

**СУМІСНА ДІЯ ЗГИНУ З РОЗТЯГОМ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З
НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ВІДСУТНОСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ ТА
З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН ТА ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ В ЇЇ
ВЕРШИНАХ**

Досліджено задачу про комбінований згин з розтягом ізотропної пластини з наскрізною тріщиною розподіленими згинальними моментами та зусиллями на нескінченності за відсутності контакту її берегів та зовнішнього навантаження на ній, але за наявності пластичних зон у її вершинах та з урахуванням зміцнення матеріалу, де виконуються умови пластичності Треска, у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніра. Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластин отримано аналітичний розв'язок задачі у класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон. Записані залежності для визначення довжини пластичної зони та розхилу берегів тріщини у її вершинах. Виконано їх числовий аналіз за різних параметрів задачі.

Ключові слова: пластинка, тріщина, пластичні зони, умови пластичності Треска, комплексні потенціали, зміцнення матеріалу.

Вступ. В інженерній практиці часто використовують елементи конструкцій у вигляді пластин, в яких під час експлуатації чи навіть виготовлення можуть виникнути тріщини – сильні концентратори напружень, що призводять до зниження їх міцності та надійності. Це потрібно враховувати, проектуючи такі конструкційні елементи.

Напружено-деформований стан (НДС) пластин з тріщинами досліджували багато дослідників [1, 6–11, 20–25], враховуючи пластичні зони у їх вершинах [6, 8, 10, 20, 24, 25]. Згин пластин з тріщинами з урахуванням контакту їх берегів вивчали у публікаціях [3–5, 13–15, 29, 32–38], у працях [17–19] взяли до уваги пластичні зони в їх вершинах. НДС пластин з тріщинами за сумісної дії згину з розтягом проаналізовано у працях [16, 28, 30–31], однак, в цих дослідженнях не враховували пластичні зони у їх вершинах.

Нижче з використанням апарату теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластин розглянуто задачу про сумісну дію згину з розтягом ізотропної пластини з наскрізною тріщиною, береги якої вільні від зовнішнього навантаження і не контактують, а у її вершинах утворилися пластичні зони з урахуванням лінійного зміцнення матеріалу, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніру [6, 8]. Отримано аналітичний розв'язок задачі в класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон. Аналітично визначено довжину пластичної зони і розхил берегів тріщини у її вершині та виконано їх числовий аналіз.

1. Формулювання задачі. Дослідимо комбінований згин з розтягом ізотропної пластини завтовшки $2h$ за наявності наскрізної прямолінійної тріщини завдовжки $2l$, береги якої вільні від зовнішнього навантаження і не контактують під дією розподілених зусиль та згинальних моментів на нескінченності, вектори яких паралельні і перпендикулярні до берегів тріщини. Вважасмо, що у вершинах тріщини є пластичні зони з урахуванням зміцнення матеріалу, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніра [6, 8].

* alfavitska_solomiya@i.ua

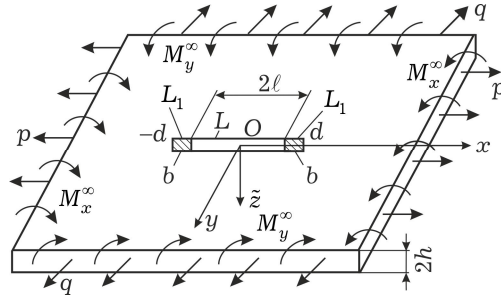


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат Oxy з початком у центрі тріщини, направивши вісь Ox по ній, а вісь Oy – перпендикулярно до серединної площини. Згинальні моменти на нескінченності позначимо через M_x^∞ і M_y^∞ , а розподілені зусилля – через q і p . Лінії дійсної осі, де розміщена тріщина, позначимо через L , а пластичні зони – через L_1 . Довжину пластичної зони у вершинах тріщини – через b , а кінці тріщини з пластичними зонами – через $-d$ і d (див. рис. 1). Крім того, введемо позначення $LL = L \cup L_1$.

Для опису згину пластини користуватимемося класичною теорією. Згідно з формулюванням задачі маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^\pm = \sigma_0 \sigma^*(x), M_y^\pm = M_0 \sigma^*(x), x \in L_1, \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^\pm = 0, M_y^\pm = 0, x \in L, \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^\pm = 0, P_y^\pm = 0, x \in LL, \quad (3)$$

де σ_{yy} і σ_{xy} – компоненти тензора напружень у плоскій задачі; σ_0 і M_0 – шукані величини; M_y і P_y – згинальний момент та перерізальна сила у сенсі Кірхгофа; значками "+" і "-" позначено граничне значення відповідної величини, якщо $y \rightarrow \pm 0$; σ_B, σ_Y – границі міцності та плинності матеріалу пластини;

$$\sigma^*(x) = a|x| + c,$$

$$a = \frac{1 - m^*}{d - l}, c = m^* - \frac{(1 - m^*)l}{d - l}, m^* = \sigma_B / \sigma_Y. \quad (4)$$

2. Побудова розв'язку задачі. Введемо до розгляду комплексні потенціали плоскої задачі $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ та класичної теорії згину пластин $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$, при цьому скористаємося залежностями [12, 22]

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

$$2\mu\partial_x(u + iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} + i\frac{\partial v_3}{\partial x} = -\frac{2}{\kappa}\partial_x g = -\frac{2}{\kappa}[\Phi_3(z) - \Omega_3(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_3'(z)}], \quad (7)$$

$$f = \frac{2}{\kappa}[\Phi_3(z) + \Omega_3(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_3'(z)}], \quad (8)$$

де $\mu = 0.5E/(1+\nu)$ – модуль зсуву, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона; u і v та u_3 і v_3 – компоненти вектора переміщення відповідно у плоскій задачі та класичній теорії згину пластин; $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ – циліндрична жорсткість пластини;

$$z = x + iy, i^2 = -1, \kappa = (3-\nu)/(1+\nu), \mathbb{K} = (3+\nu)/(1-\nu),$$

$$g = \partial_x w + i\partial_y w, f(x) = \left(M_y + ic' + i \int_0^x P_y(\varepsilon) d\varepsilon \right) / m, \quad (9)$$

$$m = -D(1-\nu), \partial_\alpha f = \partial f / \partial \alpha,$$

w – прогин пластини.

Введені комплексні потенціали за великих $|z|$ можна подати у вигляді

$$\Phi(z) = \Gamma + O(1/z^2), \quad \Omega(z) = \Gamma + \Gamma' + O(1/z^2),$$

$$\Phi_3(z) = \mathbb{K}\Phi + O(1/z^2), \quad \Omega_3(z) = -\mathbb{K}\Phi - \mathbb{K}' + O(1/z^2), \quad (10)$$

де

$$\Gamma = \frac{1}{4}(q+p), \quad \Gamma' = \frac{1}{2}(q-p), \quad \mathbb{K}' = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \mathbb{K} = \frac{M_x^\infty - M_y^\infty}{2m}. \quad (11)$$

Якщо врахувати (5) і (8), то з крайових умов (1)–(3) отримаємо:

$$(\Phi(x) - \Omega(x))^+ - (\Phi(x) - \Omega(x))^- = 0, \quad x \in \mathbb{L},$$

$$(\mathbb{K}\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^+ - (\mathbb{K}\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^- = 0, \quad x \in \mathbb{L}. \quad (12)$$

Взявши до уваги (10) та розв'язавши задачі лінійного спряження (12), одержимо:

$$\Omega(z) = \Phi(z) + \Gamma', \quad \Omega_3(z) = \mathbb{K}\Phi_3(z) - (\mathbb{K}+1)\mathbb{K}' - \mathbb{K}'. \quad (13)$$

Враховувавши крайові умови (1)–(3), на основі (5) і (8) можемо записати:

$$(\Phi(x) + \Omega(x))^+ + (\Phi(x) + \Omega(x))^- = \begin{cases} 0, & x \in L, \\ 2\sigma_0 \sigma^*(x), & x \in L_1, \end{cases} \quad (14)$$

$$\left(\mathbb{K}\Phi(x) + \Omega_3(x) - \frac{ic'}{m} \right)^+ + \left(\mathbb{K}\Phi(x) + \Omega_3(x) - \frac{ic'}{m} \right)^- = \begin{cases} 0, & x \in L, \\ \frac{2M_0}{m} \sigma^*(x), & x \in L_1. \end{cases}$$

Взявши до уваги (13) і (4), крайові умови (14) подамо так:

$$\left[\Phi(x) + \frac{1}{2}\Gamma' - \frac{1}{2}\sigma_0 b \right]^+ + \left[\Phi(x) + \frac{1}{2}\Gamma' - \frac{1}{2}\sigma_0 b \right]^- = \begin{cases} -\sigma_0 c, & x \in L, \\ \sigma_0 a|x|, & x \in L_1, \end{cases}$$

$$\left[\mathbb{K}\Phi_3(x) - \frac{ic'}{2m} - \frac{1}{2}(\mathbb{K}+1)\mathbb{K}' - \frac{1}{2}\Gamma' - \frac{1}{2}b\frac{M_0}{m} \right]^+ +$$

$$+ \left[\mathbb{K}\Phi_3(x) - \frac{ic'}{2m} - \frac{1}{2}(\mathbb{K}+1)\mathbb{K}' - \frac{1}{2}\Gamma' - \frac{1}{2}b\frac{M_0}{m} \right]^- = \begin{cases} -\frac{M_0}{m} c, & x \in L, \\ \frac{M_0}{m} a|x|, & x \in L_1, \end{cases} \quad (15)$$

Розв'язавши задачі лінійної спряженості (15) у класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон, отримаємо:

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2}\Gamma' + \frac{1}{2}\sigma_0 b + \frac{X_1(z)\sigma_0}{2\pi i} \times \left[a \int_{L_1} \frac{|t| dt}{X_1^+(t)(t-z)} - c \int_L \frac{dt}{X_1^+(t)(t-z)} \right], \quad (16)$$

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{2m} \left[\frac{ic'}{m} + (\kappa+1) \frac{M_0}{m} b \right] + \frac{M_0 X_1(z)}{2\pi i m} \left[a \int_{L_1} \frac{|t| dt}{X_1^+(t)(t-z)} - c \int_L \frac{dt}{X_1^+(t)(t-z)} \right], \quad (17)$$

де

$$X_1(z) = \sqrt{z^2 - d^2}.$$

На основі (16) можемо записати:

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{2m} \left[\frac{ic'}{m} + (\kappa+1) \frac{M_0}{m} b \right] + \frac{M_0}{m} \frac{1}{\sigma_0} \left[\Phi(z) + \frac{1}{2}\Gamma' - \frac{1}{2}b\sigma_0 \right]. \quad (18)$$

Якщо врахувати розвинення (10), то з (18), спрямувавши $|z| \rightarrow \infty$, після відповідних перетворень отримаємо:

$$c' = 0, \quad \sigma_0 = qM_0/M_Y^\infty. \quad (19)$$

Беручи до уваги розвинення для функції $\Phi(z)$ (10) та розвиваючи в ряд праву частину за великих $|z|$ вирази для комплексного потенціалу $\Phi(z)$, після прирівнювання відповідних коефіцієнтів з цих розвинень одержимо:

$$\frac{1}{2}\Gamma + \frac{1}{2}\Gamma' - \frac{1}{2}b\sigma_0 = \frac{\sigma_0}{2\pi} \left[a \int_{L_1} \frac{|t| dt}{\sqrt{d^2 - t^2}} - b \int_L \frac{dt}{\sqrt{d^2 - t^2}} \right], \quad (20)$$

$$a \int_{L_1} \frac{|t| dt}{\sqrt{d^2 - t^2}} - b \int_L \frac{dt}{\sqrt{d^2 - t^2}} = 0. \quad (21)$$

Легко перекоонатися, що умова (21) автоматично виконується, а з (20) отримаємо залежність для знаходження довжини пластичної зони:

$$\frac{\pi q}{2\sigma_0} \neq a\sqrt{d^2 - \bar{r}^2} + b \arccos \frac{l}{d}. \quad (22)$$

Зауважимо, що коли $m^* = 1$ і згин відсутній, то з (22) отримаємо відому залежність [20, 24].

Для знаходження σ_0 і M_0 скористаємося спочатку умовою пластичності Треска у вигляді поверхневого шару на нижній основі пластини [8]:

$$\sigma_0 + 3M_0 / (2h^2) = \sigma_Y. \quad (23)$$

Введемо позначення $\sigma_\infty = 3M_Y^\infty / 2h^2$.

Підставляючи (19) у (23), знайдемо:

$$M_0 = \sigma_Y M_Y^\infty / (q + \sigma_\infty), \quad (24)$$

Якщо скористатися умовою пластичного шарніра [6, 8]

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_Y}\right)^2 + \frac{M_0}{h^2 \sigma_Y} = 1, \quad (25)$$

то

$$M_0 = \frac{3M_Y^\infty \sigma_Y}{\sigma_\infty + \sqrt{\sigma_\infty^2 + 9q}}. \quad (26)$$

Розкриття тріщини δ у її вершині тріщини l знайдемо за формулою

$$\delta = \int_d^l \partial x (v^+ - v^- + v_3^+ - v_3^-) dx. \quad (27)$$

Якщо врахувати формули (6), (7), (13), (16), то залежність (27) можемо переписати так:

$$\delta = -\frac{4\sigma_0}{\pi E} \left[1 \mathbf{m} \frac{\sigma_\infty (1+\nu)}{(3+\nu)q} \right] \times \int_d^l \left[a \int_{L_1} \frac{|t| dt}{\sqrt{d^2 - t^2} (t-x)} - b \int_L \frac{dt}{\sqrt{d^2 - t^2} (t-x)} \right] \sqrt{d^2 - x^2} dx, \quad (28)$$

де знак "–" пов'язаний з верхньою основою пластини, а знак "+" – з нижньою.

Після обчислення інтегралів у формулі (28) отримаємо:

$$\delta = \frac{4\sigma_0}{\pi E} \left[1 \mathbf{m} \frac{\sigma_\infty (1+\nu)}{(3+\nu)q} \right] \left(-2bl \ln \frac{l}{d} + ab(2l+b) \right). \quad (29)$$

Як бачимо, за сумісної дії згину з розтягом береги тріщини не контактуватимуть, якщо виконувється нерівність

$$q \geq \sigma_\infty (1+\nu)/(3+\nu), \quad (30)$$

яка збігається з відповідною відомою залежністю [16, 28].

Враховавши (19), (24), (26), для числового аналізу задачі формули (22) для визначення відносної довжини пластичної зони $\varepsilon = b/l$ у вершині тріщини та (29) для знаходження розкриття її берегів $\delta^* = E\delta/(\sigma_Y l)$ на нижній основі пластини зручно подати у вигляді

$$f^*(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} \lambda (1+\rho), \quad \delta^* = \frac{\lambda q}{\sigma_Y} (1+\rho), \quad (31)$$

за використання умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару та

$$f^*(\varepsilon) = \frac{\pi}{6} \lambda (\rho + \sqrt{\rho^2 + 9}), \quad \delta^* = 3 \frac{\lambda q}{\sigma_Y} (\rho + \sqrt{\rho^2 + 9}), \quad (32)$$

у випадку використання умови пластичності Треска у вигляді пластичного шарніра.

У формулах (31), (32) введемо таке позначення:

$$f^*(\varepsilon) = (1 - m^*) \sqrt{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}} + b(\varepsilon) \arccos \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad b(\varepsilon) = m^* - (1 - m^*)/\varepsilon, \\ \frac{\lambda q}{\sigma_Y} = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{\rho(1+\nu)}{(3+\nu)} \right) \left[2b(\varepsilon) \ln(1+\varepsilon) + (1 - m^*)(2+\varepsilon) \right],$$

$$\lambda = \frac{q}{\sigma_Y}, \quad \rho = \frac{\sigma_\infty}{q}.$$

3. **Числовий аналіз.** Числово проаналізували задачу для $\nu = 0.3$ (рис. 2 та 3), де суцільні лінії отримані на основі умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару, а штрихові – з використанням умови пластичного шарніра. Причому рис. *i, a)* відповідають безрозмірній довжині пластичної зони у вершинах тріщини, а рис. *i, б)* – безрозмірному розкриттю у її вершині.

На рис. 2 подано залежності безрозмірної довжини пластичної зони та безрозмірного розкриття тріщини від $\lambda = q / \sigma_Y$. Крива 1 побудована при $\rho = \sigma_\infty / q = 0$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), крива 2 – при $\rho = 0.5$ ($0 \leq \lambda \leq 0.67$), крива 3 – при $\rho = 1$ ($0 \leq \lambda \leq 0.5$), крива 4 – при $\rho = 2$ ($0 \leq \lambda \leq 0.33$).

На рис. 3 подано залежності безрозмірної довжини пластичної зони та безрозмірного розкриття тріщини від $\rho = \sigma_\infty / q$. Крива 1 побудована при $\lambda = q / \sigma_Y = 0.4$ ($0 \leq \rho \leq 1.5$), крива 2 – при $\lambda = 0.5$ ($0 \leq \rho \leq 1$), крива 3 – при $\lambda = 0.7$ ($0 \leq \rho \leq 0.43$), крива 4 – при $\lambda = 0.9$ ($0 \leq \rho \leq 0.11$).

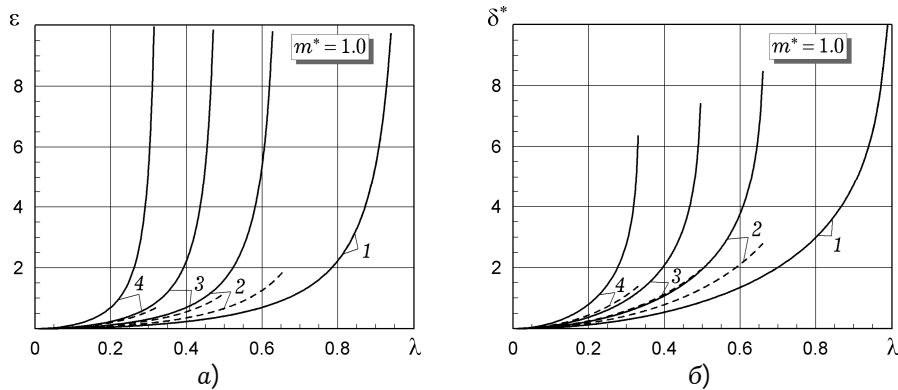


Рис. 2. Графічні залежності безрозмірної довжини пластичної зони (а) та безрозмірного розкриття тріщини (б) від $\lambda = q / \sigma_Y$ при $m^* = 1$

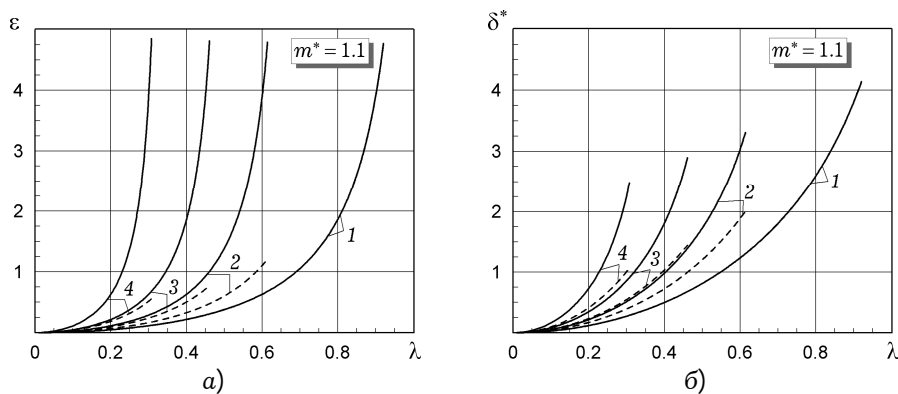


Рис. 3. Графічні залежності безрозмірної довжини пластичної зони (а) та безрозмірного розкриття тріщини (б) від $\lambda = q / \sigma_Y$ при $m^* = 1.1$

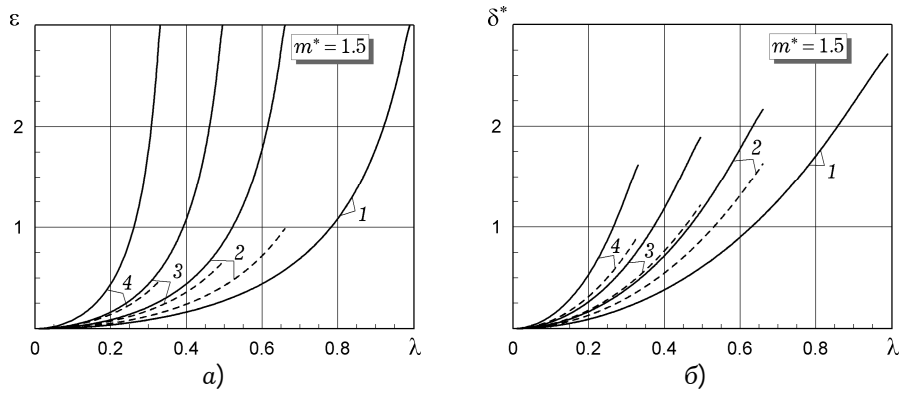


Рис. 4. Графічні залежності безрозмірної довжини пластичної зони (а) та безрозмірного розкриття тріщини (б) від $\lambda = q / \sigma_Y$ при $m^* = 1.5$

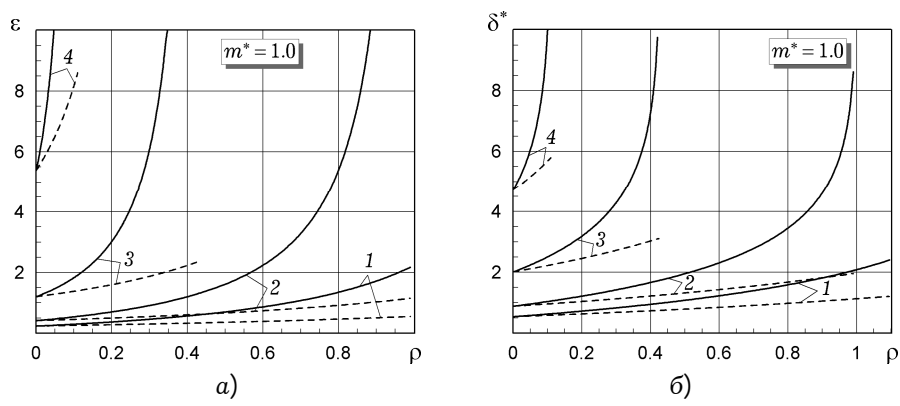


Рис. 5. Графічні залежності безрозмірної довжини пластичної зони (а) та безрозмірного розкриття тріщини (б) від $\rho = \sigma_\infty / q$ при $m^* = 1$

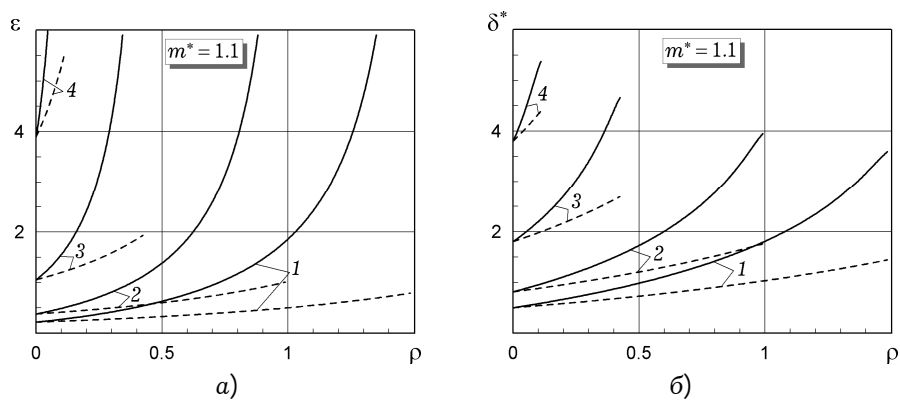


Рис. 6. Графічні залежності безрозмірної довжини пластичної зони (а) та безрозмірного розкриття тріщини (б) від $\rho = \sigma_\infty / q$ при $m^* = 1,1$

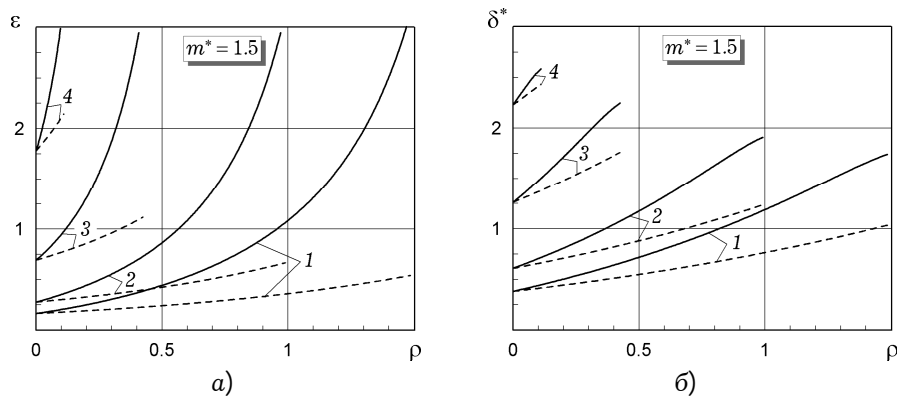


Рис. 7. Графічні залежності безрозмірної довжини пластичної зони (а) та безрозмірного розкриття тріщини (б) від $\rho = \sigma_{\infty} / q$ при $m^* = 1.5$

Висновки. Числовий аналіз задачі засвідчив, що довжина пластичної зони у зовнішніх вершинах тріщин та розхил їх берегів на нижній основі пластини, визначені з використанням умови пластичності у вигляді поверхневого шару, є більшими, ніж з використанням умови пластичності у вигляді пластичного шарніра. Крім того, зі збільшенням границі плинності матеріалу пластини σ_B зростає як довжина пластичної зони у вершинах тріщини, так і розхил її берегів на нижній основі пластини. Зауважимо, що якщо зміцнення матеріалу відсутнє, тобто $m^* = 1$, то отримуємо числові результати публікації [2].

1. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. Білаш О. В. Згин пластини зі щілиною за наявності пластичних зон у її вершинах // Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту. – 2017. – № 1 (85). – С. 23–28.
3. Божидарнік В., Опанасович В., Герасимчук П. Згин ізотропної пластини, ослабленої розрізом по дузі кола з контактуючими берегами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 7–16.
4. Божидарнік В. В., Опанасович В. К., Герасимчук П. В. Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Проблеми прочності. – 2006. – № 85 (383). – С. 135–141.
5. Божидарнік В. В., Опанасович В. К., Герасимчук П. В. Згин пластини з двома рівними симетричними тріщинами по дузі кола з урахуванням контакту їх берегів // Пр. 13-го міжнар. колоков. «Механічна втома матеріалів». – Тернопіль: Тернопільськ. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2006. – С. 450–455.
6. Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 320 с.
7. Кит Г. Н., Кривцуун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 278 с.
8. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
9. Мазурак Л. П., Бережницький Л. Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.
10. Мирсалимов В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. – Баку: ЭЛМ, 1984. – 122 с.
11. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
12. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.

13. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наук. нотатки Луцьк. техн. ун-ту. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
14. Опанасович В. К., Яцик І. М., Сулим Г. Т. Згин зосередженими моментами пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 4. – С. 71–81.
Te same: Opanasovych V. K., Yatsyk I. M., Sulym H. T. Bending of Reissner's plate containing a through-the-thickness crack by concentrated moments taking into account the width of a contact zone of its faces // J. of Mathematical Sciences. – 2012. – 187, No. 5. – P. 620–634.
15. Опанасович В., Дорош М. Згин розподіленими моментами на нескінченності ізотропної пластини з періодичною системою колінеарних наскрізних тріщин з урахуванням контакту берегів тріщин // Тез. доп. 7-го укр.-польськ. наук. симп. "Актуальні задачі механіки неоднорідних структур". – Львів, 2007. – С. 75–76.
16. Опанасович В., Дорош М. Комбінований згин з розтягом пластини, ослабленої двома колінеарними тріщинами, береги яких контактують // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 194–206.
17. Опанасович В., Слободян М. Згин ізотропної пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту їх берегів за наявності пластичних зон у її вершинах // Зб. наук. праць 5-ої Міжнар. конф. «Механіка руйнування матеріалів та міцності конструкцій» (24–27 червня, Львів, 2014 р.). Під заг. ред. В. В. Панасюка. – С. 403–408.
18. Опанасович В. Двосторонній згин ізотропної пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною з урахуванням контакту її берегів та пластичних зон у її вершинах // Сучасні проблеми механіки і математики: в 3-х т. Під заг. ред. Р. М. Кушніра, Б. Й. Пташника. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 2. – С. 83–85.
19. Опанасович В., Слободян М. Згин ізотропної пластини з двома рівними співвісними наскрізними тріщинами при злитті пластичних зон між ними з урахуванням контакту берегів тріщин // Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту. – 2015. – № 4 (80). – С. 53–63.
20. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
21. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.
22. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
23. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 324 с.
24. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 248 с.
25. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
26. Шацький І. П. Изгиб пластины, содержащей периодическую систему параллельных разрезов с контактирующими кромками // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 13. – С. 56–61.
27. Шацький І., Даляк Т. Взаємовплив паралельних тріщин з берегами, які контактують, при згині пластин // Машинознавство. – 2000. – № 1. – С. 27–30.
28. Шацький І. П. Гранична рівновага пластинки з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині // Доп. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 62–64.
29. Шацький І. П., Маковійчук М. В. Змикання берегів колінеарних тріщин при згині пластини на пружній основі // Машинознавство. – 2004. – № 6. – С. 10–12.
30. Шацький І. П., Маковійчук М. В. Взаємодія берегів тріщини при сумісному розтязі-згині пластини на пружній основі // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 62–68.

31. Шацький І. П., Перепічка В. В. Граничний стан напівнескінченної пластини з крайовою тріщиною за згину з розтягом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 2. – С. 73–77.
32. Dempsey J. P., Shekhtman I. I., Slepyan L. L. Closure of a through crack in a plate under bending // Int. J. of Solids and Struct. – 1998. – 35. – P. 4077–4089.
33. Heming F. S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate // Int. J. of Fract. – 1980. – 16, № 4. – P. 289–304.
34. Hui C. Y., Zehnder Alan T. A theory for the fracture of thin plates subjected to bending and twisting moments // Int. J. of Fract. – 1993. – 61. – P. 211–229.
35. Hui C. Y., Zehnder Alan T., Potdar Y. K. Williams meets von Karman: Mode coupling and nonlinearity in the fracture of thin plates // Int. J. of Fract. – 1998. – 93. – P. 409–429.
36. Jones D. P., Swedlow J. L. The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate // Int. J. of Fract. – 1975. – 11, № 6. – P. 897–914.
37. Slepyan L. I., Dempsey J. P., Shekhtman I. I. Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending // J. of the Mech. and Physics of Solids. – 1995. – 43. – P. 1727–1749.
38. Young M., Sun C. Cracked plates subjected to out-of-plane tearing loads // Int. J. of Fract. – 1993. – 60. – P. 1–18.

СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА С РАСТЯЖЕНИЕМ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СКВОЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ И С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНЫХ ЗОН И УПРОЧНЕНИЕ МАТЕРИАЛА В ЕЕ ВЕРШИНАХ

Исследована задача о комбинированном изгибе с растяжением изотропной пластинки со сквозной трещиной распределенными изгибающими моментами и усилиями на бесконечности при отсутствии контакта ее берегов и внешней нагрузки, но при наличии пластичных зон в ее вершинах и с учетом упрочнения материала, где выполняются условия пластичности Треска в виде поверхностного слоя или пластичного шарнира. С использованием комплексных потенциалов плоской задачи и классической теории изгиба пластин получено аналитическое решение задачи в классе функций, ограниченных в вершинах пластичных зон. Записаны зависимости для определения длины пластичной зоны и расхождения берегов трещины в ее вершинах. Проведен числовой анализ при разных параметрах задачи.

Ключевые слова: пластинка, трещина, пластические зоны, условия пластичности Треска, комплексные потенциалы, упрочнение материала.

THE COMPATIBLE ACTION OF BENDING WITH THE TENSION OF AN ISOTROPIC PLATE CONTAINING A CRACK WITHOUT CONTACT OF THEIR TIPS AND WITH TAKING INTO ACCOUNT PLASTIC ZONES AND MATERIAL STRENGTHENING

The problem of combined bending with the tension of an isotropic plate containing rectilinear crack is researched. The crack banks contacts in the area of constant width near the upper base of the plate, and the plastic zones forms in its tips with tacking into account the material strengthening, where Treska plasticity conditions in the form of the surface layer and plastic hinge are fulfilled. Using complex potentials of the plane problem and the classical theory of bending of the plates, analytic solution to the problem in the class of the functions limited in the tips of plastic zones is obtained. Dependencies of the length of the plastic zone and opening the crack's banks are found analytically. Their numerical analysis for various parameters of the problem is conducted.

Key words: plate, crack, plastic zones, Treska plasticity conditions, complex potentials, material strengthening.