УДК 517.956

Я. О. Баранецький[*], П. І. Каленюк

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З БАГАТОТОЧКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ УМОВ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПАРНОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Для рівняння порядку $2n$ із частинними похідними із постійними коефіцієнтами в області $G := \{x = (x_1, \ldots, x_m) : 0 < x_j < 1 < \infty,\ j = 1, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N}\}$ методом Фур'є вивчається задача з умовами, які є багатоточковими збуреннями крайових умов Діріхле. Для вивчення спектральних властивостей багатоточкової задачі використано оператор перетворення $R : L_2(G) \to L_2(G)$, який встановлює зв'язок $RL_0 = LR$ між самоспряженим оператором L_0 задачі Діріхле та оператором L багатоточкової задачі. Розв'язок задачі з однорідними багатоточковими умовами побудовано у вигляді ряду Фур'є за системою власних функцій оператора задачі і встановлено умови його існування і єдиності.

Ключові слова: *метод Фур'є, нелокальна задача, оператор перетворення, базис Рісса.*

Вступ. Рівняння із частинними похідними з постійними коефіцієнтами використовуються в математичній фізиці для опису різних явищ в теорії пружності, акустиці, електродинаміці.

У роботах М. С. Аграновича, В. М. Борок, М. І. Вишика, І. М. Гельфанда, Л. Еренпрайса, Б. Мальгранжа, В. П. Паламодова, Л. Хермандера, Л. Шварца, Г. Е. Шилова було створено загальну теорію крайових задач для рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Крайові задачі в обмежених областях для окремих класів диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами вивчено в працях [1, 4–6, 8, 10, 11–15].

Крайові задачі для полігармонічних рівнянь у багатовимірній кулі досліджувались у роботах [2, 7–9, 16].

Ця робота є продовженням вивчення властивостей багатоточкової задачі, розпочатого в роботах [1, 6, 15].

1. Основні позначення. Нехай

$$G := \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : 0 < x_j < 1,\ j = 1, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N}\},$$

D_j – оператор диференціювання за змінною x_j, $j = 1, \ldots, m$,

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_m^{\alpha_m}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_0^m, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m,$$

$$H_0 := L_2(0,1), \qquad H_1 := L_2(G),$$

$[H_0]$ – множина лінійних неперервних операторів, заданих в H_0,

E – тотожне перетворення в H_0,

$I : H_0 \to H_0$ – визначений в просторі H_0 оператор інволюції: $Iz(x) := z(1-x)$,

p_r, $r = 0,1$, – ортопроектори в просторі H_0:

$$p_r z(x) := \frac{1}{2}(E + (-1)^r I) z(x), \qquad z(x) \in H_0,$$

$$H_{0,r} := \{z(x) \in H_0 : z(x) \equiv p_r z(x)\}, \qquad r = 0,1,$$

$$H_2 = \{y \in H_1 : D^\alpha y \in H_1,\ |\alpha| \le 2n\},$$

[*] baryarom@ukr.net

$$(y,z;H_2) := (y,z;H_1) + \sum_{j=1}^{m} \left(D_j^{2n}y, D_j^{2n}z; H_1\right),$$

$$\|y;H_2\|^2 := \|y;H_1\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \left\|D_j^{2n}y;H_1\right\|^2,$$

$$W_2^{2n}(0,1) \equiv \left\{y \in H_0 : y^{(m)} \in C[0,1],\ y^{(2n)} \in H_0,\ m = 0,1,\ldots,2n-1\right\},$$

$$(y,u;\ W_2^{2n}(0,1)) \equiv \sum_{k=0}^{2n} (y^{(k)}, u^{(k)}; H_0), \qquad \left\|y; W_2^{2n}\ (0,1)^2\right\| \equiv (y,y; W_2^{2n}\ (0,1)),$$

$W^*(0,1)$ − простір лінійних неперервних функціоналів над $W := W_2^{2n}(0,1)$.

Систему елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називають замкнутою (повною) в сепарабельному гільбертовому просторі H, якщо лінійна оболонка цієї системи всюди щільна в H, тобто будь-який елемент простору H можна наблизити лінійною комбінацією елементів цієї системи з будь-якою точністю за нормою простору H.

Систему елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називають тотальною в H, якщо лише нульовий елемент простору H є ортогональним до всіх елементів цієї системи.

Систему елементів $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називають біортогональною в H до системи елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$, якщо $(g_m, e_k; H) = \delta_{k,m}$, $k, m \in \mathbb{N}$.

Систему елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називають базисом Рісса простору H, якщо разом з оберненим існує обмежений оператор $A : H \to H$ такий, що система $\{Ae_k\}_{k=1}^{\infty}$ є ортонормованим базисом.

2. Постановка задачі та основні результати. Розглянемо багатоточкову задачу

$$L(-D^2)y := \sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{|\alpha|} b_\alpha D^{2\alpha} y = f, \qquad x \in G, \tag{1}$$

$$\ell_{s,j} y := D_j^{2s-2} y\Big|_{x_j=0} + D_j^{2s-2} y\Big|_{x_j=1} = 0, \tag{2}$$

$$\ell_{n+s,j} y := D_j^{2s-2} y\Big|_{x_j=0} - D_j^{2s-2} y\Big|_{x_j=1} + \ell_{p,j}^1 y = 0, \tag{3}$$

де

$$\ell_{s,j}^1 y := \sum_{r=0}^{r_j} \sum_{q=0}^{m_{s,j}} b_{q,r,s,j}\, D_j^q y\Big|_{x_j = x_{j,r}},$$

$$0 \le x_{j,0} < x_{j,1} < \ldots < x_{j,r_j} < 1, \qquad b_{q,r,s,j} \in \mathbb{R},$$

$$q = 0,1,\ldots,m_{s,j}, \quad r = 0,1,\ldots,r_j, \quad m_{s,j} < 2n, \quad s = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Нехай $L : H_1 \to H_1$ − оператор задачі (1)−(3): $Ly := L(-D^2)y$, $y \in D(L)$, $D(L) := \{y \in H_2 : \ell_{s,j} y = 0,\ s = 1,\ldots,2n,\ j = 1,\ldots,m\}$, $V(L)$ − система власних функцій оператора L.

Розв'язком задачі (1)−(3) будемо називати функцію $y \in D(L)$, що задовольняє співвідношення $\left\|L(-D^2)y - f; H_1\right\| = 0$.

Нехай виконуються такі припущення.

Припущення P_1**:** $x_{r,j} = 1 - x_{r_j - r,j}$, $b_{q,r,s,j} = (-1)^q b_{q,r_j - r,s,j}$,

$q = 0,1,\dots,m_{s,j}$, $r = 0,1,\dots,r_j$, $s = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$.

Припущення P_2**:** $m_{s,j} \le 2s - 1$, $s = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$.

Припущення P_3**:** $|\lambda_k| \ge C_1 |k|^{2n}$, $k \in \mathbb{N}^m$, $0 < C_1 < \infty$.

Теорема 1. *Нехай справджується припущення* $\boldsymbol{P_1}$. *Тоді для будь-яких* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $b_{q,r,s,j} \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $q = 0,1,\dots,m_{s,j}$, $r = 0,1,\dots,r_j$, $j = 1,\dots,m$, $s = 1,\dots,n$, *оператор* L *має власні значення*

$$\lambda_k \equiv \sum_{|\alpha|\le n} b_\alpha (k_1\pi)^{2\alpha_1}(k_2\pi)^{2\alpha_2}\dots(k_m\pi)^{2\alpha_m}, \quad k \in \mathbb{N}^m,$$

і повну та мінімальну в просторі H_1 *систему* $V(L)$ *власних функцій.*

Теорема 2. *Нехай справджуються припущення* $\boldsymbol{P_1} - \boldsymbol{P_3}$. *Тоді система* $V(L)$ *є базисом Рісса у просторі* H_1.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення* $\boldsymbol{P_1} - \boldsymbol{P_3}$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in H_1$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3).

3. Спектральні властивості допоміжної крайові задачі. Нехай A_0 – оператор, породжений у просторі H_0 крайовою задачею

$$-z^{(2)}(t) = g(t), \quad t \in (0,1), \quad z(0) = z(1) = 0,$$

$$A_0 y(t) := -y^{(2)}(t), \quad y \in D(A_0),$$

$$D(A_0) := \{y \in W_2^2(0,1) : y(0) = y(1) = 0\}.$$

Лема 1. *Оператор* A_0 *має точковий спектр*

$$\sigma(A_0) := \{\mu_k \in \mathbb{R} : \mu_k = \pi^2 k^2,\ k = 1,2,\dots\}$$

і систему власних функцій

$$T := \{\tau_k(t) \in H_0 : \tau_k(t) := \sqrt{2}\sin \pi k t,\ k = 1,2,\dots\}.$$

Д о в е д е н н я. Безпосередньою підстановкою можна переконатися, що $\tau_k(t) \in D(A_0)$, $A_0\tau_k(t) = \mu_k\tau_k(t)$, $k = 1,2,\dots$. Враховуючи, що підсистема $T_s = \{\tau_{2q+s-1}(t) \in H_{0,s},\ q = 1,2,\dots\}$ власних функцій оператора A_0 при $s = 0,1$ є ортонормованим базисом простору $H_{0,s}$, отримуємо твердження леми. ♦

Розглянемо для рівняння (1) задачу з крайовими умовами

$$\ell_{0,s,j} y := D_j^{2s-2} y\big|_{x_j=0} + D_j^{2s-2} y\big|_{x_j=1} = 0, \tag{4}$$

$$\ell_{0,n+s,j} y := D_j^{2s-2} y\big|_{x_j=0} - D_j^{2s-2} y\big|_{x_j=1} = 0,$$
$$s = 1,\dots,n, \quad j = 1,\dots,m. \tag{5}$$

Нехай $L_0 : H_1 \to H_1$ – оператор задачі (1), (4), (5):

$$L_0 y := L(-D^2) y, \quad y \in D(L_0),$$

$$D(L_0) := \{y \in H_2 : \ell_{0,s,j} y = 0,\ s = 1,\dots,2n,\ j = 1,\dots,m\},$$

$$V(L_0) := \left\{ v_k(x) \in H_1 : v_k(x) := \prod_{j=1}^{m} \tau_{k_j}(x_j),\ k \in \mathbb{N}^m \right\},$$

$V(L_0)$ – ортонормований базис простору H_1,

$$J_m := \{J = (j_1, \dots, j_m),\ j_r \in \{0,1\},\ r = 1, \dots, m\},$$

$$V_J := \left\{ v_k(x) \in H_1 : v_k(x) := \prod_{j=1}^{m} \tau_{k_r}(x_r), \right.$$

$$\left. k_r = 2q_r + j_r - 1,\ q_r = 1, 2, \dots, \infty,\ r = 1, \dots, m \right\},$$

$L_{2,J}(G)$ – замикання лінійної оболонки системи функцій V_J за нормою простору H_1, $L_{0,J}$ – звуження оператора L_0 на підпростір $L_{2,J}(G)$, $J \in J_m$.

Простір H_1 є ізоморфним до гільбертового тензорного добутку m копій простору H_0. Тому оператор L_0 можна подати у вигляді співвідношення

$$L_0 = \sum_{|\alpha| \le n} b_\alpha (A_{0,1}^+)^{\alpha_1} (A_{0,2}^+)^{\alpha_2} \dots (A_{0,m}^+)^{\alpha_m}, \qquad A_{0,j}^+ : H_1 \to H_1,$$

де $A_{0,1}^+, \dots, A_{0,m}^+$ – оператори, породжені в просторі H_1 оператором A_0, що діє за змінною x_j, $j = 1, \dots, m$.

Безпосередньою підстановкою встановлюємо, що елементи системи $V(L_0)$ є власними функціями оператора L_0. Тому справджується

Зауваження 1. Оператор L_0 має власні значення $\lambda_k = \sum_{|\alpha| \le n} b_\alpha \prod_{j=1}^{m} \mu_{k_j}^{\alpha_j}$, $k \in \mathbb{N}^m$, і систему власних функцій $V(L_0)$, яка є ортонормованим базисом в H_1.

4. Оператори перетворення для диференціальних рівнянь другого порядку. Розглянемо послідовність дійсних чисел $\Theta = \{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ та оператор $A_\theta : H_0 \to H_0$, який має точковий спектр $\sigma(A_\theta)$ і систему $V(A_\theta)$ власних функцій

$$v_{1,k}(t, A_\theta) := \tau_{2k}(t),$$

$$v_{0,k}(t, A_\theta) := \tau_{2k-1}(t) + \theta_k \sqrt{2} \cos(2k-1)\pi t, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{6}$$

Лема 2. *Для будь-якої послідовності* $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *система власних функцій* $V(A_\theta)$ *оператора* A_θ *є повною і мінімальною у просторі* H_0.

Д о в е д е н н я. Покажемо від протилежного, що система функцій $V(A_\theta)$ є тотальною (повною) в просторі H_0.

Нехай існує функція $h = h_0 + h_1$, $h_s \in H_{0,s}$, $s = 0,1$, яка є ортогональною до всіх елементів системи $V(A_\theta)$. Враховуючи, що система функцій

$$V_1(A_\theta) := \{v_{1,k}(t, A_\theta) = \tau_{2k}(t),\ k = 1, 2, \dots\}$$

є ортонормованим базисом простору $H_{0,1}$, отримуємо, що $h_1 = 0$. Отже, $h = h_0 \in H_{0,0}$.

Із припущення ортогональності функції h до елементів системи $V(A_\theta)$ маємо рівності $(h, v_{0,k}(t, A_\theta); H_0) = (h_0, \tau_{2k-1}(t); H_0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Беручи до уваги, що система функцій $T_0 = \{\tau_{2k-1}(t) \in H_0 : k = 1, 2, \ldots\}$ є ортонормованим базисом простору $H_{0,0}$, отримуємо, що $h_0 \equiv 0$, $h \equiv 0$.

Розглянемо оператори $R(A_\theta) : H_0 \to H_0$:

$$R(A_\theta)\tau_{2k}(t) := v_{1,k}(t, A_\theta), \qquad R(A_\theta)\tau_{2k-1}(t) := v_{0,k}(t, A_\theta), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$S(A_\theta) := E - R(A_\theta),$$

$$S(A_\theta)\tau_{2k}(t) = 0,$$

$$S(A_\theta)\tau_{2k-1}(t) = \theta_k \sqrt{2} \cos(2k-1)\pi t \in H_{0,1}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Отже, для будь-яких $h_1(t)$, $h_0(t)$ таких, що

$$h_1(t) = \sum_{k<\infty} h_{2k}\tau_{2k}(t) \in H_{0,1}, \quad h_0(t) = \sum_{k<\infty} h_{2k-1}\tau_{2k-1}(t) \in H_{0,0},$$

маємо

$$S(A_\theta)h_1(t) = 0, \quad S(A_\theta)h_0(t) = \sqrt{2}\sum_{k<\infty} \theta_k h_{2k-1} \cos(2k-1)\pi t \in H_{0,1}. \tag{7}$$

Тому $S^2(A_\theta) = 0$ та існує оператор $\left(R(A_\theta)\right)^{-1} = E - S(A_\theta)$, визначений на щільній у просторі H_0 множині.

Отже, система $V(A_\theta)$ має біортогональну систему, тобто система $V(A_\theta)$ є мінімальною. ♦

Лема 3. *Система функцій $V(A_\theta)$ є базисом Рісса у просторі H_0 тоді й лише тоді, коли послідовність $\{\theta_k\}_{k=1}^\infty$ обмежена.*

Д о в е д е н н я. Необхідність. Якщо система функцій $V(A_\theta)$ є базисом Рісса, то вона є майже нормованою.

Тому, враховуючи співвідношення (6), отримуємо нерівність

$$0 < C_{2,j} \le \left\| v_{0,k}(t, A_\theta); H_0 \right\|^2 = \left(1 + |\theta_k|\right)^2 \le C_{1,j} < \infty, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Достатність. Враховуючи формули (6), (7) та ортонормованість базису $\{\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi t\}_{k=1}^\infty$ у просторі $H_{0,1}$, для будь-якої функції $h \in H_0$ отримаємо

$$\left\| S(A_\theta)h; H_0 \right\|^2 = \sum_k |\theta_k h_{2k-1}|^2 \le \max|\theta_k|^2 \left\| h; H_0 \right\|^2.$$

Отже, $\left\| S(A_\theta)h; [H_0] \right\|^2 \le \max|\theta_k|$, тобто існує обмежений оператор $R^*(A_\theta)$, спряжений до $R(A_\theta)$, і $\left(R^*(A_\theta)\right)^{-1} = E - S^*(A_\theta) \in [H_0]$.

Тому повна і мінімальна в просторі H_0 система функцій $W(A_\theta)$, біортогональна до системи $V(A_\theta)$, є базисом Рісса за означенням.

Беручи до уваги теорему Н. К. Барі [3], приходимо до висновку, що система функцій $V(A_\theta)$ є базисом Рісса в просторі H_0. ♦

5. Несамоспряжена задача для звичайного диференціального рівняння парного порядку. Розглянемо для будь-яких $p = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ багатоточкову спектральну задачу

$$L(-D^2)y := \sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{|\alpha|} b_\alpha D^{2\alpha} y = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

$$\ell_{1,r,q} y := D_q^{2r-2} y\Big|_{x_q=0} + D_q^{2r-2} y\Big|_{x_q=1} = 0, \tag{9}$$

$$\ell_{1,n+r,q} y := D_q^{2r-2} y\Big|_{x_q=0} - D_j^{2r-2} y\Big|_{x_q=1} = 0, \qquad q \ne j, \tag{10}$$

$$\ell_{1,n+r,q} y := D_j^{2r-2} y\Big|_{x_j=0} + D_j^{2r-2} y\Big|_{x_j=1} = 0, \tag{11}$$

$$\ell_{1,n+p,j} y := D_j^{2p-2} y\Big|_{x_j=0} - D_j^{2p-2} y\Big|_{x_j=1} + \ell^1_{p,j} y = 0,$$
$$r = 1,\dots,n, \quad q = 1,\dots,m. \tag{12}$$

Нехай $L_{1,p,j}$ – оператор задачі (8)–(12), $V(L_{1,p,j})$ – система власних функцій оператора $L_{1,p,j}$:

$$L_{1,p,j} y := L(-D^2) y, \qquad y \in D(L_{1,p,j}),$$

$$D(L_{1,p,j}) := \{y \in H_2 : \ell_{1,q,r} y = 0,\ q = 1,\dots,2n,\ r = 1,\dots,m\}.$$

Розглянемо при фіксованому $k(j) := (k_1, k_2, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^{m-1}$ розв'язок задачі (8)–(12) у вигляді добутку

$$y(x) := z(x_j) \prod_{r=1, r\ne j}^{m} \tau_{k_r}(x_r). \tag{13}$$

Для визначення невідомої функції $z(x_j) \in W$ отримаємо задачу на власні значення:

$$\sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{\alpha_j} b_\alpha \prod_{s=1, s\ne j}^{m} (\mu_{k_s})^{\alpha_s} z^{(2\alpha_j)}(x_j) = \lambda z(x_j), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{14}$$

$$\ell_{1,r,j} z := z^{(2r-2)}(0) + z^{(2r-2)}(1) = 0, \tag{15}$$

$$\ell_{1,n+r,j} z := z^{(2r-2)}(0) - z^{(2r-2)}(1) = 0, \qquad r \ne p, \quad r = 1,\dots,n, \tag{16}$$

$$\ell_{1,n+p,j} z := z^{(2p-2)}(0) - z^{(2p-2)}(1) + \ell^2_{p,j} z = 0, \qquad p = 1,\dots,n, \tag{17}$$

де

$$\ell^2_{p,j} z := \sum_{r=0}^{r_j} \sum_{q=0}^{m_{p,j}} b_{q,r,p,j} z^{(q)}(x_{j,r}), \qquad j = 1,\dots,m, \quad p = 1,\dots,n. \tag{18}$$

Нехай $L_{1,k(j)}$ – оператор задачі (14)–(17):

$$L_{1,k(j)} z := \sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{\alpha_j} b_\alpha \prod_{s=1, s\ne j}^{m} (\pi k_s)^{2\alpha_s} z^{(2\alpha_j)}(x_j), \qquad z \in D(L_{1,k(j)}),$$

$$D(L_{1,k(j)}) := \{y \in W : \ell_{1,s,j} z = 0,\ s = 1,\dots,2n\},$$

і нехай $L_{0,k(j)}$ є частковим випадком оператора $L_{1,k(j)}$ у припущенні, що $b_{q,r,p,j} = 0$, тобто (15)–(17) є умовами Діріхле.

Лема 5. *Нехай виконується припущення* P_1. *Тоді для будь-яких* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $b_{q,r,p,j} \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $q = 0,1,\dots,m_{s,j}$, $r = 0,1,\dots,r_j$, $s,p = 1,\dots,n$, $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$, $j = 1,\dots,m$, *оператор* $L_{1,k(j)}$ *має власні значення*

$$\lambda_k \equiv \sum_{|\alpha|\le n} b_\alpha (\mu_{k_1})^{\alpha_1} (\mu_{k_2})^{\alpha_2} \ldots (\mu_{k_m})^{\alpha_m}, \qquad k_j = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

і систему власних функцій $V(L_{1,k(j)})$, *яка є повною і мінімальною у просторі* H_0.

Д о в е д е н н я. Визначимо власні значення оператора $L_{1,k(j)}$. Корені $\pm\omega_r(k(j),\lambda)$ рівняння $\sum\limits_{|\alpha|\le n} (-1)^{\alpha_j} b_\alpha \prod\limits_{s=1, s\ne j}^{m} (\mu_{k_s})^{\alpha_s} \omega^{2\alpha_j} = \lambda$, яке є характеристичним для рівняння (14), виберемо так, що

$$\operatorname{Re}\omega_n(k(j),\lambda) \le \operatorname{Re}\omega_{n-1}(k(j),\lambda) \le \ldots \le \operatorname{Re}\omega_1(k(j),\lambda) \le 0, \quad k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}.$$

Фундаментальну систему розв'язків рівняння (14) означимо формулами

$$z_{q+nr,j}(x_j,\lambda) := e^{\omega_q(k(j),\lambda)x_j} + (-1)^r e^{\omega_q(k(j),\lambda)(1-x_j)} \in H_{0,r},$$

$$r = 0, 1, \quad q = 1, \ldots, n, \quad k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}. \tag{20}$$

Підставляючи загальний розв'язок $\sum\limits_{r=1}^{2n} C_r z_{r,j}(x_j,\lambda)$ диференціального рівняння (14) у крайові умови (15)–(17), для визначення власних функцій оператора $L_{1,k(j)}$ отримуємо систему лінійних рівнянь, яка має визначник

$$\Delta_{1,j}(\lambda) := \det\left(\ell_{1,s} z_{q,j}(x_j,\lambda)\right)_{s,q=1}^{2n}.$$

Враховуючи рівності $\ell_{1,p,j} z_{0,n+q}(x_j,\lambda) = 0$, $\ell_{1,n+p,j} z_{q,j}(x_j,\lambda) = 0$, p, $q = 1, \ldots, n$, отримуємо тотожність $\Delta_{1,j}(\lambda) \equiv \Delta_{0,j}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, де

$$\Delta_{0,j}(\lambda) := \det\left(\ell_{0,r,j} z_{0,q}(x_j,\lambda)\right)_{r,q=1}^{2n},$$

$$\Delta_{0,j}(\lambda) = \Delta_{0,j}^0(\lambda)\Delta_{0,j}^1(\lambda),$$

$$\Delta_{0,j}^0(\lambda) := \det\left(\ell_{0,r,j} z_{0,s}(x_j,\lambda)\right),$$

$$\Delta_{0,j}^1(\lambda) := \det\left(\ell_{0,n+r,j} z_{0,n+s}(x_j,\lambda)\right).$$

Розв'язуючи рівняння $\Delta_{0,j}(\lambda) = 0$, знаходимо власні значення (19) операторів $L_{1,k(j)}$ та $L_{0,k(j)}$ і переконуємося, що T є системою власних функцій оператора $L_{0,k(j)}$.

Підставляючи елементи системи функцій $T_1 \subset T$ у крайові умови (15)–(17), отримуємо $\tau_{2k_j}(x_j) \in D(L_{1,k(j)})$, $k_j = 1, 2, \ldots$.

Отже, власним значенням λ_k при $k_j = 2q_j$, $q_j = 1, 2, \ldots$, оператора $L_{1,k(j)}$ відповідають власні функції

$$v_{1,k_j}(x_j, L_{1,k(j)}) = \sqrt{2}\sin 2\pi k_j x_j, \qquad q_j = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

Нехай корені $\omega_{r,k_j}(\lambda_k)$ рівняння

$$\sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{\alpha_j} b_\alpha \prod_{s=1, s\ne j}^{m} (\pi k_s)^{2\alpha_s} \omega^{2\alpha_j} = \lambda_k, \qquad r = 1, \ldots, n,$$

вибрано так, що

$$\omega_{1,k_j}(\lambda_k) = i\pi(2k_j - 1),$$

$$\operatorname{Re}\omega_{n,k_j}(\lambda_k) \le \operatorname{Re}\omega_{n-1,k_j}(\lambda_k) \le \ldots \le \operatorname{Re}\omega_{2,k_j}(\lambda_k) \le 0, \quad k_j = 1,2,\ldots.$$

Розглянемо системи функцій

$$y_{0,1}(x_j,k_j,\lambda_k) := \frac{1}{2}\cos\rho_{2k_j-1}x_j \in H_{0,1}, \tag{22}$$

$$y_{0,r}(x_j,k_j,\lambda_k) \equiv \frac{1}{2}\left(1 - e^{\omega_{r,k_j}(\lambda_k)}\right)^{-1}\left(e^{\omega_{r,k_j}(\lambda_k)x_j} - e^{\omega_{r,k_j}(\lambda_k)(1-x_j)}\right),$$

$$r = 2,\ldots,n, \quad k_j = 1,2,\ldots, \tag{23}$$

і квадратну матрицю порядку n, елементи якої означимо так: елементами p-го рядка є функції (22), (23), елементами r-го рядка, $r \ne p$, є числа

$$c_{p,1,r,k_j} = (-1)^{r-1}, \quad r = 2,\ldots,n, \quad r \ne p,$$

$$c_{p,q,r,k_j} = \rho_{2k_j-1}^{1-2r}\,\ell_{0,n+r,j}\,y_{0,q}(x_j,k_j,\lambda_k) = (\omega_{q,k_j}(\lambda_k))^{2r-2},$$

$$p = 1,\ldots,n, \quad k_j = 1,2,\ldots, \quad r \ne p, \quad q = 2,\ldots,n.$$

Визначник отриманої матриці позначимо через $y_{1,p}(x_j,k_j,\lambda_k)$, $p = 1,\ldots,n$, $k_j = 1,2,\ldots$.

Зауваження 2. Для будь-якого фіксованого $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$ при $k_j \to \infty$ маємо

$$\delta_{1,k_j}(\lambda_k) = \omega_{1,2k_j}(\lambda_k)(\rho_{2k_j-1})^{-1} = 1,$$

$$\delta_{q,k_j}(\lambda_k) = \omega_{q,2k_j}(\lambda_k)(\rho_{2k_j-1})^{-1} = \varepsilon_q(1 + O(k_j^{-1})),$$

де ε_q – корені рівняння $(\varepsilon)^{2n} = 1$, $\operatorname{Im}\varepsilon_q < 0$, $q = 2,\ldots,n$.

Підставляючи функцію $y_{1,p}(x_j,k_j,\lambda_k)$ у крайові умови (15)–(17), отримаємо рівності

$$\ell_{1,r,j}\,y_{1,p}(x_j,k_j,\lambda_k) = 0, \quad r \ne n+p, \quad r = 1,\ldots,2n,$$

$$\ell_{1,n+p,j}\,y_{1,p}(x_j,k_j,\lambda_k) = c_{p,j,k}\rho_{2k_j-1}^{2p-2}, \quad c_{p,j,k} = (-1)^{p-1}\sqrt{2}W_{k_j}(\lambda_k),$$

де $W_{k_j}(\lambda_k)$ – визначник Вандермонда порядку n, побудований за числами $(\delta_{q,k_j}(\lambda_k))^2$, $q = 1,\ldots,n$.

Нехай $y_{2,p}(x_j,k_j,\lambda_k) := c_{p,j,k}\,y_{1,p}(x_j,k_j,\lambda_k)$. Тоді

$$\ell_{1,r,j}\,y_{2,p}(x_j,k_j,\lambda_k) = 0, \quad r \ne n+p,$$

$$\ell_{1,n+p,j}\,y_{2,p}(x_j,k_j,\lambda_k) = \rho_{2k_j-1}^{2p-2}.$$

Зауваження 3. Для будь-якого фіксованого $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$ при $k_j \to \infty$ числова послідовність $W_{k_j}(\lambda_k)$ збігається до визначника Вандермонда $W(\varepsilon_2^2,\ldots,\varepsilon_n^2)$, побудованого за числами $\varepsilon_2^2,\ldots,\varepsilon_n^2$. При цьому послідовність

$\delta_{q,k_j}(\lambda_k)$ збігається до ε_q, $q = 1,\ldots,n$. Тому

$$0 < C_{3,j} \le \left|c_{p,j,k}\right|^{-1} \le C_{4,j}, \qquad p = 1,\ldots,n.$$

Власні функції $v_{0,k_j}(x_j, L_{1,(k_j)})$ оператора $L_{1,(k_j)}$ означимо сумою

$$v_{0,k_j}(x_j, L_{1,(k_j)}) := \sqrt{2}\sin\rho_{2k_j-1}x_j + \eta_{p,j,k}y_{2,p}(x_j,k_j,\lambda_k),\ \ p = 1,\ldots,n. \quad (24)$$

Для визначення параметра $\eta_{p,j,k}$, підставимо вираз (24) в умови (16), (17):

$$\eta_{p,j,k} = -\sqrt{2}(\rho_{2k_j-1})^{2-2p}\ell^2_{n+p,j}\sin\rho_{2k_j-1}x_j,\ \ k_j = 1,2,\ldots,\ \ p = 1,\ldots,n. \quad (25)$$

Отже, оператор $L_{1,k(j)}$ має систему власних функцій (21), (24), (25).

Повноту системи $V(L_{1,k(j)})$ у просторі H_0 доводимо від протилежного, аналогічно до доведення леми 2.

Розглянемо оператори

$$R(L_{1,k(j)}) : H_0 \to H_0,$$

$$R(L_{1,k(j)})\tau_{2k_j+q-1}(x_j) := v_{q,k_j}(x_j, L_{1,(k_j)}), \qquad q = 0,1,$$

$$S(L_{1,k(j)}) := R(L_{1,k(j)}) - E.$$

З формул (21), (24), (25) маємо

$$S(L_{1,k(j)})\,v_{1,k_j}(x_j, L_{0,(k_j)}) = 0,$$

$$S(L_{1,k(j)})\,v_{0,k_j}(x_j, L_{0,(k_j)}) = \eta_{p,j,k}y_{2,p}(x_j,k_j,\lambda_k) \in H_{0,1}.$$

Отже, $S^2(L_{1,k(j)}) = 0$.

Оператор $R(L_{1,k(j)})$ має щільну в просторі H_0 область визначення, оскільки система функцій $V(L_{1,k(j)})$ є повною у цьому просторі. Тому оператор $\left(R(L_{1,k(j)})\right)^{-1} = E - S(L_{1,k(j)})$ також є щільно визначеним у просторі H_0.

Отже, система функцій $V(L_{1,k(j)})$ має біортогональну систему, тобто система $V(L_{1,k(j)})$ є мінімальною у просторі H_0. ♦

6. Оператори перетворення для диференціальних рівнянь парного порядку. Виберемо будь-яку послідовність дійсних чисел $\{\theta_{k_j}\}_{k_j=1}^{\infty}$, $j = 1,\ldots,m$, і розглянемо оператор $A_{\theta,j,p}$, $p = 1,\ldots,n$, власні значення якого співпадають з власними значеннями оператора A_0, а власні функції визначаються за формулами вигляду

$$v_{1,k_j}(x_j, A_{\theta,j,p}) := \sqrt{2}\sin 2\pi k_j x_j,$$

$$v_{0,k_j}(x_j, A_{j,\theta,p}) := \sqrt{2}\sin\pi(2k_j - 1)x_j + \theta_{k_j}y_{2,p}(x_j,k_j,\lambda_k),$$

$$k_j = 1,2,\ldots, \qquad p = 1,\ldots,n. \quad (26)$$

Лема 6. *Для будь-якої послідовності* $\{\theta_{k_j}\}_{k_j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *система* $V(A_{\theta,j,p})$, $j = 1,\ldots,m$, *власних функцій оператора* $A_{\theta,j,p}$ *є повною і мінімальною у просторі* H_0.

Д о в е д е н н я. Нехай $R(A_{\theta,j,p}) = E + S(A_{\theta,j,p})$ – оператор, визначений у просторі H_0, який відображає систему функцій $V(A_0)$ у систему функцій $V(A_{\theta,j,p})$:

$$R(A_{\theta,j,p})\tau_{2k_j+s-1}(x_j) := v_{s,k_j}(x_j, A_{\theta,j,p}), \qquad s = 0,1, \quad k_j = 0,1,\ldots.$$

Із означення оператора $R(A_{\theta,j,p})$, застосовуючи міркування, використані при доведенні леми 2, отримуємо, що $S^2(A_{\theta,j,p}) = 0$. Тому існує оператор $(R(A_{\theta,j,p}))^{-1} = E_j - S(A_{\theta,j,p})$.

Повноту системи $V(A_{\theta,j,p})$ доводимо аналогічно, як у доведенні леми 2, а мінімальність – аналогічно, як у доведенні леми 5.

Подамо функцію $y_{1,p}(x_j, k_j, \lambda_k)$, $p = 1,\ldots,n$, у вигляді суми

$$y_{1,p}(x_j,k_j,\lambda_k) = \Delta_{1,1}(k_j,\lambda_k) z_{1,1}(x_j,k_j,\lambda_k) + \\ + \sum_{r=2}^{n} \Delta_{1,j}(k_j,\lambda_k) z_{1,r}(x_j,k_j,\lambda_k), \qquad (27)$$

$$\Delta_{1,1}(k_j,\lambda_k) = \prod_{r=2}^{n} \delta_{r,k_j}(\lambda_k) W_{r,k_j,n-1}(\lambda_k), \quad k_j = 1,2,\ldots, \qquad (28)$$

де $W_{r,k_j,n-1}(\lambda_k)$ – визначник Вандермонда порядку $n-1$, побудований за числами $(\delta_{s,k_j}(\lambda_k))^2$, $s = 2,\ldots,n$, $k_j = 1,2,\ldots$.

Через $B_{j,p}$ позначимо частковий випадок оператора $A_{\theta,j,p}$ при $\theta_{k_j} :=$ $:= \Delta_{1,1}(k_j,\lambda_k)$, $k_j = 1,2,\ldots$, $j = 1,\ldots,m$.

Будь-який співмножник добутку (28) має границю при $k_j \to \infty$ і тому є обмеженою послідовністю. Звідси отримуємо обмеженість послідовності $\{\Delta_{1,1}(k_j,\lambda_k)\}_{k_j=1}^{\infty}$.

Отже, враховуючи лему 4, отримуємо, що система функцій $V(B_{j,p})$ є базисом Рісса в H_0. ♦

Нехай оператор $C_{j,p}$ – частковий випадок оператора $A_{\theta,j,p}$, коли $\theta_{k_j} = 1$, $k_j = 1,2,\ldots$, $j = 1,\ldots,m$.

Лема 7. *Для будь-яких фіксованих* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $k \in \mathbb{N}^m$, *система* $V(C_{j,p})$, $j = 1,\ldots,m$, *власних функцій оператора* $C_{j,p}$ *є базисом Рісса в просторі* H_0.

Д о в е д е н н я. З твердження леми 4 випливає повнота системи $V(C_{j,p})$ в просторі H_0.

Враховуючи формули (27), (28), отримуємо, що системи функцій $V(C_{j,p})$, $V(B_{j,p})$ є квадратично близькими. Тому з огляду на лему 4 та теорему Н. К. Барі [3] отримуємо твердження леми 7. ♦

Лема 8. *Для будь-яких фіксованих* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $k \in \mathbb{N}^m$, *система функцій* $V(A_{\theta,j,p})$ *є базисом Рісса в просторі* H_0 *тоді й лише тоді, коли послідовність* $\{\theta_{k_j}\}_{k_j=1}^{\infty}$ *обмежена.*

Д о в е д е н н я проводиться аналогічно до доведення леми 4. ♦

Сукупність усіх операторів $R(A_{\theta,j,p}) : H_0 \to H_0$ позначимо через $\Gamma_p(k(j))$, $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$.

Сукупність усіх операторів, означених формулою

$$R_j = E_1 \times \ldots \times E_{j-1} \times R(A_{\theta,j,p}) \times E_{j+1} \ldots \times E_m ,$$

де $R(A_{\theta,j,p}) \in \Gamma(k(j))$, $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$, позначимо через $\Gamma_{j,p}(L_0)$, $j = 1,\ldots,m$.

Нехай $R_{k(j)} := E + S_{k(j)}$ − оператор, який відображає $V(A_0)$ у $V(L_{1,k(j)})$.

З формули (24) маємо, що $R_{k(j)} := E + S_{k(j)} \in \Gamma_p(k(j))$, $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$.

Лема 9. *Нехай виконуються припущення* $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$. *Тоді система функцій* $V(L_{1,k(j)})$ *є базисом Рісса в просторі* H_0, $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$, $j = 1,\ldots,m$.

Д о в е д е н н я. З формули (24) за умови, що справджується припущення $\boldsymbol{P}_2$, випливає обмеженість елементів послідовності $\{\eta_{p,j,k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Тому, застосовуючи лему 8, отримуємо твердження леми. ♦

Вибравши дві послідовності $\{\theta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\theta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, означимо два оператори перетворення $R_{p,j} = E_j + S_{p,j} : H_0 \to H_0$, $R_{p,j} \in \Gamma_p(k(j))$, $p = 1,2$, $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$.

Враховуючи співвідношення $S_{p,j}^2 = 0$, $p = 1,2$, на множині $\Gamma_p(k(j))$ можемо означити операцію множення

$$R_{1,j}R_{2,j} = E + S_{1,j} + S_{2,j} . \tag{29}$$

Відносно операції множення (29) множина $\Gamma_p(k(j))$ є групою, оскільки $R_{p,j}^{-1} = E - S_{p,j}$. Група $\Gamma_p(k(j))$ є комутативною, оскільки $R_{1,j}R_{2,j} = R_{2,j}R_{1,j}$, $R_{1,j}, R_{2,j} \in \Gamma_p(k(j))$.

Власні функції оператора $L_{1,p,j}$ означимо рівностями

$$v_k(x, L_{1,p,j}) := v_{q,2k_j+q-1}(x_j, L_{1,k(j)}) \prod_{r=1, r\ne j}^{m} \tau_{k_r}(x_r), \quad q = 0,1, \ k \in \mathbb{N}^m . \tag{30}$$

За системою $V(L_{1,p,j})$ власних функцій (30) оператора $L_{1,p,j}$ означимо оператор $R(L_{1,p,j}) : H_1 \to H_1$, $R(L_{1,p,j}) := E + S(L_{1,p,j})$, який відображає систему функцій $V(L_0)$ у систему функцій $V(L_{1,p,j})$:

$$R(L_{1,p,j}) v_k(x) := v_k(x, L_{1,p,j}), \qquad k \in \mathbb{N}^m .$$

Оператор $R(L_{1,p,j})$ має зображення

$$R(L_{1,p,j}) = E_1 \times \ldots \times E_{j-1} \times R(L_{1,k(j)}) \times E_{j+1} \ldots \times E_m, \qquad p = 1,\ldots,n. \tag{31}$$

За аналогією з формулою (29) на множині $\Gamma_j(L_0)$ операторів $R(L_{1,p,j})$ означимо множення, відносно якого множина $\Gamma_j(L_0)$ є абелевою групою.

Теорема 4. (***i***). *Нехай виконується припущення* $\boldsymbol{P}_1$. *Тоді для будь-яких* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $b_{q,r,p,j} \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $q = 0,1,\ldots,m_{s,j}$, $r = 0,1,\ldots,r_j$, $s = 1,\ldots,n$, *оператор* $L_{1,p,j}$, $p = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m$, *має власні значення* (19) *і систему власних функцій* $V(L_{1,p,j})$, *яка є повною і мінімальною в просторі* H_1.

(***ii***). *Якщо виконуються припущення* $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2$, *то система функцій* $V(L_{1,p,j})$ *є базисом Рісса в просторі* H_1.

Д о в е д е н н я. (***i***). Згідно з лемою 4, для кожного $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$ існує система функцій $W(L_{1,k(j)}) = \{w_{k_j}(x_j, L_{1,k(j)}),\ k_j = 1,2,\ldots\}$, біортогональна до системи $V(L_{1,k(j)})$. Тому можна означити елементи системи $W(L_{1,p,j})$, біортогональної в просторі H_1 до системи $V(L_{1,p,j})$:

$$w_k(x, L_{1,p,j}) = w_{k_j}(x_j, L_{1,k(j)}) \prod_{r=1, r\ne j}^{m} \tau_{k_r}(x_r), \qquad k \in \mathbb{N}^m .$$

Отже, система $V(L_{1,p,j})$ є повною і мінімальною в просторі H_1.

(***ii***). При виконанні припущення $\boldsymbol{P}_2$, враховуючи лему 8, отримуємо майже нормованість і бесселевість системи $V(L_{1,p,j})$ у просторі H_1. Тому

$$R(L_{1,p,j}),\ (R(L_{1,p,j}))^{-1} \in [H_1] .$$

Отже, система $V(L_{1,p,j})$ є базисом Рісса в просторі H_1 за означенням. ♦

7. Багатоточкові задачі. Для рівняння (8) розглянемо задачу з умовами

$$\ell_{2,s,r} y := D_r^{2s-2} y\big|_{x_r=0} + D_r^{2s-2} y\big|_{x_r=1} = 0 , \tag{32}$$

$$\ell_{2,n+s,r} y := D_r^{2s-2} y\big|_{x_r=0} - D_r^{2s-2} y\big|_{x_r=1} = 0, \qquad r \ne j , \tag{33}$$

$$\ell_{2,s,j} y := D_r^{2s-2} y\big|_{x_j=0} + D_j^{2s-2} y\big|_{x_j=1} = 0 , \tag{34}$$

$$\ell_{2,n+p,j} y := D_j^{2p-2} y\big|_{x_j=0} - D_j^{2p-2} y\big|_{x_j=1} + \ell_{p,j}^1 y = 0 ,$$

$$p, s = 1,\ldots,n, \qquad r = 1,\ldots,m . \tag{35}$$

Нехай $L_{2,j}$ − оператор задачі (8), (32)−(35) і $V(L_{2,j})$ − система його власних функцій:

$$L_{2,j} y := L(-D^2) y , \qquad y \in D(L_{2,j}) ,$$

$$D(L_{2,j}) := \{y \in H_2 : \ell_{2,s,r} y = 0,\ s = 1,\ldots,2n,\ r = 1,\ldots,m\} .$$

При $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$ розв'язок задачі (8), (32)−(35) означимо добутком (13), (20). Невідому функцію $z(x_j)$ знаходимо як розв'язок задачі для рівняння (14) з умовами

$$\ell_{2,s,j} z := z^{(2s-2)}(0) + z^{(2s-2)}(1) = 0 , \tag{36}$$

$$\ell_{2,n+s,j} z := z^{(2s-2)}(0) - z^{(2s-2)}(1) + \ell_{s,j}^1 z = 0 , \qquad s = 1,\ldots,n . \tag{37}$$

Нехай $L_{2,k(j)}$ – оператор задачі (14), (36), (37):

$$L_{2,k(j)}z := \sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{\alpha_j} b_\alpha \prod_{s=1,s\ne j}^{m} (\pi k_s)^{2\alpha_s} z^{(2\alpha_j)}(x_j), \qquad z \in D(L_{2,k(j)}),$$

$$D(L_{2,k(j)}) := \{y \in W : \ell_{2,s,j} z = 0,\ s = 1,\ldots,2n\}.$$

Лема 10. (***i***). *Нехай справджується припущення* $\boldsymbol{P}_1$. *Тоді для будь-яких* $b_\alpha, b_{q,r,s,j} \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $q = 0,1,\ldots,m_{s,j}$, $r = 0,1,\ldots,r_j$, $m_{s,j} < 2n$, $s = 1,\ldots,n$, $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$, *оператор* $L_{2,k(j)}$ *має власні значення* (19) *і систему власних функцій* $V(L_{2,k(j)})$, *яка є повною і мінімальною у просторі* H_0.

(***ii***). *Якщо виконується припущення* $\boldsymbol{P}_2$, *то система функцій* $V(L_{2,k(j)})$, $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$, *є базисом Рісса у просторі* H_0.

Д о в е д е н н я. (***i***). Ізоспектральність операторів $L_{0,(k_j)}$ і $L_{2,k(j)}$ $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$, доводимо міркуючи подібно, як при доведенні леми 5.

Враховуючи припущення $\boldsymbol{P}_2$, безпосередньою підстановкою загального розв'язку рівняння (35) у крайові умови (36), (37) визначаємо власні функції оператора $L_{2,k(j)}$, $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$:

$$v_{1,k_j}(x_j, L_{2,k(j)}) := \sqrt{2}\sin\pi(2k_j - 1)x_j, \qquad k_j = 1,\ldots. \tag{38}$$

Власні функції $v_{0,k_j}(x_j, L_{2,k(j)})$ оператора $L_{2,k(j)}$ означимо виразом

$$v_{0,k_j}(x_j, L_{2,(k_j)}) := \sqrt{2}\sin\pi(2k_j - 1)x_j + \sum_{p=1}^{n} \eta_{p,j,k} y_{2,p}(x_j, k_j, \lambda_k), \tag{39}$$

де числа $\eta_{p,j,k}$ визначаються формулою (25). Отже, оператор $L_{2,k(j)}$ має систему власних функцій (38), (39). З формул (38), (39) випливає, що оператор $L_{2,k(j)}$ є частковим випадком оператора $A_{2,j}$.

Беручи до уваги лему 7, отримуємо, що система $V(L_{2,k(j)})$ повна та мінімальна в просторі H_0 та існує біортогональна до неї система

$$W(L_{2,k(j)}) := \{w_{k_j}(x_j, L_{2,(k_j)}) \in H_0,\ k_j = 1,2,\ldots\}, \quad k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}.$$

(***ii***). Нехай справджуються припущення $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2$. Тоді, взявши до уваги співвідношення (34), (39), отримуємо оцінку

$$\sum_{p=1}^{n} \left|\eta_{p,j,k}\right|^2 \le C_{5,j} < \infty, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{40}$$

Отже, власні функції оператора $L_{2,k(j)}$, $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$, утворюють майже нормовану систему функцій в просторі H_0.

Враховуючи твердження леми 4, отримуємо базисність за Ріссом системи функцій $V(L_{2,k(j)})$, $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$, у просторі H_0. ♦

Власні функції оператора $L_{2,j}$ означимо співвідношенням

$$v_k(x, L_{2,j}) := v_{q,p}(x_j, L_{2,k(j)}) \prod_{r=1,r\ne j}^{m} \tau_{k_r}(x_r),$$

$$k_j = 2p + q - 1, \quad q = 0,1, \quad p = 1,\ldots, \quad k \in \mathbb{N}^m. \tag{41}$$

За системою $V(L_{2,j})$ власних функцій (41) оператора $L_{2,j}$ означимо оператор перетворення

$$R(L_{2,j}) := E + S(L_{2,j}) : H_1 \to H_1, \qquad S_j(L_2) := \sum_{p=1}^{n} S(L_{1,p,j}),$$

$$R(L_{2,j}) := \prod_{p=1}^{n} R(L_{1,p,j}) \in \Gamma_j(L_0),$$

який відображає систему функцій $V(L_0)$ у систему функцій $V(L_2)$:

$$R_j(L_2) v_k(x) := v_k(x, L_2), \qquad k \in \mathbb{N}^m.$$

Теорема 5. (***i***). *Нехай справджується припущення* $\boldsymbol{P}_1$. *Тоді для будь-яких* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $b_{q,r,p,j} \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $q = 0,1,\ldots,m_{s,j}$, $r = 0,1,\ldots,r_j$, $m_{s,j} < 2n$, $s = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$, *оператор* L_2 *має власні значення* (19) *і систему власних функцій* $V(L_2)$, *яка є повною і мінімальною у просторі* H_1.

(***ii***). *Якщо виконуються припущення* $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_3$, *тоді система функцій* $V(L_2)$ *є базисом Рісса в просторі* H_1.

Д о в е д е н н я. (***i***). Нехай виконується припущення $\boldsymbol{P}_1$. Тоді, згідно з лемою 9, для кожного $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$ існує система функцій

$$W(L_{2,k(j)}) := \{ w_{k_j}(x_j, L_{2,k(j)}) \in H_0,\, k_j = 1,\ldots \},$$

біортогональна до $V(L_{2,k(j)})$. Тому елементи системи $W(L_2)$, яка у просторі H_1 є біортогональною до системи $V(L_2)$, можна означити таким спів відношенням:

$$w_k(x, L_2) = w_{k_j}(x_j, L_{2,k(j)}) \prod_{r=1, r\ne j}^{m} \tau_{k_r}(x_r), \qquad k \in \mathbb{N}^m. \tag{42}$$

Отже, система $V(L_2)$ є повною та мінімальною в просторі H_1.

(***ii***). Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4. ♦

8. Доведення теорем 1, 2. Розглянемо для рівняння (7) задачу з умовами (2), (3).

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Нехай

$$R(L) := \prod_{j=1}^{m} R(L_{2,j}), \qquad R(L) = E + \sum_{j=1}^{m} S(L_{2,j}) \in \Gamma(L_0).$$

Власні функції оператора L означимо як

$$v_k(x, L) := R(L) v_k(x), \qquad k \in \mathbb{N}^m.$$

Отже, оператор L має систему власних функцій

$$V(L) := \{ v_k(x, L) \in H_1 : v_k(x, L) = R(L) v_k(x, L_0),\, k \in \mathbb{N}^m \}.$$

Враховуючи існування для кожного $k(j) \in \mathbb{N}^{m-1}$ системи $W(L_{2,k(j)})$, біортогональної до системи власних функцій $V(L_{2,k(j)})$, визначимо елементи

$$w_k(x, L) = \prod_{j=1}^{m} w_{k_j}(x_j, L_{2,k(j)})$$

системи $W(L)$, яка є біортогональною до $V(L)$. ♦

Д о в е д е н н я **теореми 2**. При виконанні умов теореми 2 виконується теорема 5. Тому $R(L_{2,j}), (R(L_{2,j}))^{-1} \in [H_1]$, $j = 1,\dots,m$. Враховуючи співвідношення $R(L) := \prod_{j=1}^{m} R(L_{2,j})$ і комутативність групи $\Gamma(L_0)$, отримаємо, що $R(L), (R(L))^{-1} \in [H_1]$. Тому з означення базису Рісса в гільбертовому просторі отримаємо твердження теореми 2. ♦

Зауваження 4. Існують додатні числа $C_1(L)$, $C_2(L)$ такі, що для будь-якої функції

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} f_k v_k(x, L) \in H_1, \qquad f_k = (f, w_k(x, L); H_1), \tag{43}$$

справджується нерівність

$$C_1(L)\|f; H_1\|^2 \le \sum_{|k|=0}^{\infty} |f_k|^2 \le C_2(L)\|f; H_1\|^2.$$

9. Багатоточкова задача з однорідними умовами. Розглянемо багатоточкову задачу (1)–(3).

Розв'язок $u(x)$ задачі (1)–(3) знаходимо у вигляді ряду за системою власних функцій оператора L:

$$u(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} u_k v_k(x, L) \in H_1. \tag{44}$$

Підставляючи розвинення (43), (44) у рівняння (1), отримаємо рівності

$$u_k = \lambda_k^{-1} f_k, \qquad k \in \mathbb{N}^m,$$

$$u(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \lambda_k^{-1} f_k v_k(x, L).$$

Д о в е д е н н я **теореми 3.** З припущення $\boldsymbol{P_3}$ випливає, що усі коефіцієнти при старших похідних D_j^{2n} виразу $L(-D^2)$ є одного знаку і не є рівні нулеві.

Тому, не зменшуючи загальності міркувань, припустимо, що у виразі $L(-D^2)$ коефіцієнт $b_{0,0,\dots,m}$ при похідній D_m^{2n} дорівнює одиниці і доведення проведемо для змінної x_m.

Покажемо, що $h_m(x) := D_m^{2n} u(x) \in H_1$.

Нехай

$$v_{m,k}(x) := \lambda_k^{-1} D_m^{2n} v_k(x, L),$$

$$v_{m,k}(x) = \lambda_k^{-1} \prod_{j=1}^{m-1} R(L_{2,j}) \tau_{k_j}(x_j) D_m^{2n} v_{k_m}(x_m, L_{2,k(m)}), \qquad k \in \mathbb{N}^m.$$

Зафіксуємо $k(m) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$ і розглянемо функції

$$v_{k_m,k(m)}(x_m) := \lambda_k^{-1} D_m^{2n} v_{k_m}(x_m, L_{2,k(m)}), \tag{45}$$

$$v_{1,k_m,k(m)}(x_m) := (-1)^n \lambda_k^{-1} \rho_{k_m}^{2n} v_{k_m}(x_m, L_{2,(k_m)}), \quad k_m = 1,\dots. \tag{46}$$

Нехай

$$V_{k(m)} := \{v_{k_m,k(m)}(x_m) \in H_0 : k_m = 1,2,\ldots\},$$

$$V_{1,k(m)} := \{v_{1,k_m,k(m)}(x_m) \in H_0 : k_m = 1,2,\ldots\}, \qquad k(m) \in \mathbb{N}^{m-1}.$$

Зауваження 5. При виконанні припущення $\boldsymbol{P}_3$ послідовність чисел

$$\{\lambda_k^{-1}\rho_{k_m}^{2n}\}_{k_m=1}^{\infty}$$

є обмеженою зверху та знизу для кожного $k(m) \in \mathbb{N}^{m-1}$.

Тому система функцій $V_{1,k(m)}$, елементи якої отримуємо множенням на числа $\lambda_k^{-1}\rho_{k_m}^{2n}$ відповідних елементів базису Рісса $V(L_{2,k(m)})$, є базисом Рісса в H_0.

Аналогічно до доведення леми 3 доводиться

Лема 11. *Для довільного* $k(m) \in \mathbb{N}^{m-1}$ *система функцій* $V_{k(m)}$ *є повною і мінімальною у просторі* H_0.

Беручи до уваги формули (45), (46) та асимптотику при $k_m \to \infty$ функцій $z_{1,q}(x_m, k_m, \lambda_k)$, $q = 1,\ldots,n$, отримуємо таке твердження.

Лема 12. *Для довільного* $k(m) \in \mathbb{N}^{m-1}$ *система функцій* $V_{k(m)}$ *є квадратично близькою до системи* $V_{1,k(m)}$.

Тому з теореми Н. К. Барі [3] отримуємо правильність наступної леми.

Лема 13. *Для довільного фіксованого* $k(m) \in \mathbb{N}^{m-1}$ *система функцій* $V_{k(m)}$ *є базисом Рісса в просторі* H_0.

Беручи до уваги співвідношення (45) і теорему 5, отримуємо, що система функцій

$$V_m := \Big\{ v_{m,k}(x) \in H_1 : v_{m,k}(x) :=$$

$$:= \prod_{j=1}^{m-1} R(L_{2,j})\tau_{k_j}(x_j) v_{k_m,k(m)}(x_m), k \in \mathbb{N}^m \Big\}$$

є базисом Рісса в просторі H_1.

Нехай $R_m : H_1 \to H_1$ – оператор, що відображає елементи системи функцій $V(L)$ в елементи системи функцій V_m. Обидві системи є базисами Рісса. Тому $\|R_m;[H_1]\| \le C_2 < \infty$.

Отже, з огляду на зауваження 4, отримуємо, що

$$D_m^{2n}u(x) \in H_1,$$

$$\left\|D_m^{2n}L^{-1}f;[H_1]\right\| \le C_8 \|f;H_1\|^2 < \infty, \qquad C_3 = C_2^2 C_2(L).$$

Аналогічно доводимо, що $D_j^{2n}u(x) \in H_1$, $j = 1,\ldots,m-1$.

Тому, враховуючи означення норми простору H_2, отримуємо, що $u(x) \in H_2$. ♦

Зауваження 6.

- у випадку $L(-D^2)y := -\sum_{j=1}^{m} D_j^2 y$ кратність власних значень оператора L наростає та його обернений не буде цілком неперервним оператором $L_2(G) \to L_2(G)$;
- у випадку $L(-D^2)y := D_1^2 y - \sum_{j=2}^{m} D_j^2 y$ число «0» буде власним значенням нескінченної кратності.

1. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І., Копач М. І.* Нелокальна багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними з постійними коефіцієнтами парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61,** № 1. – С. 11–30.
2. *Бурский В. П., Буряченко Е. А.* Некоторые вопросы нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка в круге // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 4. – С. 498–508.
   – https://doi.org/10.4213/mzm2508.
   Те саме: *Burskii V. P., Buryachenko E. A.* Some aspects of the nontrivial solvability of homogeneous Dirichlet problems for linear equations of arbitrary even order in the disk // Math. Notes. – 2005. – **77,** No. 4. – P. 461–470.
   – doi: 10.4213/mzm2508.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
   Те саме: *Gohberg I. C., Krein M. G.* Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1969. – xv+378 p.
4. *Иргашев Б. Ю.* Об одной краевой задаче для уравнения высокого четного порядка // Изв. вузов. Математика. – 2017. – № 9. – С. 13–29.
   Те саме: *Irgashev B. Yu.* On one boundary-value problem for an equation of higher even order // Russian Math. (Izv. VUZ). – 2017. – **61,** No. 9. – P. 10–26.
   – doi: 10.3103/S1066369X1709002X.
5. *Иргашев Б. Ю.* О спектральной задаче для одного уравнения высокого четного порядка // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 7. – С. 44–54.
   Те саме: *Irgashev B. Yu.* Spectral problem for an equation of high even order // Russian Math. (Izv. VUZ). – 2016. – **60**, No. 7. – P. 37–46.
   https://doi.org/10.3103/S1066369X16070069.
6. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1993. – 230 с.
7. *Кангужин Б. Е., Кошанов Б. Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимск. мат. журн. – 2010. – **2**, № 2. – С. 41–52.
8. *Карачик В. В.* Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. – 2018. – **54,** № 5. – С. 653–662.
   – doi: 10.1134/S0374064118050096.
   Те саме: *Karachik V. V.* Riquier–Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball // Differ. Equat. – 2018. – **54,** No. 5. – P. 648–657.
   – doi: 10.1134/S0012266118050087.
9. *Карачик В. В.* Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Дифференц. уравнения. – 2015. – **51**, № 8. – С. 1038–1047.
   – https://doi.org/10.1134/S0374064115080075.
   Те саме: *Karachik V. V.* Solution of the Dirichlet problem with polynomial data for the polyharmonic equation in a ball // Differ. Equat. – 2015. – **51**, No. 8. – P. 1033–1042.
   – https://doi.org/10.1134/S0012266115080078.
10. *Кошанов Б. Д., Солдатов А. П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2016. – **52**, № 12. – С. 1666–1681.
    – https://doi.org/10.1134/S0374064116120074.
    Те саме: *Koshanov B. D., Soldatov A. P.* Boundary value problem with normal derivatives for a higher-order elliptic equation on the plane // Differ. Equat. – 2016. – **52**, No. 12. – P. 1594–1609.

– https://doi.org/10.1134/S0012266116120077.

11. *Мосолов П. П.* О задаче Дирихле для уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 3. – С. 213–218.
12. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
13. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
14. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Мат. заметки. – 2015. – **97**, № 2. – С. 262–276.
    – https://doi.org/10.4213/mzm9286.
    Те саме: *Sabitov K. B.* The Dirichlet problem for higher-order partial differential equations // Math. Notes. – 2015. – **97**, No. 1-2. – P. 255–267.
    – https://doi.org/10.1134/S0001434615010277.
15. *Baranetskij Ya. O., Ivasiuk I. Ya, Kalenyuk P. I., Solomko A. V.* The nonlocal boundary problem with perturbations of antiperiodicity conditions for the elliptic equation with constant coefficients // Карпат. мат. публікації. – 2018. – **10**, No. 2. – С. 215–234. – doi: 10.15330/cmp.10.2.215-234.
16. *Gazzola F., Grunau H. C., Sweers G.* Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains // Lect. Notes in Math. – Berlin: Springer, 2010. – **1991**. – xviii+423 p.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ УСЛОВИЙ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для уравнения порядка $2n$ в частных производных с постоянными коэффициентами в области $G := \{x = (x_1,\ldots,x_m) : 0 < x_j < 1 < \infty, j = 1,\ldots,m, m \in \mathbb{N}\}$ методом Фурье изучается задача с условиями, являющимися многоточечными возмущениями краевых условий Дирихле. Для исследования спектральных свойств многоточечной задачи использован оператор преобразования $R : L_2(G) \to L_2(G)$, который устанавливает связь $RL_0 = LR$ между самосопряженным оператором L_0 задачи Дирихле и оператором L многоточечной задачи. Решение задачи с однородными многоточечными условиями построено в виде ряда Фурье по системе собственных функций оператора задачи и установлены условия его существования и единственности.

Ключевые слова: *метод Фурье, нелокальная задача, оператор преобразования, базис Рисса.*

NONLOCAL PROBLEM WITH MULTIPOINT PERTURBATIONS OF DIRICHLET CONDITIONS FOR EVEN-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

For a partial differential equation of order $2n$ with constant coefficients in the domain $G := \{x = (x_1,\ldots,x_m) : 0 < x_j < 1 < \infty, j = 1,\ldots,m, m \in \mathbb{N}\}$, the problem with conditions that are the multipoint perturbations of Dirichlet boundary conditions is studied using the Fourier method. To study the spectral properties of a multipoint problem, the transformation operator $R : L_2(G) \to L_2(G)$ is used, which establishes a relation $RL_0 = LR$ between the self-adjoint operator L_0 of the Dirichlet problem and the operator L of the multipoint problem. The solution of problem with homogeneous multipoint conditions is constructed in the form of a Fourier series into the system of eigenfunctions of the operator of the problem and the conditions for its existence and uniqueness are established.

Key words: *Fourier method, nonlocal problem, transformation operator, Riesz basis.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
21.01.18