'), (20) потрібно використати коефіцієнти

$$A = \mu \frac{n^2}{R^2}, \quad B = -\frac{n^4}{R^4} - \frac{Eh}{R^2 D} + \frac{\rho h \omega^2}{D}, \quad (30)$$

$$A' = \frac{1}{R^2} \left(n^2 + \frac{\mu}{2} \right), \quad B' = -\frac{n^2}{R^4} (n^2 - 1) - \frac{Eh}{R^2 D} + \frac{\rho h \omega^2}{D}. \quad (30')$$

Отже, остаточні диференціальні рівняння на основі понять короткого та довгого розв'язків мають однаковий вигляд (18), де коефіцієнти виражаються формулами (19), (19'), (20) або (30), (30'). Розв'язок рівняння (28) з урахуванням розвинення (29) є аналогічними до довгого розв'язку (21), (22). Таким чином, всі головні шукані функції короткого розв'язку $M_x(x, \varphi, t)$, $Q_x(x, \varphi, t)$, $w(x, \varphi, t)$, $\gamma_x(x, \varphi, t)$ можна визначити як

$$w(x, \varphi) = (C_1 \cos \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_1 x + C_3 \operatorname{ch} \lambda_2 x + C_4 \operatorname{sh} \lambda_2 x) \cos n\varphi,$$

$$\begin{aligned}
\gamma_x(x, \varphi) &= (-C_1\lambda_1 \sin \lambda_1 x + C_2\lambda_1 \cos \lambda_1 x + \\
&\quad + C_3\lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_2 x + C_4\lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_2 x) \cos n\varphi, \\
M_x(x, \varphi) &= -\frac{D}{R^2} \left(C_1(R^2\lambda_1^2 + \mu n^2) \cos \lambda_1 x + C_2(R^2\lambda_1^2 + \mu n^2) \sin \lambda_1 x + \right. \\
&\quad + C_3(-R^2\lambda_1^2 + \mu n^2) \operatorname{ch} \lambda_2 x + \\
&\quad \left. + C_4(-R^2\lambda_1^2 + \mu n^2) \operatorname{sh} \lambda_2 x \right) \cos n\varphi, \\
Q_x(x, \varphi) &= \frac{D}{R^2} \left(C_1(R^2\lambda_1^3 + \lambda_1 n^2) \sin \lambda_1 x - C_2(R^2\lambda_1^3 + \lambda_1 n^2) \cos \lambda_1 x + \right. \\
&\quad + C_3(R^2\lambda_2^3 - \lambda_2 n^2) \operatorname{sh} \lambda_2 x + \\
&\quad \left. + C_4(R^2\lambda_2^3 - \lambda_2 n^2) \operatorname{ch} \lambda_2 x \right) \cos n\varphi. \tag{31}
\end{aligned}$$

Для різних умов закріплення оболонки варто скористатись крайовими умовами з табл. 1, які за умови існування нетривіальних розв'язків системи (31) дають частотні рівняння. Апроксимаційні формули отримаємо аналогічно до довгого розв'язку (табл. 2) у вигляді

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{D}{\rho R^4 h} \left(\left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^4 + 2\mu n^2 \left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^2 + n^4 + \frac{ER^2 h}{D} \right), \tag{32}$$

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{D}{\rho R^4 h} \left(\left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^4 + (2n^2 - \mu) \left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^2 + n^4 - n^2 + \frac{ER^2 h}{D} \right). \tag{32'}$$

У випадку $n = 0$ залежність (32) повністю відповідає отриманій в [1], що відповідає випадку осесиметричних власних коливань.

Отже, з використанням понять короткого та довгого розв'язків отримано прості інженерні формули для оцінки власних частот коливань циліндричних оболонок.

2. Аналіз отриманих залежностей. Коректність отриманих апроксимаційних формул перевірено для експериментальних даних [6]. Результати порівняння наведено в табл. 3, де також наведено результати розрахунків за спрощеними формулами з [1, 11, 12, 15]:

$$\begin{aligned}
\omega_{n,m}^2 &= \frac{EhR^2\eta_m^4}{\rho h \ell^4 n^4} + \frac{D}{\rho h} \frac{n^4}{R^4}, \\
\omega_{n,m}^2 &= \frac{Eh\eta_m^4}{\rho h R^2 \ell^4 \left(\frac{n^2}{R^2} + \frac{\eta_m^2}{\ell^2} \right)^2} + \frac{D}{\rho h} \left(\frac{n^2}{R^2} + \frac{\eta_m^2}{\ell^2} \right)^2, \\
\omega_{n,m}^2 &= \frac{\frac{ER^2 h}{D} \left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^4 + n^4 (n^2 - 1)^2}{\frac{\rho R^4 h}{D} \left[\left(\eta_m \frac{R}{\ell} \right)^4 + n^2 (n^2 + 1) \right]},
\end{aligned}$$

де параметр η_m залежить від способу закріплення оболонки. Автори [1, 11, 15] пропонують вибирати його на основі «балкових» розв'язків (див. табл. 2).

При використанні табл. 3 потрібно врахувати, що застосування формули (24) обмежене гіпотезами (12). Тому (24) слід використовувати, коли

$$\frac{\ell}{\pi m} > \frac{R}{n}. \quad (33)$$

Отже, отримані розв'язки є ефективними для знаходження нижчих частот спектра, які становлять інженерний інтерес. Що стосується вищих частот, то залежності (24) добре описують коливання оболонок при $n \gg m$. У протилежному випадку використання (24) може давати істотну похибку.

Таблиця 3. Власні частоти коливань заземленої циліндричної оболонки:

$$\ell = 397.51 \text{ мм}, R = 48.87 \text{ мм}, h = 2.565 \text{ мм}, E = 204 \text{ ГПа}, \\ \rho = 7833 \text{ кг/м}^3, \mu = 0.29.$$

m	n	2	3	4	5	6	7
1	Експеримент [6]	1240	2150	3970	6320	9230	12600
	Формула (24)	1299	2109	3884	6238	9128	12548
	Формула (24')	1296	2106	3882	6237	9127	12547
	Формула (35) з [1]	1422	2079	3843	6197	9088	12508
	Формула (33) з [15]	1748	2449	4226	6585	9478	12899
	Формула (34) з [11, 12]	1720	2529	4314	6673	9566	12987
2	Експеримент [6]	2440	2560	4160	6475	9380	12750
	Формула (24)	2824	2580	4077	6375	9252	12667
	Формула (24')	2819	2571	4071	6372	9249	12665
	Формула (35) з [1]	3457	2567	3937	6220	9095	12510
	Формула (33) з [15]	4015	2929	4322	6610	9486	12902
	Формула (34) з [11, 12]	3400	3045	4550	6852	9731	13148
3	Експеримент [6]	—	3380	4540	6720	9540	12900
	Формула (24)	5101	3561	4481	6629	9466	12869
	Формула (24')	5095	3549	4469	6621	9460	12865
	Формула (35) з [1]	6537	3736	4236	6300	9120	12519
	Формула (33) з [15]	7667	4124	4620	6692	9514	12913
	Формула (34) з [11, 12]	5434	3999	4993	7152	9990	13393
4	Експеримент [6]	—	4480	5130	7100	9890	13220
	Формула (24)	8132	5044	5163	7029	9783	13159
	Формула (24')	8125	5029	5147	7016	9773	13151
	Формула (35) з [1]	10487	5565	4866	6485	9181	12542
	Формула (33) з [15]	12598	6062	5253	6881	9579	12939
	Формула (34) з [11, 12]	7388	5241	5660	7591	10352	13728
5	Експеримент [6]	8020	5740	5910	7710	10310	13570
	Формула (24)	11950	6993	6159	7604	10214	13542
	Формула (24')	11943	6977	6138	7585	10200	13530
	Формула (35) з [1]	15165	7959	5898	6834	9302	12588
	Формула (33) з [15]	18783	8665	6302	7233	9703	12989
	Формула (34) з [11, 12]	9093	6593	6521	8174	10824	14156

В цілому залежності (24) є ефективними для тонких оболонок. При $R/h > 20$ ці формули слід використовувати з обов'язковою перевіркою умови (33). Отримані результати дозволяють стверджувати, що порівняно з апроксимаційними формулами з [1, 11, 12, 15] формули (24) краще описують експериментальні дані. Наприклад, у табл. 3 для найнижчої частоти спектра ($n = 2, m = 1$) похибка формули (24) відносно експериментальних даних становить 4 %, а похибка формули з [11, 12] – 38 %. У табл. 3 показано розраховані значення частот з урахуванням деформаційної складової відповідно до залежності (24'). Бачимо, що вплив деформаційної складової дуже малий, однак її легко можна врахувати за допомогою (24').

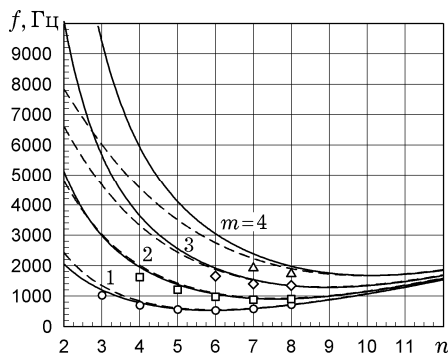


Рис. 1. Власні частоти защемленої циліндричної оболонки:
 $\ell = 304.8$ мм, $R = 76.2$ мм
 $h = 2.54$ мм, $E = 204$ ГПа,
 $\rho = 7833$ кг/м³, $\mu = 0.29$.

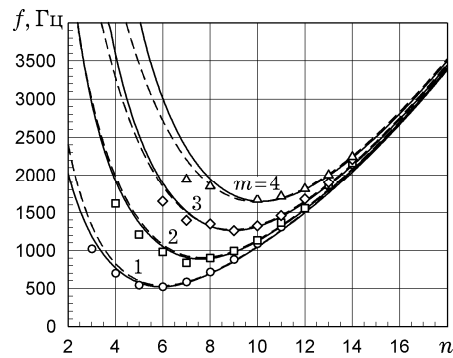


Рис. 2. Власні частоти защемленої циліндричної оболонки:
 $\ell = 305$ мм, $R = 76.2$ мм,
 $h = 0.254$ мм, $E = 196$ ГПа,
 $\rho = 7700$ кг/м³, $\mu = 0.3$.

На рис. 1 і рис. 2 наведено графіки обчислених власних частот коливань для двох защемлених циліндричних оболонок з різними геометричними і фізико-механічними параметрами при $m = 1, 2, 3, 4$. Суцільні криві на рисунках обчислені за формулою (24), штрихові криві – за формулою з [11, 12]. Крім цього, наведено також експериментальні дані, які добре описуються формулою (24): на рис. 1 з [6] і на рис. 2 з [13] для різних значень m ($\circ - m = 1$, $\square - m = 2$, $\diamond - m = 3$, $\triangle - m = 4$).

Бачимо, що для $n < 7$ і $m < 3$ апроксимація дає істотні похибки. Для $n < 7$ і $m > 3$ обидві апроксимаційні формули дають істотний діапазон результатів і експериментальні дані для цього діапазону відсутні, проте в цих межах застосування (24) вже є некоректним згідно з нерівністю (33). Зазначимо, однак, що діапазон $n < 7$ і $m > 3$ не є цікавим з інженерної точки зору, оскільки частоти цього діапазону досить високі, а важливими є нижчі 10–20 власних частот. Аналізуючи рис. 1, рис. 2, можна зробити висновок, що отримана оцінка для нижчих частот спектра є кращою від аналогічних формул в [11, 12] в середньому на 5–40 %.

Висновки. Отримано в явному вигляді апроксимаційні формули для розрахунку власних частот коливань циліндричної оболонки на основі понять короткого та довгого розв'язків. Запропоновано прості інженерні формули для аналізу спектра частот коливань для різних умов закріплення оболонки. Наведено умову коректності застосування отриманих формул. Знайдені вирази можна легко запрограмувати для оцінки нижчих частот спектра в будь-якій системі комп'ютерної математики, наприклад, Maple, MATLAB, Mathcad, Mathematica.

Новизна отриманих результатів полягає в чіткому й обґрунтованому використанні припущень щодо похідних основних функцій для аналізу власних частот коливань циліндричних оболонок. Практична цінність отриманих виразів полягає у швидкій перевірці адекватності результатів МСЕ моделі та оцінки діапазону частот для запуску розрахунку на основі МСЕ.

Показано, що вплив деформаційної складової є незначним, проте може бути легко врахований. Наведене порівняння з експериментальними результатами і даними інших дослідників дозволяє стверджувати, що отримана в цій роботі оцінка нижчих частот спектра в середньому є на 5–40 % кращою від відомих з літератури апроксимаційних формул. Показано, що в

межах коректності застосування отримані формули краще описують нижні частоти спектра коливань циліндричних оболонок.

У подальшому планується покращити точність обчислень спектра коливань шляхом комбінованого використання коротких і довгих розв'язків.

1. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. – Москва: Машиностроение, 1966. – 508 с.
2. Dubyk I., Orynyak I. Analysis of water hammer due to sudden rupture of reactor coolant system // Proc. ASME 2016 Pressure Vessels and Piping Conference (Vancouver, British Columbia, Canada, July 17–21, 2016). Vol. 4. – 2016. – Paper No. PVP2016-63589. – P. V004T04A021 (9 p.)
– <https://www.doi.org/10.1115/PVP2016-63589>.
3. Dubyk Y., Filonov V., Ishchenko O., Orynyak I., Filonova Y. Dynamic assessment of the core barrel during loss of coolant accident // Proc. ASME 2018 Pressure Vessels and Piping Conference (Prague, Czech Republic, July 15–20, 2018). Vol. 4. – 2018. – Paper No. PVP2018-84762. – P. V004T04A035 (10 p.)
– <https://www.doi.org/10.1115/PVP2018-84762>.
4. El-Mously M. Fundamental natural frequencies of thin cylindrical shells: a comparative study // J. Sound Vib. – 2003. – **264**, No. 5. – P. 1167–1186.
– [https://www.doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01391-3](https://www.doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01391-3).
5. Géradin M., Rixen D. J. Mechanical vibration. Theory and application to structural dynamics. – New York: John Wiley & Sons, 2015. – 616 p.
6. Koval L. R., Cranch E. T. On the free vibrations of thin cylindrical shells subjected to an initial static torque // Proc. 4th U.S. National Congress on Applied Mechanics (Berkeley, California, June 18–21, 1962). Vol. 1. – New York: ASME, 1962. – P. 107–117.
7. Lee H. W., Kwak M. K. Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh–Ritz method and comparison of different shell theories // J. Sound Vib. – 2015. – **353**. – P. 344–377.
– <https://www.doi.org/10.1016/j.jsv.2015.05.028>.
8. Li X. Study on free vibration analysis of circular cylindrical shells using wave propagation // J. Sound Vib. – 2008. – **311**, No. 3–5. – P. 667–682.
– <https://www.doi.org/10.1016/j.jsv.2007.09.023>.
9. Orynyak I., Dubyk Y. Approximate formulas for cylindrical shell free vibration based on Vlasov's and enhanced Vlasov's semi-momentless theory // Proc. ASME 2018 Pressure Vessels and Piping Conference (Prague, Czech Republic, July 15–20, 2018). Vol. 8. – 2018. – Paper No. PVP2018-84932. – P. V008T08A050 (10 p.)
– <https://www.doi.org/10.1115/PVP2018-84932>.
10. Qu Y., Hua H., Meng G. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries // Compos. Struct. – 2013. – **95**. – P. 307–321.
– <https://www.doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.06.022>.
11. Scedel W. A new frequency formula for closed circular cylindrical shells for a large variety of boundary conditions // J. Sound Vib. – 1980. – **70**, No. 3. – P. 309–317.
– [https://www.doi.org/10.1016/0022-460X\(80\)90301-6](https://www.doi.org/10.1016/0022-460X(80)90301-6).
12. Soedel W. Vibrations of shells and plates. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2004. – xxiv + 553 p.
13. Weingarten V. I. Free vibration of thin cylindrical shells // AIAA Journal. – 1964. – **2**, No. 4. – P. 717–722.
– <https://www.doi.org/10.2514/3.2405>.
14. Xing Y., Liu B., Xu T. Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions // Int. J. Mech. Sci. – 2013. – **75**. – P. 178–188.
– <https://www.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.06.005>.
15. Yu Y. Y. Free vibrations of thin cylindrical shells having finite lengths with freely supported and clamped edges // Trans ASME. J. Appl. Mech. – 1955. – **22**, No. 4. – P. 547–552.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОНЯТИЙ КОРОТКОГО И ДЛИННОГО РЕШЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

На основе полубезмоментной теории В. З. Власова аппроксимации собственных частот колебаний цилиндрической оболочки представлены в явном виде с учетом деформационной составляющей. Показано, что влияние этой составляющей является несущественным. Определены пределы применимости формул аппроксимации и осуществлено их сравнение с литературными данными. Выявлено, что полученные зависимости хорошо описывают экспериментальные результаты. Показано, что в пределах корректности применения полученные формулы лучше описывают нижние частоты спектра колебаний цилиндрических оболочек. Приведены уравнения частот и форм колебаний для возможных условий опирания оболочки, а также предложены простые инженерные формулы для анализа спектра частот колебаний.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, полубезмоментная теория Власова, собственные частоты колебаний, аппроксимационные формулы.

APPLICATION OF THE SHORT AND LONG SOLUTION CONCEPTS FOR COMPUTATION OF NATURAL FREQUENCIES FOR VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS

On the basis of the semi-momentless theory of V. S. Vlasov, the approximations of the natural frequencies for vibrations of a cylindrical shell are given in an explicit form with regard for the deformation component. The effect of this component is shown to be negligible. The applicability limits for the approximation formulas are determined and the latter ones are compared with the formulas from the relevant literature. It is shown that the obtained dependences sufficiently describe the experimental data. Within the applicability limits, the obtained formulas are better for covering the lower frequencies of the vibration spectrum of the cylindrical shells. The equations for frequencies and vibration modes are given for possible support conditions of shells. Simple engineering formulas are proposed for analysis of the frequency spectrum of vibrations.

Key words: cylindrical shell, Vlasov's semi-momentless theory, natural frequencies of vibrations, approximation formulas.

¹ ТОВ «ІПП-Центр», Київ,

² Ін-т проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України, Київ,

³ Таврійський нац. ун-т ім. В. І. Вернадського, Київ