УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен[1], І. П. Мединський[2*]

ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ, ТЕОРЕМИ ПРО ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ І КОРЕКТНУ РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ДВОМА ГРУПАМИ ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ ВИРОДЖЕННЯ

Для однорідного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження встановлено властивість нормальності і формулу згортки для класичного фундаментального розв'язку, а також наведено теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші в класах функцій, які експоненціально зростають при $|x| \to \infty$.

Ключові слова: *ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова, фундаментальний розв'язок задачі Коші, інтегральні зображення розв'язків, коректна розв'язність задачі Коші.*

Вступ. У цій статті досліджуються деякі властивості класичних фундаментальних розв'язків задачі Коші і їх застосування до побудови інтегральних зображень розв'язків та встановлення коректної розв'язності задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь другого порядку типу рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова [21]. Таке рівняння і його різноманітні узагальнення зустрічається при побудові і дослідженні моделей, які виникають у деяких задачах теорії ймовірностей, математичного моделювання опціонів, у теорії броунівського руху, теорії конвективної дифузії, теорії бінарних електролітів, під час моделювання процесів дифузії з інерцією та розсіювання електронів, у віковому наближенні теорії сповільнених електронів, у біології, економіці та інших галузях науки [9, 13–20, 22–24].

У середині минулого сторіччя С. Д. Ейдельман у працях [10–12] з теорії параболічних за Петровським систем запропонував підхід, згідно з яким еволюція за часом t розв'язків задачі Коші характеризується їхню належність до сім'ї банахових просторів U_t (при кожному t до свого простору). Виявилось, що такий підхід дає можливість одержати точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та зображення розв'язків, визначених у відкритому шарі $\Pi_T := (0,T] \times \mathbb{R}^n$, через їхні граничні значення на гіперплощині $\{t = 0\}$ для параболічних рівнянь різної структури. У праці [2] С. Д. Івасишен довів, що простір U_t можна означити як простір класичних розв'язків u, які є обмеженими за нормою простору U_t. Так означений простір U_t можна охарактеризувати як множину значень оператора Пуассона P, визначеного на просторі Φ формулами

$$(P\varphi)(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\,, \qquad \text{де} \quad \varphi \ -\text{ фунція,} \tag{1}$$

$$(P\mu)(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi)\,, \qquad \text{де} \quad \mu \ -\text{ узагальнена міра.} \tag{2}$$

У формулах (1), (2) $(t,x) \in \Pi_T$, а Z – фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для відповідного рівняння. При цьому відображення $P : \Phi \to U$ є ізоморфізмом. Отже, С. Д. Івасишен поповнив розглянуті

* i.p.medynsky@gmail.com

С. Д. Ейдельманом сім'ї просторів (зокрема, в нього Φ може бути простором узагальнених мір), поширив результати на ширший клас систем – $\overrightarrow{2b}$-параболічні (параболічні за Ейдельманом) і довів у певному сенсі обернене твердження. У подальшому підхід Ейдельмана – Івасишена [16, 17] розвивався і багатократно реалізовувався С. Д. Івасишеном [3] і його учнями. Застосування цього підходу у випадках конкретного рівняння зводиться до побудови ФРЗК Z і встановлення оцінок Z і його похідних, вибору підходящих просторів Φ і знаходження відповідних просторів U_t, $t \in (0,T]$. Реалізація підходу істотно залежить від наявності точної інформації про ФРЗК.

Основним джерелом такої інформації і методом побудови ФРЗК є метод Леві та його модифікації [17, 20]. Проте застосування цього методу до вироджених рівнянь типу Колмогорова із залежними від усіх змінних коефіцієнтами істотно ускладнюється. Крім традиційних, виникають серйозні труднощі, пов'язані з виродженістю рівняння. Запропонований авторами підхід, полягає у поетапному застосуванні методу Леві, розвивався і застосовувався до ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з різною кількістю груп просторових змінних у працях [4–8]. Класичний ФРЗК (КФРЗК) для рівнянь, коефіцієнти яких не залежать від змінних виродження, побудовано в [4], у [5, 6] – для рівнянь з однією групою просторових змінних виродження, а в працях [7, 8] – для рівнянь з двома групами просторових змінних виродження. У цих працях також знайдено оцінки функції Z та оцінки її похідних.

Отже, пропонована стаття є продовженням розпочатих раніше досліджень ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами змінних виродження в напрямку отримання додаткових властивостей КФРЗК і їх застосування до встановлення теорем про інтегральні зображення розв'язків, а також коректну розв'язність задачі Коші для відповідного однорідного рівняння.

1. Позначення і припущення. Нехай n, n_1, n_2 і n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge 1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$; $\mathbb{N}_j := \{1,\dots,j\}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \bigcup \{0\}$, $j \in \mathbb{N}$, $m_j = j - 1/2$, $j \in \mathbb{N}_3$. Будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x := (x_1, x_2, x_3)$, де компоненти $x_j := (x_{j1},\dots,x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j := (k_{j1},\dots,k_{jn_j}) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Будемо використовувати позначення $M := m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3$; $M_k := m_1 |k_1| + m_2 |k_2| + m_3 |k_3|$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, де $|k_j| := k_{j1} + \ldots + k_{jn_j}$. Для кожного додатного $T > 0$ замикання множини Π_T позначимо через $\overline{\Pi}_T$.

Крім наведених вище, користуватимемось ще такими позначеннями:

$$\Delta_x^z f(\cdot,x,\cdot) := f(\cdot,x,\cdot) - f(\cdot,z,\cdot), \qquad \Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot,x,\cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot,x,\cdot), \qquad s \in \mathbb{N}_3,$$

$$z^{(0)} := x, \quad z^{(1)} := (z_1, x_2, x_3), \quad z^{(2)} := (x_1, z_2, x_3), \quad z^{(3)} := (x_1, x_2, z_3),$$

$$x^{(1)} := (x_1, z_2, z_3), \qquad x^{(2)} := (x_1, x_2, z_3),$$

$$X(t) := \big(X_1(t), X_2(t), X_3(t)\big),$$

$$X_1(t) := x_1, \quad X_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1, \quad X_3(t) := x_3 + t x_2' + 2^{-1} t^2 x_1', \qquad t \in \mathbb{R},$$

$$\hat{x}_1 := (x_{11},\dots,x_{1n_2}), \qquad x_1' := (x_{11},\dots,x_{1n_3}), \qquad x_2' := (x_{21},\dots,x_{2n_3}),$$

$$\rho(t,x,\xi) := \sum_{j=1}^{3} t^{1-2j} \left| X_j(t) - \xi_j \right|^2, \qquad t > 0, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$E_c(t,x,\xi) := \exp\{-c\,\rho(t,x,\xi)\}, \qquad t > 0, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Розглянемо рівняння

$$Lu(t,x) := \left(S - A(t,x,\partial_{x_1})\right)u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \Pi_T, \tag{3}$$

в якому

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}},$$

$$A(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x).$$

Будемо припускати, що коефіцієнти $a_{j\ell}$, a_j і a_0 рівняння (3) є комплекснозначними функціями в $\overline{\Pi}_T$, які задовольняють такі умови:

(***i***) $a_{j\ell}$, a_j, a_0 є обмеженими й неперервними за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x) \in \overline{\Pi}_T$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11},\ldots,\sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1\ell} \ge \delta\left|\sigma_1\right|^2;$$

(***ii***) $a_{j\ell}$, a_j, a_0 є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists H_1 > 0, \quad \exists \alpha_1 \in (0,1) \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(1)})\} \subset \overline{\Pi}_T:$$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)\right| \le H_1 \left|x_1 - z_1\right|^{\alpha_1}, \tag{4}$$

$$\exists H_2 > 0, \quad \exists \alpha_2 \in (1/3,\, 2/3] \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \overline{\Pi}_T, \quad \forall h \in [0,T]:$$

$$\left|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)\right| \le H_2\left(h^{m_2\alpha_2} + \left|X_2(h) - z_2\right|^{\alpha_2}\right), \tag{5}$$

$$\exists H_3 > 0, \quad \exists \alpha_3 \in (3/5,\, 2/3] \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \overline{\Pi}_T, \quad \forall h \in [0,T]:$$

$$\left|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)\right| \le H_3\left(h^{m_3\alpha_3} + \left|X_3(h) - z_3\right|^{\alpha_3}\right), \tag{6}$$

$$\exists H_4 > 0 \quad \forall\{(t,x),(t,\xi^{(1)}),(t,z^{(2)})\} \subset \overline{\Pi}_T, \quad \forall h \in [0,T]:$$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1}\Delta_{x_s}^{z_s} a(t,x)\right| \le H_4\left|x_1 - \xi_1\right|^{\alpha_1}\left(h^{m_s\alpha_s} + \left|X_s(h) - z_s\right|^{\alpha_s}\right), \quad s \in \{2,3\}, \tag{7}$$

де a − будь-який з коефіцієнтів $a_{j\ell}$, a_j і a_0. В умові (7) сталі α_1, α_2 і α_3 такі, як у відповідних умовах (4)−(6);

(***iii***) коефіцієнти $a_{j\ell}$, a_j, a_0 виразу $A(t,x,\partial_{x_1})$ мають обмежені похідні того самого вигляду, при яких вони стоять. Похідні від цих коефіцієнтів в шарі $\overline{\Pi}_T$ задовольняють умову (***ii***).

Зауважимо, що при $h = 0$ з умов (5), (6) випливають звичайні умови Гельдера за змінними x_2 і x_3. Достатні умови виконання (5), (6) подані відповідно в працях [5] і [7].

КФРЗК для рівняння (3) – це така функція $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, яка має за змінними t і x всі похідні, що входять у рівняння (3) і для будь-якого $\tau \in [0,T)$ та довільних неперервних і обмежених функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ вираз (1) (або (2) у випадку узагальненої міри) визначає в шарі $(\tau,T] \times \mathbb{R}^n$ розв'язок однорідного рівняння (3) за початкової умови

$$u(t,x)\big|_{t=\tau} = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

При цьому функція (1) задовольняє умову (8) у такому сенсі:

$$\lim_{t\to\tau} u(t,x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Зауважимо, що прямування до границі $\varphi(x)$ в (9) рівномірне на кожному компакті простору $\mathbb{R}^n$.

Як доведено в [7, 8], за умов (***i***)–(***ii***) для рівняння (3) існує КФРЗК Z, для якого справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{10}$$

$$|SZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{11}$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k := (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1| + |k_2| + |k_3| \le 1$, C – додатна стала.

Оскільки при $|x| \to \infty$ функція Z прямує експоненціально до нуля, то густини потенціалів (1) чи (2) можуть відповідно зростати. При цьому самі потенціали, а отже, і самі розв'язки можуть експоненціально зростати при $|x| \to \infty$. Як відомо з [16] в аналогічних випадках, порядки такого зростання визначаються порядками рівнянь, а типи зростання описуються спеціальними функціями, залежними від t. За допомогою цих функцій, так само як у [17], означимо необхідні норми і відповідні простори Φ та U_t, $t \in (0,T]$.

2. Означення норм і просторів. Розглянемо набори функцій $\mathbf{k}(t,\mathbf{a})$ і $\boldsymbol{\ell}(t)$, $t \in (0,T]$, які означуємо таким способом:

$$\mathbf{k}(t,\mathbf{a}) := (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3)), \quad \boldsymbol{\ell}(t) := (\ell_1(t), \ell_2(t), \ell_3(t)),$$

$$k_j(t,a_j) := c_0 a_j (c_0 - a_j t^{2(j-1)+1})^{-1}, \qquad j \in \mathbb{N}_3;$$

$$\ell_1(t) := k_1(t,a_1) + 2t^2 k_2(t,a_2) + 2t^4 k_3(t,a_3),$$

$$\ell_2(t) := 2k_2(t,a_2) + 2t^2 k_3(t,a_3), \qquad \ell_3(t) := 4k_3(t,a_3), \tag{12}$$

де $c_0 \in (0,c)$, c – стала з оцінок (10) і (11), $\mathbf{a} := (a_1,a_2,a_3)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $T < \min\limits_{j\in\mathbb{N}_3} (c_0/a_j)^{1/(2j-1)}$. Введемо ще таке позначення:

$$[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),\xi] := \sum_{j=1}^{3} k_j(t,a_j)\left|\xi_j\right|^2, \qquad t > 0, \qquad \xi_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}_3.$$

Функції $\mathbf{k}(t,\mathbf{a})$ і $\boldsymbol{\ell}(t)$ мають такі властивості:

$$\mathbf{k}(0,\mathbf{a}) = \mathbf{a}, \qquad k_j(t,a_j) \ge a_j, \qquad \ell_j(t) \ge a_j, \qquad j \in \mathbb{N}_3,$$

$$k_1(t-\tau, k_1(\tau,a_1)) = k_1(t,a_1),$$

$$k_j(t-\tau, k_j(\tau,a_j)) \le k_j(t,a_j), \qquad j \in \{2,3\}, \qquad 0 \le \tau \le t \le T, \tag{13}$$

а також справджується нерівність

$$-c_0\rho(t,x,\xi)+[\mathbf{a},\xi]\le[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),X(t)],\qquad t\in(0,T],\qquad \{x,\xi\}\in\mathbb{R}^n. \qquad (14)$$

Нехай $p\in[1,\infty]$ і $u(t,x)$, $(t,x)\in\overline{\Pi}_T$, − задана комплекснозначна функція, вимірна при будь-якому $t\in[0,T]$. Для кожного $t\in[0,T]$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}:=\|u(t,x)\exp\{-[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),X(t)]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\boldsymbol{\ell}(t)}:=\|u(t,x)\exp\{-[\boldsymbol{\ell}(t),x]\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Використовуватимемо такі простори:

$L_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$, $t\in[0,T]$, $p\in[1,\infty]$, − простори вимірних функцій $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$, і $L_p^{\mathbf{a}}:=L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$;

$M^{\mathbf{a}}$ − простір зліченно-адитивних функцій $\mu:\mathcal{B}\to\mathbb{C}$ (узагальнених борелевих мір в $\mathbb{R}^n$), які задовольняють умову

$$\|\mu\|^{\mathbf{a}}:=\int_{\mathbb{R}^n}\exp\{-[\mathbf{a},x]\}\,d|\mu|(x)<\infty,$$

де $\mathcal{B}$ − σ-алгебра борелевих множин простору $\mathbb{R}^n$, а $|\mu|$ − повна варіація μ;

$L_1^{-\boldsymbol{\ell}(T)}$ − простір вимірних функцій $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$\|\psi\|_1^{-\boldsymbol{\ell}(T)}:=\|\psi(x)\exp\{-[\boldsymbol{\ell}(T),x]\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};$$

$C_0^{-\boldsymbol{\ell}(T)}$ − простір неперервних функцій $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ таких, що при $|x|\to\infty$ маємо $|\psi(x)|\exp\{[\boldsymbol{\ell}(T),x]\}\to 0$. Норму в $C_0^{-\boldsymbol{\ell}(T)}$ означимо як

$$\|\psi\|_\infty^{-\boldsymbol{\ell}(T)}:=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(|\psi(x)|\exp\{[\boldsymbol{\ell}(T),x]\}\right).$$

Зауважимо, що

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\boldsymbol{\ell}(t)}\le\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})},\qquad t\in[0,T],\qquad p\in[1,\infty]. \qquad (15)$$

Оскільки, зважаючи на (12), $\boldsymbol{\ell}(t)\ge\mathbf{a}$, то для $\varphi\in L_p^{\mathbf{a}}$ маємо

$$\|\varphi\|_p^{\boldsymbol{\ell}(t)}\le\|\varphi\|_p^{\mathbf{a}},\qquad t\in[0,T],\qquad p\in[1,\infty] \qquad (16)$$

Нехай існує вираз L^*, спряжений за Лаґранжем до виразу L. Тоді спряжене до (3) рівняння матиме вигляд

$$L^*v(\tau,\xi):=\left(-\partial_\tau+\sum_{j=1}^{n_2}\xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}}+\sum_{j=1}^{n_3}\xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}}\right)v(\tau,\xi)-$$

$$-\sum_{j,\ell=1}^{n_1}\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1\ell}}\left(\overline{a_{j\ell}(\tau,\xi)}\,v(\tau,\xi)\right)+\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{\xi_{1j}}\left(\overline{a_j(\tau,\xi)}\,v(\tau,\xi)\right)-$$

$$-\overline{a_j(\tau,\xi)}\,v(\tau,\xi)=0,\qquad(\tau,\xi)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n. \qquad (17)$$

Тут і далі риска над виразом означає перехід у ньому до комплексного спряження.

3. Формулювання основних результатів. Основні результати статті містяться в таких теоремах.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів* $a_{j\ell}$, a_j, a_0 *рівняння* (3) *виконуються умови* (***i***)–(***iii***). *Тоді правильними є такі твердження:*

1°) (*нормальність розв'язку*) *існує КФРЗК* Z^* *для спряженого рівняння* (17), *який зв'язаний із* Z *рівністю*

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) = \overline{Z(t,x;\tau,\xi)}, \qquad 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{18}$$

КФРЗК Z, *для якого справджується ця рівність, називають нормальним*;

2°) (*формула згортки*) *КФРЗК* Z *є розв'язком функціонального рівняння*

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\beta,\lambda)Z(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,$$

$$0 \le \tau < \beta < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{19}$$

3°) *існує лише один нормальний КФРЗК* Z, *для якого справджуються оцінки* (10) *і* (11).

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (3) *виконуються умови* (***i***)–(***iii***) *і* $p \in [1,\infty]$. *Тоді правильними є такі твердження:*

1°) *для будь-яких функцій* $\varphi \in L_p^{\mathbf{a}}$ *та узагальненої міри* $\mu \in M^{\mathbf{a}}$ *формули*

$$u_1(t,x) := (P\varphi)(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_T, \tag{20}$$

$$u_0(t,x) := (P\mu)(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_T, \tag{21}$$

визначають єдині в шарі Π_T *класичні розв'язки рівняння* (3);

2°) *існує стала* $C > 0$, *яка не залежить від* $\varphi \in L_p^{\mathbf{a}}$ *та* $\mu \in M^{\mathbf{a}}$, *така, що для довільного* $t \in (0,T]$ *справджуються оцінки*

$$\|u_1(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\varphi\|_p^{\mathbf{a}},$$

$$\|u_0(t,\cdot)\|_1^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\mu\|^{\mathbf{a}};$$

3°) *при* $p \in [1,\infty)$ *справджується рівність* $\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\ell(t)} = 0$, *а при* $p = \infty$ *– граничні співвівіношення* $u_1(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \varphi$ *і* $u_0(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \mu$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *відповідно з просторів* $L_1^{-\ell(T)}$ *і* $C_0^{-\ell(T)}$ *виконуються співвідношення*

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u_1(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(x)\,dx$$

і

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u_1(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,d\mu(x).$$

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 2.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (***i***)–(***iii***) *і* u *– класичний розв'язок в* Π_T *рівняння* (3), *який задовольняє умову*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C, \qquad t \in (0,T], \tag{22}$$

з деякими сталою $C > 0$ *і* $p \in [1,\infty]$. *Тоді при* $p \in (1,\infty]$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{\mathbf{a}}$, *а при* $p = 1$ − *єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{\mathbf{a}}$, *такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді* (20) *і* (21).

Теореми 2 і 3 є реалізацією вищеописаного підходу Ейдельмана − Івасишена до класу ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження і коефіцієнтами, залежними від усіх змінних.

Нехай U_p, $p \in [1,\infty]$, − класи усіх класичних розв'язків рівняння (3), які при кожному $t \in (0,T]$ належать до просторів $L_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}$ як функції x і для яких виконується умова (22). З теорем 2 і 3 випливають такі важливі наслідки.

Наслідок 1. *Множинами початкових значень розв'язків із класів* U_p, $p \in (1,\infty]$, *та* U_1 *є відповідно простори* $L_p^{\mathbf{a}}$ *та* $M^{\mathbf{a}}$ *і тільки вони.*

Наслідок 2. *Класи* U_p, $p \in (1,\infty]$, *і* U_1 *є множинами значень операторів Пуассона, визначених формулами* (1) *і* (2) *на просторах відповідно* $L_p^{\mathbf{a}}$ *і* $M^{\mathbf{a}}$, *причому ці оператори є ізоморфізмами.*

4. Доведення результатів. Почнемо з доведення тверджень **теореми 1**. Зауважимо, що рівняння (17) є рівнянням типу (3), якщо замість τ ввести нову змінну $\tau' = -\tau$. Тому при виконанні умов (***i***)−(***iii***) для рівняння (15) існує КФРЗК $Z^*(\tau,\xi;t,x)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{\xi, x\} \in \mathbb{R}^n$.

Далі скористаємось такою формулою Ґріна − Остроградського:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{B_R} \left(\overline{v}Lu - u\overline{L^*v}\right)(\theta,y)\,dy = \int_{B_R} (\overline{v}u)(\theta,y)\Big|_{\theta=t_1}^{t_2} dy -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \left(\sum_{j=1}^{n_2} y_{1j}\mu_{2j} + \sum_{j=1}^{n_3} y_{2j}\mu_{3j}\right)(\overline{v}u)(\theta,y)\,dS_y +$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^{n_1} B^j[v,u](\theta,y)\mu_{1j}\,dS_y\,,$$

де $0 \le t_1 < t_2 \le T$, L і L^* − диференціальні вирази з (3) і (16), B_R − куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у початку координат, Γ_R − її межа, $(\mu_{11},\ldots,\mu_{1n_1},\mu_{21},\ldots,\mu_{2n_2},\mu_{31},\ldots,\mu_{3n_3})$ − орт зовнішньої нормалі до Γ_R,

$$B^j[v,u] := -\sum_{\ell=1}^{n_1} (a_{j\ell}\partial_{y_{1\ell}} u\overline{v} - u\partial_{y_{1\ell}}(a_{j\ell}\overline{v})) + a_j u\overline{v}, \qquad j \in \mathbb{N}_{n_1}\,,$$

u і v − досить гладкі функції. Перехід у формулі Ґріна − Остроградського до границі для підходящих функцій u і v приводить до формули

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \left(\overline{v}Lu - u\overline{L^*v}\right)(\theta,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{v}u)(\theta,y)\Big|_{\theta=t_1}^{t_2} dy\,. \tag{23}$$

На підставі оцінок (10) та аналогічних оцінок для Z^* є правильною формула (22), в якій $u(\theta,y) = Z(\theta,y;\tau,\xi)$, $v(\theta,y) = Z^*(\theta,y;t,x)$, $t_1 = \tau + \varepsilon$ і

$t_2 = t - \varepsilon$, де ε – досить мале додатне число, тобто формула

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{Z^*(\tau+\varepsilon, y; t, x)}\, Z(\tau+\varepsilon, y; \tau, \xi)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{Z^*(t-\varepsilon, y; t, x)}\, Z(t-\varepsilon, y; \tau, \xi)\, dy\,,$$

з якої після переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ випливає рівність (18).

Аналогічно до попереднього одержуємо рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{Z^*(\beta, y; t, x)}\, Z(\beta, y; \tau, \xi)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{Z^*(t-\varepsilon, y; t, x)}\, Z(t-\varepsilon, y; \tau, \xi)\, dy\,. \tag{24}$$

Рівність (19) одержуємо, якщо в (24) перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ і скористатись формулою (18) і властивістю (8) КФРЗК Z.

Перейдемо до доведення твердження **3°** теореми 1. Нехай Z_1 і Z_2 – два нормальні КФРЗК для рівняння (3). Скористаємось формулою (23), поклавши в ній $u(\theta, y) = Z_1(\theta, y; \tau, \xi)$, $v(\theta, y) = Z_2(t, x; \theta, y)$. Тоді одержимо рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{Z_1(t_2, y; \tau, \xi)}\, Z_2(t, x; t_2, y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{Z_1(t_1, y; \tau, \xi)}\, Z_2(t, x; t_1, y)\, dy\,.$$

На підставі довільності вибору t_1 і t_2 з інтервалу (τ, t) остання рівність означає, що функція

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{Z_1(\theta, y; \tau, \xi)}\, Z_2(t, x; \theta, y)\, dy, \qquad \theta \in (\tau, t), \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

не залежить від θ. Позначимо цю функцію через $\Phi(t, x; \tau, \xi)$. Отже,

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{Z_1(\theta, y; \tau, \xi)}\, Z_2(t, x; \theta, y)\, dy, \quad \theta \in (\tau, t), \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{25}$$

Спрямувавши в рівності (25) θ спочатку до τ, а потім до t, одержимо, що

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = Z_2(t, x; \tau, \xi) = Z_1(t, x; \tau, \xi), \ 0 \le \tau < t \le T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n\,.$$

Доведення теорем 2 і 3 проводити не будемо, оскільки, по-перше, вони є досить громіздкими, а, по-друге, вони повторюють доведення, які наведено в працях [1, 17]. Як і в згаданих працях, при доведеннях істотну роль відіграють вагові функції (12), їхні властивості (13) і нерівності (14)–(16).

Висновки. Для класичного фундаментального розв'язку виродженого ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження встановлено дві властивості: нормальність і формула згортки, а також наведено теореми про інтегральні зображення розв'язків та коректну розв'язність задачі Коші в класах експоненціально зростаючих при $|x| \to \infty$ функцій. Представлені тут результати будуть використовуватись для встановлення відповідних тверджень для неоднорідних рівнянь.

1. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. вісник. – 2004. – **1,** № 1. – С. 61–68.
2. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\vec{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – **42,** № 4. – С. 500–506.
3. *Івасишен С. Д.* Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу // Мат. студії. – 2013. – **40,** № 2. – С. 172–181.
4. *Івасишен С. Д.,督 Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – **2,** № 2-3. – С. 94–106.

5. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В. А. Михайлець. – 2016. – **13**, № 1. – С. 108–155.
6. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 2. – С. 28–42.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.* On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, No. 4. – P. 507–526. – https://doi.org/10.1007/s10958-018-3830-0.
7. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 3. – С. 9–31.
8. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. II // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 4. – С. 7–24.
9. *Процах Н. П., Пташник Б. Й.* Нелінійні ультрапараболічні рівняння та варіаційні нерівності. – Київ: Наук. думка, 2017. – 280 с.
10. Эйдельман С. Д. Фундаментальные матрицы решений общих параболических систем // Докл. АН СССР. – 1958. – **120,** № 5. – С. 980–983.
11. Эйдельман С. Д. О фундаментальных решениях параболических систем. II // Мат. сб. – 1961. – **53,** № 1. – С. 73–126.
12. Эйдельман С. Д. Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.
13. *Citti G., Pascucci A., Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equations arising in mathematical finance // Differ. Integral Equat. – 2001. – **14**, No. 6. – P. 701–738.
14. *Di Francesco M., Pascucci A.* A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **336,** No. 2. – P. 1026–1041. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.031.
15. *Di Francesco M., Pascucci A.* On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Appl. Math. Res. Express. – 2005. – **2005,** No. 3. – P. 77–116.
   https://doi.org/10.1155/AMRX.2005.77.
16. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D.* On solutions of parabolic equations from families of Banach spaces dependent on time // In: Differential Operators and Related Topics. Operator Theory: Advances and Applications / Adamyan V. M. et al. (eds). – Basel: Birkhäuser, 2000. – Vol. 117. – P. 111–125. –
   – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8403-7_10.
17. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)
   https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.
18. *Foschi P., Pascucci A.* Kolmogorov equations arising in finance: direct and inverse problems // Lect. Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. Universita degli Studi della Basilicata. – 2007. – **VI.** – P. 145–156.
19. *Ivasishen S. D., Medynsky I. P.* The Fokker–Planck–Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes // Theory Stoch. Process. – 2010. – **16(32),** No. 1. – C. 57–66.
20. *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations // Мат. студії. – 2017. – **47,** № 1. – С. 33–46.
   https://doi.org/10.15330/ms.47.1.33-46.
21. *Kolmogoroff A.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**, No. 1. – P. 116–117. – https://doi.org/10.2307/1968123.
22. *Lanconelli E., Polidoro S.* On a class of hypoelliptic evolution operators // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. Partial Diff. Eqs. – 1994. – **52**, No. 1. – P. 29–63.
23. *Pascucci A.* Kolmogorov equations in physics and in finance // In: Elliptic and Parabolic Problems. – Basel: Birkhauser, 2005. – Ser. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications / Ed. H. Brezis. – Vol. 63. – P. 313–324.
24. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Le Matematiche. – 1994. – **49**, No. 1. – P. 53–105.

СВОЙСТВА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ, ТЕОРЕМЫ ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РЕШЕНИЙ И КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГОРОВА С ДВУМЯ ГРУППАМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ВЫРОЖДЕНИЯ

Для однородного ультрапараболического уравнения типа Колмогорова с двумя группами пространственных переменных вырождения установлено свойство нормальности и формулу свертки для классического фундаментального решения, а также приведены теоремы об интегральных представлениях решений и корректной разрешимости задачи Коши в классах экспоненциально возрастающих при $|x| \to \infty$ *функций.*

***Ключевые слова**: ультрапараболическое уравнение типа Колмогорова, фундаментальное решение задачи Коши, интегральные представления решений, корректная разрешимость задачи Коши.*

PROPERTIES OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS, THEOREMS ON INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS AND CORRECT SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC KOLMOGOROV-TYPE EQUATIONS WITH TWO GROUPS OF SPATIAL VARIABLES OF DEGENERATION

The normality property and the convolution formula for the classical fundamental solution of the Cauchy problem for homogeneous ultraparabolic Kolmogorov-type equation with two groups of spatial variables of degeneration are established. Theorems on integral representations of solutions and correct solvability of the Cauchy problem are presented. These results are obtained in appropriate classes of exponentially growing functions as $|x| \to \infty$.

***Key words:** ultraparabolic equations of the Kolmogorov type, fundamental solution of the Cauchy problem, integral representations of solutions, correct solvability of the Cauchy problem.*

[1] Нац. техн. ун-т України
«Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського», Київ,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
21.10.18