

**ДВУМЕРНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ.
НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА**

Получено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии нахлесточного клеевого соединения двух прямоугольных пластин, одна из которых закреплена вдоль боковой стороны. При построении решения поперечные перемещения обоих несущих слоев полагаются равными нулю. Использован метод разделения переменных. Решена модельная задача.

Ключевые слова: клеевое соединение, двумерная модель, разделение переменных

Абсолютное большинство существующих сегодня моделей напряженного состояния клеевых соединений являются одномерными и предполагают равномерное распределение напряжений по ширине соединения [1]. Однако в ряде случаев необходимо учитывать неравномерность напряжений и по ширине. Например, при расчете клеевых соединений панелей обшивки с силовыми элементами конструкции (стрингерами), соединений обшивки с ремонтными накладками, пластин различной ширины, полок композитных двутавровых балок со стенкой и т.д. Кроме того, даже при равномерно приложенной нагрузке в конструкции возникают поперечные деформации, обусловленные ненулевыми коэффициентами Пуассона соединяемых слоев. Аналитическое решение задачи о двумерном напряженном состоянии клеевого соединения в общей постановке пока неизвестно. Поэтому большинство исследователей для этого применяют численные методы [2–5].

При построении аналитических моделей можно выделить два направления:

1) для изучения влияния поперечных деформаций на напряженное состояние соединения касательные напряжения в несущих слоях полагаются равными нулю; приложенная нагрузка равномерно распределена по сторонам соединения [8, 9];

2) для решения задачи о напряженном состоянии соединения при неравномерной нагрузке перемещения несущих слоев в поперечном направлении полагаются равными нулю [7].

Гипотезу о равенстве нулю поперечных перемещений ранее использовали, создавая уточненную теорию балок [6]. В работе [7] с помощью описанного подхода получили аналитическое решение задачи о напряженном состоянии нахлесточного соединения прямоугольных пластин, боковые стороны которых свободны от нагрузки.

Цель данной работы – получить аналитическое решение задачи о напряженном состоянии нахлесточного клеевого соединения двух прямоугольных пластин, к одной из которых приложена нагрузка в продольном направлении, а одна из боковых сторон второй жестко закреплена. Такая конфигурация краевых условий рассматривается впервые. Для построения аналитического решения предполагали, что поперечные перемещения в плоскости соединения равны нулю.

1. Постановка задачи. Рассмотрим симметричное клеевое соединение двух прямоугольных пластин, имеющих размеры $a \times b$ (рис. 1). Чтобы уменьшить влияние изгиба в плоскости соединения на напряжения в несущих слоях, полагали, что $a > b$. Продольная нагрузка приложена к стороне $x = L$ первой пластины (первого несущего слоя). Вторая (второй несущий слой) жестко закреплена вдоль боковой стороны $y = 0$.

* kurennov.ss@gmail.com

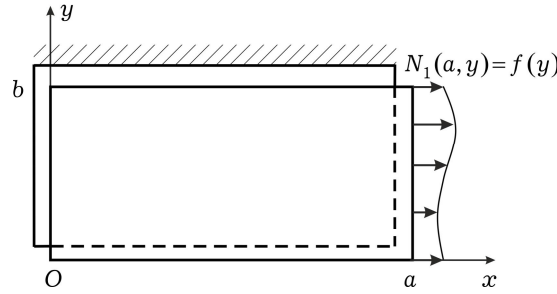


Рис. 1

Решение задачи базируется на следующих гипотезах:

- напряжения равномерно распределены по толщине слоев;
- клеевая прослойка работает только на сдвиг;
- изгиб отсутствует;
- поперечные перемещения отсутствуют, т.е. несущие слои абсолютно жесткие в направлении координатной оси y .

2. **Построение решения.** Уравнения равновесия элементов несущих слоев имеют вид [7]

$$\tau + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0, \quad -\tau + \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где N_m , q_m – нормальные (в продольном направлении) и касательные усилия в несущем слое m , $m=1,2$; τ – касательные напряжения в клеевом слое в продольном направлении.

Напряжения в клеевой прослойке полагаем пропорциональными разности перемещений слоев (модель Фолькерсена [1]):

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} (U_2 - U_1), \quad (2)$$

где G_0 – модуль сдвига клея; δ_0 – толщина клеевой прослойки; $U_m(x, y)$ – продольные перемещения слоя m .

Усилия в пластинах при условии равенства нулю поперечных перемещений вычисляем так:

$$N_m = \delta_m E_m \frac{\partial U_m}{\partial x}, \quad q_m = \delta_m G_m \frac{\partial U_m}{\partial y}, \quad m=1,2, \quad (3)$$

где δ_m , E_m и G_m – соответственно толщина, модуль упругости и модуль сдвига слоя m .

Таким образом, уравнения равновесия (1) можно свести к системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) - U_1 + U_2 = 0; \\ \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) + U_1 - U_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\alpha_m = E_m \delta_m \frac{\delta_0}{G_0}$, $\mu_m = \frac{G_m}{E_m}$.

Краевые условия таковы:

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0, \quad U_2(x, b) = 0, \quad (5)$$

$$N_1(a, y) = E_1 \delta_1 \left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=a} = f(y), \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=a} = 0. \quad (7)$$

Условия (5) существуют на боковых сторонах пластин при жесткой заделке или равенстве нулю касательных напряжений, а условия (6) и (7) – на торцах пластин, когда задано усилие на торце первого слоя (6) и свободны от нагрузки стороны (7).

Из первого уравнения системы (4) следует:

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \quad (8)$$

Подставив (8) во второе уравнение системы (4), получим:

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \quad (9)$$

где $\beta_2 = \alpha_1 \alpha_2$, $\beta_2 = (\mu_1 + \mu_2) \alpha_1 \alpha_2$, $\beta_2 = \mu_1 \mu_2 \alpha_1 \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_4 = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$.

В работе [7] уравнение (9) решили при помощи метода разделения переменных при условии $\mu_1 = \mu_2$ и равенстве нулю касательных напряжений на боковых сторонах пластин. Оно имеет вид $U_m = W_m(x) + V_m(x, y)$, где $W_m(x)$ – классическое одномерное решение Фолькерсена [1], а $V_m(x, y)$ – функциональный ряд, состоящий из частных решений (9), которые можно представить в виде линейных комбинаций функций вида $e^{\pm \lambda x} \sin ky$ или $e^{\pm \lambda x} \cos ky$.

Из условия равенства нулю продольных перемещений вдоль одной из боковых сторон одной из пластин (5) следует, что $W_2(x) = 0$. Из системы (4) имеем, что и $W_1(x) = 0$. Частные решения уравнения (9) ищем также в виде $e^{\pm \lambda x} \sin ky$ (или $e^{\pm \lambda x} \cos ky$). Подставив данное выражение в (9), получим алгебраическое уравнение, которое связывает λ и k :

$$\beta_3 k^4 + (\beta_5 - \beta_2 \lambda^2) k^2 + \beta_1 \lambda^4 - \beta_4 \lambda^2 = 0. \quad (10)$$

Из него следует, что каждому значению $\pm \lambda$ соответствуют четыре значения k , которые можно записать в форме $\pm k_1(\lambda)$ и $\pm k_2(\lambda)$. Следовательно, частное решение (9), соответствующее, например, положительному λ , имеет вид

$$U_1^* = e^{\lambda x} (S_1 \sin k_1 y + C_1 \cos k_1 y + S_2 \sin k_2 y + C_2 \cos k_2 y),$$

где C_m, S_m – произвольные константы.

Из соотношения (8) находим:

$$U_2^* = e^{\lambda x} (S_1 \gamma_1 \sin k_1 y + C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + S_2 \gamma_2 \sin k_2 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y),$$

где $\gamma_m = 1 - \alpha_1 (\lambda^2 - \mu_1 k_m^2)$, $m = 1, 2$.

Частные решения должны удовлетворять однородным краевым условиям (5). Из условия равенства нулю касательных напряжений в обеих пластинах на сторонах $y = 0$ следует $S_1 = S_2 = 0$. Частные решения справедливы и для отрицательных значений λ . Поэтому можем записать:

$$U_m^* = X^{(m)}(x) Y^{(m)}(y),$$

где

$$X^{(m)}(x) = \cosh \lambda x + C \sinh \lambda x,$$

$$Y^{(1)}(y) = C_1 \cos k_1 y + C_2 \cos k_2 y, \quad Y^{(2)}(y) = C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y.$$

Здесь C, C_1, C_2 – произвольные константы.

Положим, что краевые условия на сторонах $x=0$ выполняются точно. Тогда $C=0$. Кроме того, считаем, что они на сторонах $y=b$ также выполняются точно. Таким образом,

$$\left. \frac{dY^{(2)}}{dy} \right|_{y=b} = 0, \quad Y^{(2)}(b) = 0.$$

Эти условия приводят к однородной системе линейных уравнений

$$A \cdot \mathbf{C} = 0, \quad (11)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 \sin k_1 b & k_2 \sin k_2 b \\ \gamma_1 \cos k_1 b & \gamma_2 \cos k_2 b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Система (11) имеет нетривиальное решение, если

$$\det(A) = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) содержит бесконечное счетное множество корней λ_n . Обозначим $k_{m,n} = k_m(\lambda_n)$, $\gamma_{m,n} = \gamma_m(\lambda_n)$. Из системы (11) находим коэффициенты $C_{1,n}$ и $C_{2,n}$, соответствующие числам λ_n . Их, а также функции $Y_n^{(m)}$ определим с точностью до произвольного множителя. Для облегчения анализа сходимости полученного решения введем условие нормирования

$$\int_0^b [Y_n^{(1)}]^2 dx + \int_0^b [Y_n^{(2)}]^2 dx = 1. \quad (13)$$

Таким образом,

$$U_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\cosh \lambda_n x}{\lambda_n \sinh \lambda_n a} \cdot Y_n^{(m)}, \quad (14)$$

где B_n – коэффициенты, определяемые из краевых условий на сторонах $x=a$ обеих пластин; $\lambda_n \sinh \lambda_n a$ – нормирующий множитель; $Y_n^{(m)}$ – нормированные функции, в которых коэффициенты $C_{1,n}$ и $C_{2,n}$ удовлетворяют уравнениям (11) и (13).

Из формул (3) имеем:

$$N_m = E_m \delta_m \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh \lambda_n x}{\sinh \lambda_n a} \cdot Y_n^{(m)}, \quad (15)$$

$$q_m = G_m \delta_m \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\cosh \lambda_n x}{\lambda_n \cosh \lambda_n a} \cdot Z_n^{(m)}, \quad Z_n^{(m)} = \frac{dY_n^{(m)}}{dy}.$$

Краевые условия на сторонах $x=a$ таковы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(1)} = \frac{f(y)}{E_1 \delta_1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(2)} = 0.$$

Системы функций $Y_n^{(1)}$ и $Y_n^{(2)}$ на интервале $y \in [0; b]$ не являются ортогональными. Для поиска неизвестных коэффициентов B_n используем метод наименьших квадратов, т. е. минимизируем среднеквадратическое отклонение усилий (15) на сторонах $x = a$ от заданных краевых условий (6) и (7). Суммирование ограничим некоторым числом слагаемых N :

$$J = \int_0^b \left[\left(\sum_{n=1}^N B_n Y_n^{(1)}(y) - \frac{f(y)}{E_1 \delta_1} \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^N B_n Y_n^{(2)} \right)^2 \right] dy \rightarrow \min.$$

Из условий экстремума $\frac{\partial J}{\partial B_n}$ придем к системе линейных уравнений

$$\sum_{n=1}^N B_n \int_0^b \left(Y_n^{(1)} Y_j^{(1)} + Y_n^{(2)} Y_j^{(2)} \right) dy = \int_0^b \frac{f(y)}{E_1 \delta_1} Y_n^{(1)} dy, \quad j = 1, \dots, N. \quad (16)$$

После нормирования (13) диагональные коэффициенты матрицы системы (16) равны единице, а внедиагональные — убывают при удалении от главной диагонали. Доказано, что данные коэффициенты системы стремятся к нулю при неограниченном возрастании одного из индексов.

3. Пример расчета. Рассмотрим клеевое соединение двух пластин с такими параметрами: $a = 50$ мм, $b = 30$ мм, $\delta_1 = 2$ мм, $\delta_2 = 3$ мм, $E_1 = E_2 = 70$ ГПа, $G_1 = G_2 = 25$ ГПа. Параметры клеевого слоя: $\delta_0 = 0.3$ мм, $G_0 = 0.5$ ГПа. Нагрузка приложена равномерно по ширине $f(y) = P = \text{const}$.

Рис. 2 иллюстрирует распределение касательных напряжений (2) в клеевом слое.

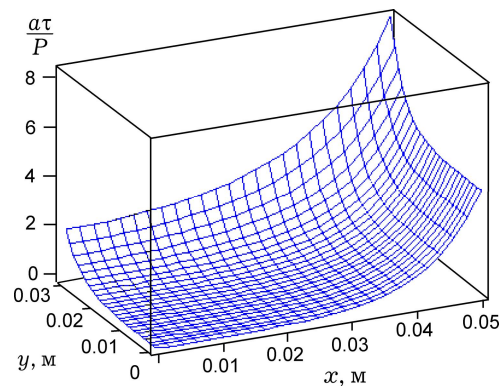


Рис. 2

Как видим, касательные напряжения достигают максимума в угловой точке на пересечении жестко закрепленной стороны и той, к которой приложена нагрузка. Для верификации найденного решения сравнили результаты расчета, полученные с помощью приведенной модели, и методом конечных элементов (МКЭ). На рис. 3 построены графики распределения касательных напряжений в клее, вычисленные по предложенной модели (сплошная линия) и МКЭ в середине толщины клеевого слоя (штриховая линия) вдоль закрепленной стороны $y = b$ и вдоль середины склеиваемых слоев $y = 0.5b$.

Выявили, что в обоих случаях они весьма близки. Расчеты также свидетельствуют, что касательные напряжения в срединной плоскости клеевого слоя в направлении оси y , которые предложенная модель не учитывает, не превосходят 30% от напряжений в продольном направлении. Следовательно, максимальные результирующие напряжения лишь на 6%

превосходят таковые в продольном направлении. Однако модель дает несколько завышенные значения касательных напряжений в окрестности края шва, поскольку не учитывает краевые условия на торце клеевого слоя [10]. Поэтому максимальные напряжения, вычисленные МКЭ и с помощью предложенной модели, отличаются всего лишь на несколько процентов.

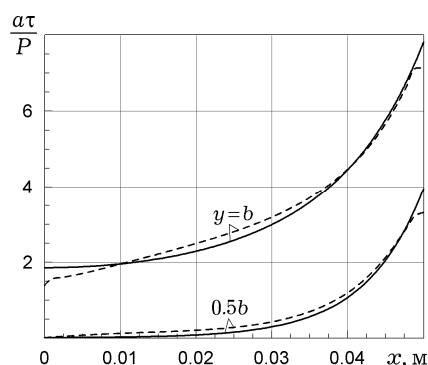


Рис. 3

Выводы. Получено аналитическое решение задачи о двумерном напряженном состоянии клеевого соединения двух прямоугольных пластин, одна из которых нагружена продольными усилиями, а другая – закреплена по боковой стороне. Эти краевые условия рассмотрены впервые. Для построения решения использована гипотеза о высокой жесткости несущих слоев в поперечном направлении. Решена модельная задача. Сравнением расчетов, полученных при помощи предложенной модели и МКЭ, установлено, что модель обладает высокой точностью и пригодна для решения задач при проектировании и оптимизации соединений. Предложенный подход можно использовать при построении аналитических решений задач о напряженном состоянии пластин с ремонтными накладками, соединений стрингеров с обшивкой и т.д.

1. *da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Spelt J. K.* Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey // *Int. J. Adhes. Adhesiv.* – 2009. – 29. – P. 319–330.
2. *Barut A., Hanauska J., Madenci E., Ambur D. R.* Analysis method for bonded patch repair of a skin with a cutout // *Comp. Struct.* – 2002. – 55, No. 88. – P. 277–294.
3. *Kim H. S., Cho M., Lee J., Deheeger A., Grediac M., Mathias J.-D.* Three dimensional stress analysis of a composite patch using stress functions // *Int. J. of Mech. Sci.* – 2010. – 52. – P. 1646–1659.
4. *Chukwujekwu Okafor A., Singh N., Enemuoh U. E., Rao S. V.* Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels // *Comp. Struct.* – 2005. – 71. – P. 258–270.
5. *Rapp P.* Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends // *Archives of Civil and Mech. Eng.* – 2015. – 15, No. 2. – P. 603–619.
6. *Vasil'ev V.* Stress tensor symmetry and singular solutions in the theory of elasticity // *Mech. Solids.* – 2010. – 45, No. 2. – P. 205–213.
7. *Kurennov S. S.* A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load // *Mech. of Comp. Mater.* – 2015. – 51, No. 4. – P. 479–488.
8. *Mathias J. D., Grédiac M., Balandraud X.* On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches // *Int. J. of Solids and Struct.* – 2006. – 43. – P. 6921–6947.
9. *Kurennov S. S.* An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution // *Mech. of Comp. Mat.* – 2014. – 50, No. 1. – P. 105–114.

10. Frostig Y., Thomsen O. T., Mortensen F. Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet—high-order theory approach // J. of Eng. Mech. — 1999. — 125. — P. 1298–1307.

ДВОВИМІРНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН КЛЕЙОВОГО З'ЄДНАННЯ. НЕКЛАСИЧНА ЗАДАЧА

Отримано аналітичний розв'язок задачі про напружений стан напускного клейового з'єднання двох прямокутних пластин, одна з яких закріплена вздовж бічної сторони. При побудові розв'язку поперечні переміщення у площині з'єднання обох пластин вважаються рівними нулю. Використано метод відокремлення змінних. Розв'язана модельна задача.

Ключові слова: клейове з'єднання, двовимірна модель, відокремлення змінних

ON THE TWO-DIMENSIONAL STRESSED STATE OF THE ADHESIVE JOINT OF THE RECTANGULAR PLATES. THE NONCLASSICAL PROBLEM

An analytical solution for the stressed state problem was obtained for the lap adhesive joint of the two rectangular plates, one of which is fixed along the lateral side. Constructing solution, we assume that the transverse displacements of both base layers are equal to zero. The variables separation method was used. The model problem was solved.

Key words: glued joint, two-dimensional model, separation of variables

Нац. аерокосмічний ун-т
ім. М.Е. Жуковського «ХАИ», Харків

Получно
05.12.17