

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГИНУ АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН ІЗ ВКЛЮЧЕННЯМИ НА ОСНОВІ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто задачу про згин анізотропної пластини сталої товщини з жорсткими включеннями. Алгоритм розв'язування ґрунтується на встановленому взаємозв'язку між потенціалами Лехніцького для задачі згину пластин із включеннями та для відповідно сформульованої першої основної анізотропної плоскої задачі теорії пружності. Допоміжну задачу розв'язано методом сингулярних інтегральних рівнянь у комплексному вигляді. Розглянуто задачі згину для пластин з включеннями, які перебувають під дією моментів на нескінченності (для пластин безмежних розмірів) та поперечного навантаження (для обмежених пластин). Наведено приклади розрахунку напружень у пластинах зі жорсткими включеннями різних форм та їх систем.

Ключові слова: анізотропна пластинка, згин, жорсткі включення, навантаження, плоский напружено-деформований стан, сингулярні інтегральні рівняння.

Для дослідження напружено-деформованого стану (НДС) анізотропних пластин, як правило, використовують рівняння згину, на основі яких будують відповідні алгоритми для їх розв'язування. Оцінюючи згин пластин з отворами та включеннями, часто застосовують метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР). Якщо вживають інтегральні рівняння, записані через дійсні змінні, виникають достатньо громіздкі співвідношення [1, 7, 12]. Інтегральні рівняння від комплексної змінної для задач згину анізотропних пластин також виявились достатньо складними [3, 4]. Ефективний метод дослідження згину пластин на основі рядів та конформного відображення запропонували Лехніцький і Космодам'янський та їхні учні [2, 9]. Однак тут необхідні додаткові аналітичні перетворення, які також громіздкі, коли розглядають отвори складної форми. Аналітичні методи розв'язування задач згину ізотропних пластин за допомогою конформного відображення розроблені в праці [5]. Використовували [6, 12] також інші методи дослідження задач згину. Водночас у літературі детальніше опрацьовано математично простіші алгоритми визначення плоского напруженого стану багатозв'язних анізотропних пластин [9]. Зокрема, для таких задач широко використовують МГІР, на основі якого достатньо повно вивчено задачу з умовами Неймана (на межах отворів задано зусилля) та задачу Діріхле (коли задано переміщення) [9–11].

Нижче записано співвідношення, які дають можливість звести задачу згину композитної пластини з включеннями до відповідної допоміжної плоскої анізотропної задачі теорії пружності. Такий підхід дає змогу алгоритми і програми, розроблені для плоского напруженого стану (ПНС), безпосередньо застосувати до розв'язування задач згину пластин. Аналогічний, але складніший підхід до розв'язування задачі згину запропоновано у праці [8] на основі формалізму Stroh.

1. **Формулювання задачі.** Розглянемо анізотропну пластину сталої товщини h зі жорсткими включеннями, серединна площина якої є площиною пружної симетрії. Віднесемо її до декартової системи координат $Oxyz$, в якій серединна площина розміщена при $z = 0$. Вважатимемо, що пластинка обмежена граничними контурами L_j , $j = 1, \dots, N$, на яких задані нормальні переміщення та похідні від них; навантажена зусиллями, що діють у напрямку осі Oz до серединної площини та перебуває під дією

* t_solyar@ukr.net

моментів $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$, які прикладені на нескінченності (для пластин нескінченних розмірів); відомі головний вектор і моменти всіх сил, які прикладені до кожної із меж отворів. Зазначимо, що жорсткі вклучення є частковим випадком для розглянутої задачі.

2. Основні рівняння згину пружних анізотропних пластин. Для дослідження пружної рівноваги пластин використаємо рівняння, які ґрунтуються на гіпотезах Кірхгофа–Лява. Позначимо область, яку займає серединна площина, через Ω . Переміщення пластини вздовж осі OZ визначимо із рівняння [9]

$$d_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 4d_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + 2(d_{12} + 2d_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + 4d_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + d_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q, \quad (1)$$

де q – поперечне навантаження, прикладене до верхньої межі пластини.

Тут $d_{ij} = \frac{h^3}{12} b_{ij}$, коефіцієнти b_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) є елементами матриці $B = A^{-1}$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

a_{ij} – пружні сталі (коефіцієнти біля компонент тензора напружень у законі Гука).

Розглянемо спочатку ситуацію, коли $q = 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1) запишемо через комплексні потенціали Лехніцького $\phi(z_1), \psi(z_2)$ [9]:

$$w(x, y) = 2 \operatorname{Re} \left[\int \phi(z_1) dz_1 + \int \psi(z_2) dz_2 \right], \quad (3)$$

де $z_j = x + s_j y$, $j = 1, 2$; $s_{1,2}$ – корені характеристичного рівняння

$$d_{22}s^4 + 4d_{26}s^3 + 2(d_{12} + 2d_{66})s^2 + 4d_{16}s + d_{11} = 0, \quad (4)$$

причому $\operatorname{Im}(s_{1,2}) > 0$.

Моменти і поперечні сили через комплексні потенціали Лехніцького знайдемо за формулами [9]

$$\begin{aligned} M_x &= -2 \operatorname{Re} [p_1^* \Phi(z_1) + p_2^* \Psi(z_2)], \quad M_y = -2 \operatorname{Re} [q_1^* \Phi(z_1) + q_2^* \Psi(z_2)]; \\ H_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [r_1 \Phi(z_1) + r_2 \Psi(z_2)]; \\ N_x &= -2 \operatorname{Re} [s_1 S_1 \Phi'(z_1) + s_2 S_2 \Psi'(z_2)]; \quad N_y = 2 \operatorname{Re} [S_1 \Phi'(z_1) + S_2 \Psi'(z_2)], \end{aligned} \quad (5)$$

де $\Phi(z_1) = \phi'(z_1)$, $\Psi(z_2) = \psi'(z_2)$, $q_j^* = d_{22}s_j^2 + 2d_{26}s_j + d_{12}$, $p_j^* = d_{11} + 2d_{16}s_j + d_{12}s_j^2$, $r_j = d_{16} + 2d_{66}s_j + d_{26}s_j^2$, $S_j = r_j + s_j q_j^*$, $j = 1, 2$.

Вважаємо, що на граничних контурах $L_j, j = 1, \dots, N$ задано нормальне переміщення w_0 і похідна від нього вздовж зовнішньої нормалі $\partial w / \partial n = w_0'$. На цьому контурі комплексні потенціали задовольняють умови [2, 9]

$$2 \operatorname{Re} [\phi(z_1) + \psi(z_2)] = \partial w_0 / \partial x, \quad 2 \operatorname{Re} [s_1 \phi(z_1) + s_2 \psi(z_2)] = \partial w_0 / \partial y, \quad (6)$$

де

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial s} \cos(s, x) + w'_0 \cos(n, x), \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial s} \cos(s, y) + w'_0 \cos(n, y),$$

s – дугова координата. Далі на граничних контурах вибираємо додатний напрямок обходу, за якого область, що займає пластина, розміщена зліва.

2.1. Модифікований запис основних рівнянь згину пластин. Замінімо позначення у наведених співвідношеннях. Для цього введемо в розгляд сталі c_{ij} , які визначимо так:

$$c_{11} = d_{22}, \quad c_{16} = -2d_{26}, \quad c_{12} = d_{12}, \quad c_{66} = 4d_{66}, \quad c_{26} = -2d_{16}, \quad c_{22} = d_{11}.$$

Тоді характеристичне рівняння (4) набуде вигляду

$$c_{11}s^4 - 2c_{16}s^3 + (2c_{12} + c_{66})s^2 - 2c_{26}s + c_{22} = 0 \quad (7)$$

а у формулах (5) коефіцієнти $q_j^* = p_j$, $p_j^* = q_j s_j$,

де $p_j = c_{11}s_j^2 - c_{16}s_j + c_{12}$, $q_j = c_{12}s_j - c_{26} + c_{22} / s_j$,

$$r_j = d_{16} + 2d_{66}s_j + d_{26}s_j^2 = (-c_{26} + c_{66}s_j - c_{16}s_j^2) / 2.$$

Тобто характеристичне рівняння (7) та коефіцієнти p_j, q_j мають такий же вигляд, як і для ПНС для анізотропного матеріалу з пружними сталими $a_{ij} = c_{ij}$.

На межах введемо в розгляд функції X_0, Y_0 :

$$Y_0 = -d(\partial w_0 / \partial x) / ds, \quad X_0 = d(\partial w_0 / \partial y) / ds. \quad (8)$$

Тоді крайові умови (6) на межах $L_j, j = 1, \dots, N$ для комплексних потенціалів будуть:

$$2\operatorname{Re}[\varphi(z_1) + \psi(z_2)] = -\int Y_0 ds, \quad 2\operatorname{Re}[s_1\varphi(z_1) + s_2\psi(z_2)] = \int X_0 ds. \quad (9)$$

Вважатимемо спочатку в задачі згину, що головний вектор і моменти всіх сил, які прикладені до кожної з меж $L_j, j = 1, \dots, N$, дорівнюють нулю. Наведемо додаткові умови, які задовольняють у цьому випадку комплексні потенціали на граничних контурах. Зі співвідношень (8), (9) випливає, що комплексні потенціали $\varphi(z_1), \psi(z_2)$ є однозначними функціями за обходу навколо граничних контурів. Звідси маємо умови

$$\int_{L_j} \Phi(z_1) dz_1 = 0, \quad \int_{L_j} \Psi(z_2) dz_2 = 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (10)$$

З умови однозначності переміщень w на підставі формули (3) та з урахуванням умов (10) отримуємо:

$$\operatorname{Re} \left(\int_{L_j} z_1 \Phi(z_1) dz_1 + \int_{L_j} z_2 \Psi(z_2) dz_2 \right) = 0. \quad (11)$$

Отже, в задачах згину для розглянутого випадку потенціали на граничних контурах повинні задовольняти умови (10), (11).

2.2. Визначення НДС пластин за згину на основі відповідних розв'язків плоских задач теорії пружності. Введемо в розгляд допоміжну плоску задачу теорії пружності для анізотропної пластини, що займає область Ω . За пружні сталі цієї пластини приймемо $a_{ij} = c_{ij}$. Тоді корені характеристичного рівняння $s_{1,2}$ для пластини визначимо з відомого для ПНС рівняння (7) [9].

Розглянемо довільний з граничних контурів (позначимо його через L). У задачі для ПНС на цьому контурі задамо вектори зусиль (X, Y) так:

$X = X_0, Y = Y_0$, де (X_0, Y_0) знаходимо за формулами (8).

Для обчислення комплексних потенціалів $\phi_p(z_1), \psi_p(z_2)$ на контурі L маємо умови

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}[\phi_p(z_1) + \psi_p(z_2)] &= -\int Y ds + C_1, \\ 2\operatorname{Re}[s_1\phi_p(z_1) + s_2\psi_p(z_2)] &= \int X ds + C_2, \end{aligned} \quad (12)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Інтегруванням співвідношень (12) встановлюємо, що головний вектор сил, які прикладені до межі L , дорівнює нулю. Тоді за відомими результатами [10, 11] отримуємо, що умова однозначності переміщень для цього контуру виконуватиметься, якщо для потенціалів задовольнятимуться умови

$$\int_L \Phi_p(z_1) dz_1 = 0, \quad \int_L \Psi_p(z_2) dz_2 = 0, \quad (13)$$

де $\dot{\phi}_p(z_1) = \Phi_p(z_1), \dot{\psi}_p(z_2) = \Psi_p(z_2)$.

Головний момент сил, які прикладені до контуру L , тут також дорівнює нулю, оскільки

$$M = \int_L (yX - xY) ds = -\int_L \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} dy + \frac{\partial w_0}{\partial x} dx \right) = 0.$$

Використовуючи результати праць [2, 10], отримуємо, що для потенціалів на межі контуру L виконується також умова

$$\operatorname{Re} \int_L [z_1 \Phi_p(z_1) dz_1 + z_2 \Psi_p(z_2) dz_2] = 0. \quad (14)$$

Таким чином, граничні умови (9) для знаходження потенціалів $\phi(z_1), \psi(z_2)$ у задачі згину та умови (12) для потенціалів $\phi_p(z_1), \psi_p(z_2)$ у допоміжних плоских задачах збігаються. Також збігаються додаткові умови для потенціалів (10), (11) у задачі згину та умови (13), (14) для допоміжних задач для ПНС. Тобто з точністю до сталих маємо: $\phi(z_1) = \phi_p(z_1), \psi(z_2) = \psi_p(z_2)$.

Отже, для задачі згину багатозв'язних пластин за умови, що на кожному з граничних контурів головний вектор і момент всіх прикладених зовнішніх сил дорівнюють нулю, можна записати допоміжну задачу теорії пружності за відповідно вибраних пружних сталих та граничних умов так, щоб комплексні потенціали для обидвох задач були однакові. Тому для розглянутого класу задач безпосередньо можна використати алгоритми знаходження комплексних потенціалів для плоскої задачі теорії пружності. Єдина різниця в алгоритмах у тому, що на основі отриманих комплексних потенціалів переміщення, зусилля, моменти і напруження визначають за різними співвідношеннями.

2.3. Зв'язок між моментами в задачі згину та напруженнями в допоміжній плоскій задачі теорії пружності. Вважатимемо, що для допоміжної плоскої задачі знайдено напруження $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, які відповідають потенціалам Φ_p, Ψ_p .

Запишемо співвідношення, які дають змогу в задачі згину безпосередньо визначити моменти через ці напруження. З формули (5) маємо:

$$\begin{aligned} -M_x &= 2\operatorname{Re}[\rho_1^* \Phi(z_1) + \rho_2^* \Psi(z_2)] = 2d_{11} \operatorname{Re}[\Phi(z_1) + \Psi(z_2)] + \\ &+ 4d_{16} \operatorname{Re}[s_1 \Phi(z_1) + s_2 \Psi(z_2)] + 2d_{12} \operatorname{Re}[s_1^2 \Phi(z_1) + s_2^2 \Psi(z_2)]. \end{aligned}$$

Аналогічно запишемо формули для знаходження моментів M_y, H_{xy} .

Використовуючи співвідношення для розрахунку напружень у плоскій задачі теорії пружності та враховуючи, що $\Phi = \Phi_p, \Psi = \Psi_p$, отримуємо взаємозв'язок

$$\begin{aligned} M_x &= -(d_{11}\sigma_y - 2d_{16}\tau_{xy} + d_{12}\sigma_x), \\ M_y &= -(d_{12}\sigma_y - 2d_{26}\tau_{xy} + d_{22}\sigma_x), \\ H_{xy} &= -(d_{16}\sigma_y - 2d_{66}\tau_{xy} + d_{26}\sigma_x). \end{aligned} \quad (15)$$

Перепишемо формули (15) у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ H_{xy} \end{pmatrix} = -\frac{h^3}{12} B \begin{pmatrix} \sigma_y \\ \sigma_x \\ -2\tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

3. Задача згину пластини моментами на нескінченності. Розглянемо тепер важливий випадок, коли пластина перебуває під дією моментів $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$, які прикладені на нескінченності. Зазначимо, що такий згин пластин вивчений найбільше [2, 5, 9].

Визначимо напруженнями $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ на нескінченності в допоміжній плоскій задачі. Зі співвідношення (16) отримуємо взаємозв'язок

$$\begin{pmatrix} M_x^\infty \\ M_y^\infty \\ H_{xy}^\infty \end{pmatrix} = -\frac{h^3}{12} B \begin{pmatrix} \sigma_y^\infty \\ \sigma_x^\infty \\ -2\tau_{xy}^\infty \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Помноживши цю формулу на $-12/h^3 A$, одержимо:

$$\begin{pmatrix} \sigma_y^\infty \\ \sigma_x^\infty \\ -2\tau_{xy}^\infty \end{pmatrix} = -\frac{12}{h^3} A \begin{pmatrix} M_x^\infty \\ M_y^\infty \\ H_{xy}^\infty \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Особливо спрощується задача згину нескінченної пластини зі жорсткими ненавантаженими включеннями. У допоміжній плоскій задачі розглядатимемо пластину з вільними від навантажень межами отворів, що обмежені контурами $L_j, j = 1, \dots, N$.

За згину пластини моментами на нескінченності задаємо зусилля (в пластині – на нескінченності), які визначимо за формулами (18).

Таким чином, задачі згину пластин можна дослідити, розв'язуючи відповідну задачу для ПНС. Нижче для цього використали метод інтегральних рівнянь, побудований на результатах праць [10, 11].

4. Результати розрахунків. Розглянемо пластину з матеріалу CF1 (для якого відношення максимального і мінімального модулів пружності $E_x / E_y = 46.4$) з круговим включенням за її згину моментами M_x^∞ або M_y^∞ на нескінченності. Значення нормальних та кільцевих моментів \tilde{M}_n і \tilde{M}_θ на межі включення залежно від кутової координати, яку відлічуємо від горизонтальної осі, наведено в табл. 1 (за вибору 36 вузлових точок). Для порівняння подано також відносні їх значення, які обчислені за аналітичними формулами [9]. Як бачимо, у 36 вузлових точках забезпечено практично точні результати моментів.

Таблиця 1. Точні та наближені значення моментів на межі кругового включення

θ^0	$M_x^\infty \neq 0$				$M_y^\infty \neq 0$			
	\tilde{M}_n / M_x^∞	$\tilde{M}_\theta / M_x^\infty$	M_n / M_x^∞	M_θ / M_x^∞	\tilde{M}_n / M_y^∞	$\tilde{M}_\theta / M_x^\infty$	M_n / M_y^∞	M_θ / M_y^∞
0	5.017	1,755	5.017	1.755	-0.185	-0.065	-0.185	-0.065
10	4.643	7.482	4.643	7.482	-0.13	-0.209	-0.13	-0.209
20	3.566	11.089	3.566	11.089	0.028	0.088	0.028	0.088
30	1.916	4.427	1,916	4.427	0.27	0.625	0.27	0.625
40	-0,107	-0,139	-0,107	-0,139	0.568	0.737	0.568	0.737
50	-2.261	-1,544	-2.261	-1.544	0.884	0.603	0.884	0.603
60	-4,284	-1.431	-4.284	-1.431	1.181	0.394	1.181	0.394
70	-5.934	-0.822	-5.934	-0.822	1.423	0.197	1.423	0.197
80	-7.011	-0.269	-7.011	-0.269	1.581	0.061	1.581	0.061
90	-7.385	-0.056	-7.384	-0.056	1.636	0.012	1.636	0.012

Розраховані відносні моменти для півсторони a квадратного включення із закругленими вершинами радіусом $0.5a$ наведено на рис. 1. Тут кривим 1 і 2 відповідають відносні моменти M_n / M_x^∞ і M_θ / M_x^∞ , спричиненими моментом M_x^∞ на нескінченності. Аналогічні результати для згину пластини моментом M_y^∞ описують штрихові лінії (криві 1', 2'). Тут S – віднесена до повної довжини контуру дугова координата, яка починається від точки межі на осі Ox , що лежить справа. Щоб забезпечити точність $\sim 1\%$, у розрахунках вибирали 160 вузлових точок.

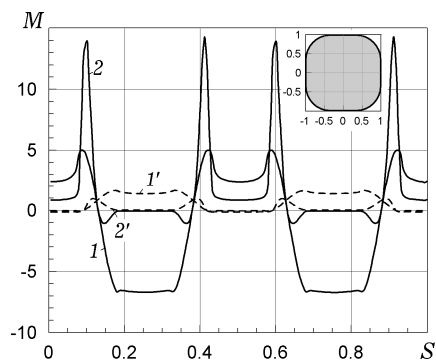


Рис. 1

Рис. 1. Моменти на межі квадратного включення із закругленими вершинами

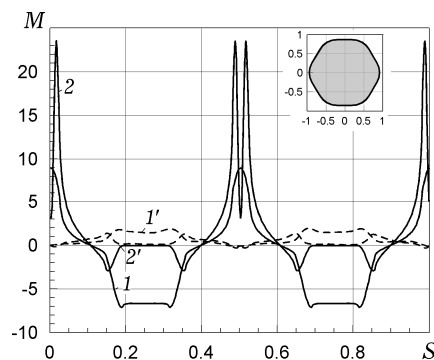
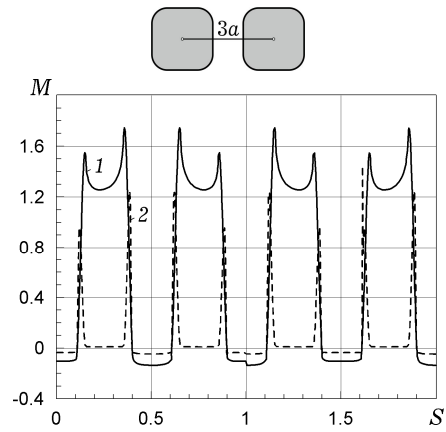


Рис. 2

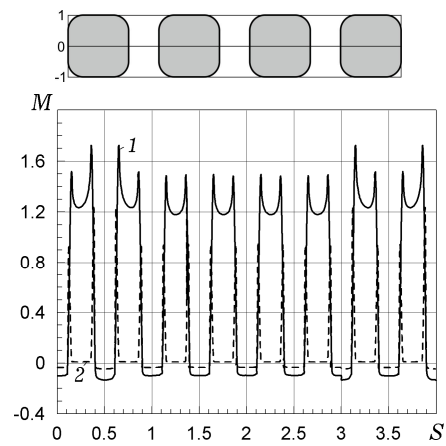
Рис. 2. Відносні моменти біля шестикутного включення

Розглянемо шестикутне включення, вершини якого закруглені дугами кола радіусом $0.5a$, де a – сторона шестикутника. Відносні моменти на межі наведено на рис. 2. Під час розрахунків вибирали 360 вузлів.

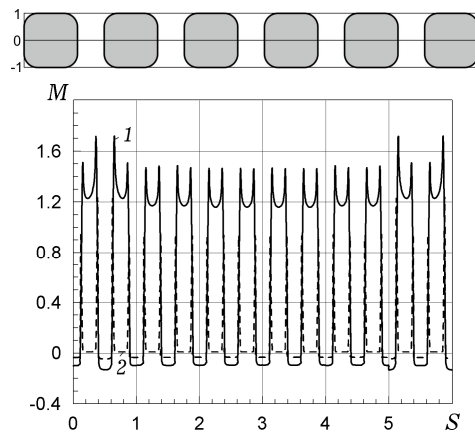
Виявили (рис. 1 і 2), що більші за значеннями моменти біля включення виникають під дією на нескінченності моментів M_x^∞ . Водночас за дії моментів M_y^∞ концентрація напружень незначна. Найбільші моменти виникають на межі в області переходу з прямолінійної ділянки на дугову.



a)



б)



в)

Рис. 3. Відносні моменти на двох (а), чотирьох (б) та шести (в) квадратних включеннях

Розглянемо систему двох, чотирьох та шести квадратних включень, у яких вершини закруглені дугами кола з радіусом $R = 0.25a$ за відстані між їх центрами $3a$ (рис. 3).

Наведені вище моменти для першого включення зображені за умови $0 < S < 1$, для другого – за $1 < S < 2$ і т. д.

Для порівняння на рис. 4 подано відносні моменти для нескінченної кількості включень (розглядали систему з періодом $3a$).

Встановили (рис. 3б), що максимальні моменти виникають біля крайніх включень, а біля внутрішніх вони зменшуються зі збільшенням кількості включень і наближаються до розподілу моментів у періодичній системі включень.

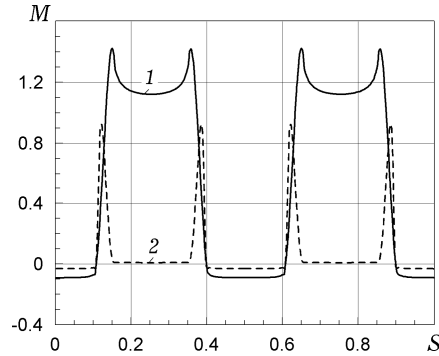


Рис. 4. Періодична система включень

4.1. Згин під дією поперечного навантаження. Вважаємо, що поперечне навантаження $q \neq 0$. Розв'язок задачі зобразимо як суму часткового розв'язку рівняння (1) та коригувального. Частковий позначимо через w_0 , а відповідні йому моменти – через $M_x^{(0)}, M_y^{(0)}, H_{xy}^{(0)}$. Визначимо величини (X_0, Y_0) на контурі L за формулами (8):

$$Y_0 = -d(\partial w_0 / \partial x) / ds, \quad X_0 = d(\partial w_0 / \partial y) / ds.$$

Для знаходження коригувального розв'язку необхідно розглянути задачу згину пластини, де на межах включення задано похідні від прогинів:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

Таку задачу зводимо до знаходження потенціалів Лехніцького за ПНС для області Ω , коли до її межі прикладено вектор зусиль $(-X_0, -Y_0)$, $(x, y) \in L$. Зазначимо, що розв'язок такої задачі існує, оскільки головний вектор і момент визначених так зусиль на кожному з контурів $L_j, j = 1, \dots, J$ дорівнюють нулю.

Для прикладу розглянемо задачу згину пластини, яка перебуває під дією рівномірно розподіленого навантаження $q = \text{const}$. За частковий розв'язок рівняння (1) приймемо: $w_0 = \frac{q}{d_{11}} \frac{x^4}{4!}$.

Моменти, які відповідають цьому розв'язку, будуть:

$$M_x^0 = -\frac{q}{2} x^2, \quad M_y^0 = -\frac{q}{2} \frac{d_{12}}{d_{11}} x^2, \quad H_{xy}^0 = -\frac{q}{2} \frac{d_{16}}{d_{11}} x^2.$$

Тоді величини X_0, Y_0 на основі формул (8) набудуть вигляду

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = -\frac{q}{d_{11}} d \left(\frac{x^3}{3!} \right) / ds = -\frac{q}{2d_{11}} x^2 \frac{dx}{ds}.$$

Для тестування розробленого алгоритму розглянемо задачу згину еліптичної пластини, півосі a, b якої лежать на осях Ox, Oy . Точний розв'язок задачі має вигляд [9] $w = f^2 / C$, де

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad C = 8 \left(3 \frac{d_{11}}{a^4} + 2 \frac{d_{66}}{a^2 b^2} + 3 \frac{d_{22}}{b^4} \right).$$

Моменти визначимо за формулами

$$M_x = -d_{11}w_{11} - d_{12}w_{22} - 2d_{16}w_{12}, \quad M_y = -d_{21}w_{11} - d_{22}w_{22} - 2d_{26}w_{12},$$

$$H_{xy} = -d_{16}w_{11} - d_{26}w_{22} - 2d_{66}w_{12},$$

де

$$w_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{4}{Ca^2} \left(f + \frac{2x^2}{a^2} \right), \quad w_{22} = \frac{4}{Cb^2} \left(f + \frac{2y^2}{b^2} \right), \quad w_{12} = \frac{8xy}{Ca^2b^2}.$$

Розрахунки виконали для еліптичної пластини з відношенням півосей $b/a = 0.5$ для суттєво анізотропного склопластика CF1 та слабоізотропного матеріалу EF з відношенням $E_x/E_y = 0.64$. Відносні моменти $m_n = M_n/(qa^2)$, $m_s = M_s/(qa^2)$, розраховані за розробленим алгоритмом за вибору 48 вузлових точок та точними формулами, наведено в точках межі $x_n = a \cos \theta_n$, $y_n = b \sin \theta_n$, $\theta_n = nh + h/2$ при $h = 12.5^\circ$, $n = 1, \dots, 12$. Тут індекс внизу біля матеріалу вказує на напрямок (Ox або Oy), де жорсткість матеріалу максимальна.

Таблиця 2. Точні та наближені значення моментів на межі еліптичної пластини

n	CF1 _x				EF _y			
	$\#n_n$	$\#n_s$	m_n [9]	m_s [9]	$\#n_n$	$\#n_s$	m_n [9]	m_s [9]
1	-0.233	-0.006	-0.233	-0.006	-0.012	-0.003	-0.012	-0.003
2	-0.199	-0.033	-0.199	-0.033	-0.013	-0.005	-0.013	-0.004
3	-0.149	-0.068	-0.149	-0.068	-0.015	-0.007	-0.015	-0.007
4	-0.103	-0.095	-0.103	-0.095	-0.019	-0.009	-0.019	-0.009
5	-0.068	-0.107	-0.068	-0.107	-0.025	-0.011	-0.025	-0.011
6	-0.044	-0.103	-0.044	-0.103	-0.034	-0.011	-0.034	-0.011
7	-0.03	-0.09	-0.03	-0.09	-0.042	-0.012	-0.043	-0.011
8	-0.023	-0.07	-0.023	-0.07	-0.052	-0.011	-0.052	-0.011
9	-0.02	-0.049	-0.02	-0.049	-0.06	-0.011	-0.06	-0.011
10	-0.02	-0.03	-0.02	-0.03	-0.067	-0.011	-0.067	-0.011
11	-0.02	-0.016	-0.02	-0.016	-0.072	-0.01	-0.072	-0.01
12	-0.02	-0.008	-0.02	-0.008	-0.074	-0.01	-0.074	-0.01

Як видно з табл. 2, для розглядуваних матеріалів за вибору 48 вузлових точок у квадратурному методі [11] забезпечують практично точні результати.

Розглянемо також прямокутну пластину зі сторонами a , b , вершини якої закруглені дугами кола. Результати розрахунків для квадратної пластини із радіусом закруглення $0.1b$ для ізотропного матеріалу з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$ і матеріалу CF1_x наведено на рис. 5. Тут суцільними лініями описано відносні моменти $m_n = M_n/(qa^2)$, а штриховими – $m_s = M_s/(qa^2)$, горизонтальна координата – довжина дуги граничного контуру, яка віднесена до повної довжини, що починається від середини правої сторони квадрата.

Максимальні відносні моменти виникають у центрі сторін квадрата і для ізотропної пластини дорівнюють $m_y = 0.0510$. Отримані раніше [6] (де задачу розв'язували методом рядів Фур'є, визначаючи коефіцієнти наближено із нескінченної системи рівнянь) ці ж моменти для квадратної пластини без закруглення вершин $m_y = 0.0513$.

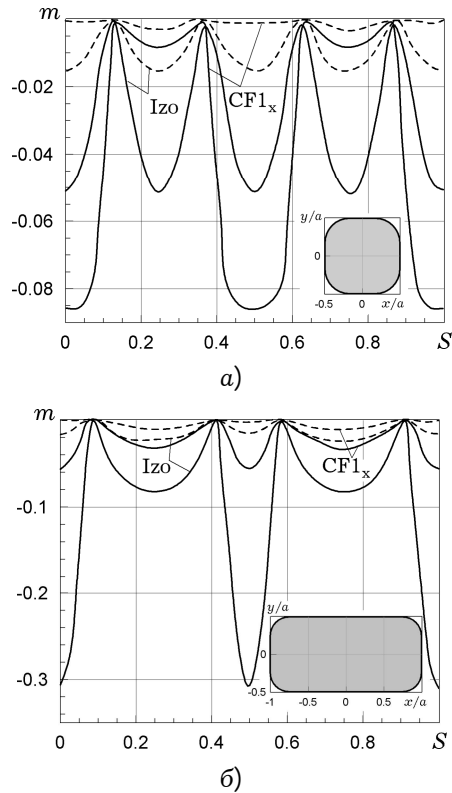


Рис. 5. Відносні моменти на межі квадратної пластини (а) та прямокутного включення (б)

Розраховані відносні моменти на межі прямокутної пластини при $b/a=0.5$ зі закругленими вершинами радіуса $R=0.2b$ наведено на рис. 5б.

Максимальні відносні моменти m_y виникають у центрі довгих сторін прямокутника і для ізотропної пластини дорівнюють 0,083, а в праці [6] становлять 0.0829.

Отже, для композитної пластини на межі нормальні моменти значно більші, ніж для ізотропної, а кільцеві практично відсутні.

Висновки. Запропоновано підхід до визначення напружено-деформованого стану анізотропних пластин зі жорсткими включеннями за згину, який зведено до знаходження потенціалів Лехніцького для відповідно сформульованої першої основної плоскої задачі теорії пружності. З використанням розробленого підходу та методу інтегральних рівнянь досліджено згинні моменти біля включень різної форми та їх систем у нескінченних та обмежених пластинах. Встановлено загальні закономірності розподілу моментів для матеріалів з низькою та суттєвою анізотропією.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – Москва: Мир, 1984. – 494 с.
2. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев; Донецк: Вицц шк., 1976. – 200 с.
3. Любчак В. А., Фильштинский Л. А. Изгиб полубесконечной анизотропной пластины, ослабленной криволинейными разрезами // Прикл. механика. – 1982. – 18, № 10. – С. 63-67.
4. Мартинович Т. Л., Ніценко І. О. Про один спосіб розв'язування задачі згину анізотропних плит // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1971. – Вип. 5. – С. 54–58.
5. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. – Москва: Гостехиздат, 1951. – 496 с.
6. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 508 с.

7. Cheng, Z. Q., & Reddy, J. N. Octet formalism for Kirchhoff anisotropic plates // In Proc. of the Royal Soc. of London A: Mathematical, Physical and Engin. Sci. – 2002. – 458, № 2022. – P. 1499–1517.
8. Hsieh, M. C., & Hwu, C. Anisotropic elastic plates with holes /cracks inclusions subjected to out-of-plane bending moments // Int. J. of Solids and Struc. – 2002. – 39(19). – P. 4905–4925.
9. Lekhnitskii S. G. Anisotropic Plates. Gordon and Breach Science Publishers. – New York; London; Paris; Montreux; Tokyo; Melbourne, 1987. – 534 p.
10. Maksymovych O., Illiushyn O. Stress calculation and optimization in composite plates with holes based on the modified integral equation method // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2017. – 83. – P. 180–187.
11. Maksymovych O., Jaroszewicz J., Determination of stress state of anisotropic plates with rigid inclusions based on singular integral equations // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2018. – 95. – P. 215–221.
12. Scholar N. A. Anisotropic Analysis Using Boundary Elements // Computational Mech. Publications. – 1994. – 20. – P. 142–180.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ВКЛЮЧЕНИЯМИ НА ОСНОВАНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрена задача об изгибе анизотропной пластины постоянной толщины с жесткими включениями. Алгоритм решения базируется на установленной взаимосвязи между потенциалами Лехницкого для задачи изгиба пластин с включениями и соответственно сформулированной первой основной анизотропной плоской задачи теории упругости. Вспомогательная задача решена методом сингулярных интегральных уравнений в комплексном виде. Рассмотрены задачи изгиба для пластин с включениями, которые находятся под действием моментов на бесконечности (для пластин бесконечных размеров) и поперечной нагрузки (для ограниченных пластин). Приведены примеры расчета напряжений в пластинах с включениями различных форм и системами включений.

Ключевые слова: анизотропная пластина, изгиб, жесткие включения, нагрузка, плоское напряженно-деформированное состояние, сингулярные интегральные уравнения.

INVESTIGATION OF BENDING OF ANISOTROPIC PLATES WITH INCLUSIONS BASED ON SINGULAR INTEGRAL RELATIONS

The problem on bending of an anisotropic plate of constant thickness with rigid inclusions is considered. The algorithm of solving is constructed on the basis of established interrelation between Lekhnitsky potentials for the problem of bending of plates with inclusions and for a correspondingly formulated first basic anisotropic plane problem of elasticity theory. To solve this auxiliary problem the method of singular integral equations in complex form is used. Problems of bending for plates with inclusions under action of moments at infinity (for infinite plates) and transversal loading (for finite plates) are considered. Examples of stresses calculations in plates with inclusions of different shapes and systems of inclusions are presented.

Key words: anisotropic plate, bending, rigid inclusions, loading, plane stress-strain state, singular integral equations.

¹НУ «Львівська Політехніка», Львів

²Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підтригача НАН України, Львів

³University of Science and Technology, Bydgoszcz, Poland