

МЕТОД ПРЯМОГО ВИРІЗУВАННЯ У ЗАДАЧАХ ПРУЖНОЇ РІВНОВАГИ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

У розробленому раніше методі прямого вирізування враховано анізотропію матеріалу. В його основі – моделювання скінченного або обмеженого тіла з тонкими дефектами структури довільного типу та заданими на його межі крайовими умовами нескінченим простором з тими ж, як і у вихідній задачі, неоднорідностями та додатковими тонкими (тріщинами чи абсолютно жорсткими включеннями), що формують межу тіла. За допомогою навантажених тріщин змодельовано крайові умови першого роду, а за допомогою абсолютно жорстких включень, впроваджених у матрицю з певним натягом, – крайові умови другого роду. Розроблений підхід апробовано на задачах поздовжнього зсуву анізотропних півпростору, шару та клина за наявності внутрішньої тріщини та заданих крайових умов першого роду.

Ключові слова: анізотропія, ортотропний матеріал, тріщина, півпростір, шар, клин, коефіцієнт інтенсивності напружень, метод прямого вирізування, поздовжній зсув.

Сучасний бурхливий розвиток технологій та промисловості неможливий без урахування щораз ширшого спектра властивостей традиційних, а також нових матеріалів. Дедалі частіше у математичному моделюванні матеріалу відмовляються від припущення, що він однорідний та ізотропний. Існує нагальна потреба брати до уваги зміну його пружних властивостей у різних напрямках, тобто анізотропію. Причому це стосується не лише природної анізотропії (деревина, кристали, гірські породи), але й конструкційної чи штучної у неоднорідних матеріалах і виробках, зокрема пластинах і оболонках, армованих тонкими стрічковими неоднорідностями, волокнами, наповнювачами, у смарт-матеріалах тощо.

Виробництво й експлуатація елементів конструкцій чи інших матеріальних об'єктів неминуче супроводжуються виникненням у них поряд із передбаченим конструктивним задумом також і непередбачуваних неоднорідностей – тріщин, пружних та жорстких тонких включень різної форми. Тому важливо знайти розподіл напружень у тілах з такими неоднорідностями, а також з'ясувати придатність таких конструкцій до подальшої експлуатації.

На сьогодні розроблено низку потужних методів та підходів для аналітико-числового та суто числового аналізу пружної рівноваги обмежених тіл із тонкими стрічковими неоднорідностями. Серед них найпоширеніші методи інтегральних перетворень, методи теорії функцій комплексної змінної, прямі числові, а також певні їхні комбінації.

З використанням методів інтегральних перетворень Фур'є та функцій стрибків розв'язано [10] антиплоску задачу теорії пружності для пакета анізотропних смуг, що містять стрічкові неоднорідності з довільними пружними властивостями, які у граничних випадках можуть відповідати тріщині чи абсолютно жорсткому тонкому прошарку. Числові результати подано для однорідного навантаження кусково-однорідного простору за наявності пружної стрічки в одному з півпросторів. Досліджено [11] поздовжній зсув анізотропного півпростору з тонким анізотропним пружним включенням за дії однорідного навантаження. Вивчено [23] вплив гвинтових дислокацій та зосереджених сил на шарувату структуру.

Ортотропний пружний шар з тріщиною, перпендикулярною межі, досліджено [18] з використанням інтегральних перетворень і рядів Фур'є.

* kirill.all@gmail.com

Паралельну до межі шару тріщину за допомогою методів теорії функцій комплексної змінної вивчено у праці [14]. Розв'язки задач отримано у замкненому вигляді. На взаємодії внутрішніх, крайових тріщин та порожнин в ортотропному шарі за наявності дислокацій зосереджено увагу у праці [13].

Під час вивчення поздовжнього зсуву пружних анізотропних тіл з тонкостінними включеннями з'ясовано [8] зв'язок інваріантного J -інтеграла з функцією напружень та запропоновано використовувати його для оцінювання граничного стану та узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у відповідних задачах. З допомогою методів функцій комплексної змінної знайдена залежність між узагальненими КІН та J -інтегралом.

Антиплоску деформацію анізотропних тіл з тонкостінними структурами проаналізовано [9, 12] за допомогою прямого числового підходу – методу граничних елементів. Зокрема, підхід до регуляризації сингулярних і квазі-сингулярних інтегралів запропоновано у праці [9].

З використанням аналога скінченного перетворення Мелліна досліджена задача поздовжнього зсуву скінченного одно- й двокомпонентного анізотропного клина з міжфазною тріщиною [15, 22]. Розв'язано [17] задачу пружної рівноваги ортотропного прямокутного біматеріалу з міжфазною тріщиною. Зі застосуванням розвинень розв'язку у ряди Фур'є її зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР), яке розв'язано числово.

Аналітичні вирази КІН для низки задач поздовжнього зсуву тіл з крайовою тріщиною отримано у працях [16, 21, 25] за методом конформних відображень. Зокрема, досліджено круглий вал, клин, кусково-однорідний півпростір та двошарову структуру з крайовою тріщиною за дії зосереджених чинників.

На відміну від прямих числових методів для вивчення напруженого стану тіл різної геометрії використовують суттєво різні аналітико-числові способи і підходи. У цілісній формі моделювати розв'язки задач для деформованих тіл складної геометричної форми з тонкими неоднорідностями методом прямого вирізування вперше запропонували у праці [4]. В його основі – формування досліджуваного тіла з тонкими неоднорідностями за допомогою нескінченного однорідного чи кусково-однорідного простору зі системою тонких дефектів, частина з яких формуватиме межі тіла та крайові умови на них. Навантаженими тріщинами формують межі тіла з прикладеними зусиллями, а впровадженими у матрицю з певним натягом абсолютно жорсткими включеннями окреслюють такі чи інші переміщення на відповідній межі. За такого способу дещо зростає кількість СІР, проте суттєво спрощується та уніфікується процедура їхньої побудови та розв'язування. Такий підхід дав змогу успішно дослідити низку задач пружної рівноваги ізотропних плоскошаруватих (півпростору, шару, двошарової структури) [3, 4] та клинових структур [2, 3], а також бруса [1, 6] з тріщинами та включеннями за дії однорідного навантаження та зосереджених чинників.

Тут поглиблено дослідження [2, 4] з урахуванням анізотропії матеріалу та вивчено стійкість обчислювальних схем, застосованих для розв'язування систем СІР. Через обмежений обсяг праці зупинимося лише на задачах поздовжнього зсуву для анізотропного півпростору, шару та клина за наявності у них внутрішньої тріщини, коли на межах тіла задані крайові умови першого типу (зусилля). Метод прямого вирізування дає можливість звести такі задачі до дослідження взаємодії різних систем тріщин у анізотропному просторі.

Альтернативою методу вирізування може слугувати складніший у реалізації, але ще універсальніший граничноелементний метод функцій стрибка, успішно застосований спочатку для розв'язування антиплоских і плоских задач анізотропної термоелектромагнітопружності для тіл з тонкими стрічковими включеннями [24], а потім – для тонких оболонкових включень у аналогічних 3D-структурах [19, 20].

1. **Формулювання задачі.** Дослідимо антиплоску деформацію анізотропного простору з модулями пружності a_{km} ($k, m = 4, 5$), що містить N довільно орієнтованих плоских тунельних тріщин (математичних розрізів) L_j ($j = 1, \mathbf{K}, N$) з локальними системами координат $s^j O^j n^j$ у їхніх центрах. Відомі координати центрів тріщин $Z_{0j} = x_{0j} + iy_{0j}$; кути поворотів щодо осі абсцис φ_j та їхні довжини $2a_j$ ($j = 1, \mathbf{K}, N$). Уважаємо, що тріщини не перетинаються і не дотикаються. Простір може бути навантажений на нескінченності однорідними напруженнями $\sigma_{yz}^0 = \tau_1$, $\sigma_{xz}^0 = \tau_2$, а на верхньому та нижньому берегах j -ої тріщини можуть діяти симетричні напруження τ^j (рис. 1). Напружено-деформований стан у площинах, перпендикулярних до напрямку зсуву, однаковий, тому обмежимося аналізом полів у площині xOy . Вісь Oz спрямуємо уздовж напрямку зсуву.

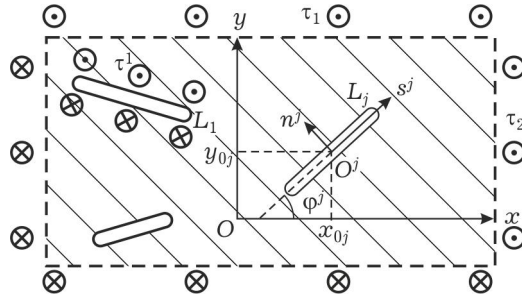


Рис. 1

2. **Побудова розв'язку.** Згідно з методом функцій стрибків [7], тонкі неоднорідності вилучаємо з розгляду, а їхній вплив на матрицю замінюємо невідомими функціями стрибків напружень f_5^j та похідних від переміщень f_6^j на серединній лінії $L_j \equiv [-a^j, a^j]$ ($n^j = 0$; $-a^j \leq s^j \leq a^j$) неоднорідності у її локальній системі координат $s^j O^j n^j$:

$$\sigma_{nz}^{j-} - \sigma_{nz}^{j+} = f_5^j(s^j); \quad \frac{\partial}{\partial s}(w^{j-} - w^{j+}) = f_6^j(s^j), \quad s^j \in L_j' \quad (j = 1, \mathbf{K}, N). \quad (1)$$

Причому $f_r^j = 0$ ($r = 5, 6$), якщо $s^j \notin L_j'$. Індекси (+) і (-) відповідають верхньому та нижньому берегам неоднорідності. Напружений стан анізотропного простору з тонкою неоднорідністю L_j у її локальній системі координат для невідомих функцій стрибків запишемо у вигляді [7, 10, 23]

$$\sigma_{nz}^{j,\text{in}} + i\sigma_{sz}^{j,\text{in}} = \frac{1}{4}(g_p^j t_5(z^j) - g_m^j t_5(\bar{z}^j)) + \frac{i}{4a_{55}^j \alpha^j}(g_p^j t_6(z^j) + g_m^j t_6(\bar{z}^j)). \quad (2)$$

Тут індекс «in» – скорочення від «inhomogeneity» (неоднорідність);

$$t_r(z^j) = \frac{1}{\pi} \int_{L_j'} \frac{f_r^j(t) dt}{t - z^j} \quad (r = 5, 6), \quad g_p^j = \beta^j + i(1 + \alpha^j), \quad g_m^j = \beta^j + i(1 - \alpha^j),$$

$$\alpha^j = \frac{\sqrt{a_{44}^j a_{55}^j - (a_{45}^j)^2}}{a_{55}^j}, \quad \beta^j = \frac{a_{45}^j}{a_{55}^j}; \quad z^j = s^j + (\beta^j + i\alpha^j) n^j.$$

Пружні сталі a_{km}^j для системи координат $s^j O^j n^j$ окреслюють формули [5, 7]

$$\begin{aligned}
a_{44}^j &= a_{44} \cos^2 \varphi_j - 2a_{45} \sin \varphi_j \cos \varphi_j + a_{55} \sin^2 \varphi_j, \\
a_{45}^j &= (a_{44} - a_{55}) \sin \varphi_j \cos \varphi_j + a_{45} (\cos^2 \varphi_j - \sin^2 \varphi_j), \\
a_{55}^j &= a_{44} \sin^2 \varphi_j + 2a_{45} \sin \varphi_j \cos \varphi_j + a_{55} \cos^2 \varphi_j.
\end{aligned}$$

Використавши принцип суперпозиції розв'язків, вираз (2) та формули перетворення для тензора напружень за зміни системи координат, напружений стан анізотропного простору зі системою N довільно орієнтованих неоднорідностей подамо у вигляді

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} &= \sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 + \sum_{j=1}^N (\sigma_{nz}^{j,in} + i\sigma_{sz}^{j,in}) e^{-i\varphi_j}, \\
s^j + in^j &= (x + iy - z_{0j}) e^{-i\varphi_j}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Тут $\sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 = \tau_1 + i\tau_2$ – однорідні напруження для простору без дефектів, проте зі заданим зовнішнім навантаженням.

Перейдемо до системи координат l -ої неоднорідності

$$\sigma_{nz}^l + i\sigma_{sz}^l = (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}) e^{i\varphi_l}, \quad x + iy = (s^l + in^l) e^{i\varphi_l} + z_{0l}$$

та знайдемо граничні напруження σ_{nz}^{\pm} на її берегах згідно з формулою Сохоцького–Племелі [7]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{nz}^{\pm} &= \mathbf{m} \frac{1}{2} f_5^l(s^l) - \frac{1}{2\pi\alpha^l a_{55}^l} \int_{L_j} \frac{f_6^l(t) dt}{t - s^l} + \\
&+ \operatorname{Re} \left[\left(\sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 + \sum_{j=1, j \neq l}^N (\sigma_{nz}^{j,in} + i\sigma_{sz}^{j,in}) e^{-i\varphi_j} \right) e^{i\varphi_l} \right], \\
s^j + in^j &= (s^l e^{i\varphi_l} + z_{0l} - z_{0j}) e^{-i\varphi_j}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут верхній знак відповідає верхньому берегу неоднорідності, а нижній – нижньому.

Скористаємося заданими напруженнями на берегах тріщин, які, враховуючи протилежний напрям нормалі матриці і поверхонь тріщин, запишемо у вигляді

$$\sigma_{nz}^{l+} + \sigma_{nz}^{l-} = -2\tau^l, \quad \sigma_{nz}^{l-} - \sigma_{nz}^{l+} = 0 \quad (l = 1, \mathbf{K}, N). \tag{5}$$

Підставивши (4) у (5), дістанемо систему $2N$ СІР для невідомих функцій стрибків. Додаткові умови рівноваги і однозначності переміщень за обходу навколо кожного з дефектів

$$\int_{-a_l}^{a_l} f_5^l(t) dt = 0, \quad \int_{-a_l}^{a_l} f_6^l(t) dt = 0 \quad (l = 1, \mathbf{K}, N)$$

дають змогу розв'язати результуючу систему СІР, зокрема, методом колокацій з використанням розвинення функцій стрибків у скінченні суми ряду з виділеною кореневою особливістю [7]:

$$f_r^l(t) = \sum_{m=0}^{M_l} \frac{A_m^l T_m(t/a_l)}{\sqrt{1 - (t/a_l)^2}}.$$

Тут A_m^l – шукані коефіцієнти; T_m – поліноми Чебишева першого роду; M_l – кількість врахованих членів розвинення в ряд. Зазначимо, що з виразу (1) та другого співвідношення рівняння (5) випливає, що функції стриб-

ків напружень f_5^j ($j = 1, \mathbf{K}, N$) дорівнюють нулю. За ними можна визначити напружений стан анізотропного простору з тріщинами, використовуючи формули (3), (2).

Важливими параметрами напруженого стану, за якими вдається оцінити тріщиностійкість, є КІН напружень [7, 23]. Для тріщин у анізотропному матеріалі КІН у вершинах A чи B обчислюємо за формулами [7, 23]

$$K_3^{A,B} = \pm \frac{1}{a_{55}^l \alpha^l} \rho_6^{\pm} \sqrt{\pi/2}, \quad \rho_6^{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm a_l} \left[\sqrt{|a_l \mathbf{m} t|} f_6^l(\pm a_l) \right],$$

де вершині B відповідає верхній знак, а вершині A – нижній.

Далі застосуємо метод прямого вирізування до розв'язування чотирьох характерних задач поздовжнього зсуву анізотропного півпростору, шару та клина з внутрішньою тріщиною. Обмежимося у них обчисленням нормованих навантажень і півдовжиною тріщини КІН $K_3^{0A,B} = K_3^{A,B} / \tau^l \sqrt{\pi a_l}$. Щоб отримати КІН з похибкою не вище 1%, достатньо враховувати $M = 80$ перших членів розвинення функцій стрибків у ряди за поліномами Чебишева для $a_l < 16$ і $M = 320$ – для $a_l \geq 16$ ($l = 1, \mathbf{K}, N$). Розглядаємо чотири види матеріалу у базовій системі координат: ізоотропія (I) – $a_{44}/a_{55} = 1$, $a_{45}/a_{55} = 0$; ортотропія (II) – $a_{44}/a_{55} = 2/3$, $a_{45}/a_{55} = 0$; (III) – $a_{44}/a_{55} = 3/2$, $a_{45}/a_{55} = 0$; анізотропія (ортотропія у повернутій системі координат) (IV) – $a_{44}/a_{55} = 2/3$, $a_{45}/a_{55} = 1/3$.

Приклад 1. Дослідимо анізотропний півпростір з вільною від навантаження межею за наявності у ньому симетрично навантаженої зсувними зусиллями τ^1 тріщини L_1 . Тут $(0, y_{01})$ – координати центра тріщини; $2a_1$ – її довжина; φ^1 – кут орієнтації тріщини відносно осі Ox (ліва частина рис. 2).

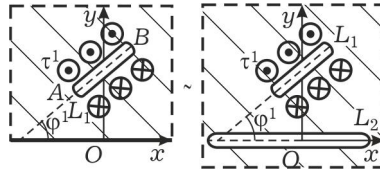


Рис. 2

Застосовуючи метод прямого вирізування, вихідну задачу зведемо до дослідження анізотропного простору з двома тріщинами L_1, L_2 , де вільна від навантаження тріщина L_2 ($x_{02} = 0$; $y_{02} = 0$; $\varphi^2 = 0$) моделює вільну від зусиль межу тіла (права частина рис. 2).

У табл. 1 подано результати обчислення нормованих КІН для тріщини, що паралельна межі змодельованого півпростору ($\varphi^1 = \varphi^2 = 0$), для різних відносних довжин $a = a_2/a_1$ та згаданих чотирьох видів матеріалу. Відносна відстань від центра тріщини до межі області одинична ($d = y_{01}/a_1 = 1$). Оскільки задача симетрична, то КІН для лівої і правої вершин тріщини однакові ($K_3^{0A} = K_3^{0B}$).

Зі збільшенням відносної довжини a КІН поступово прямує до остаточних значень, причому для ізоотропії результат збігається з відомим [4]. Похибка менше 0.1% отримана вже для значень $a = 8$ для всіх розглянутих випадків (з подальшим ростом параметра a виділені грубим шрифтом перші п'ять значущих цифр розв'язку не змінюються). Зазначимо, що для

іншого граничного випадку, коли тріщина перпендикулярна межі області ($d=2$, $\varphi^1 = \pi/2$), збіжність методу прямого вирізування повільніша: для одержання меншої, ніж 1%, похибки відносна довжина тріщини L_2 має становити не менше $a=16$, а для похибки близько 0.1% її довжини необхідно збільшити до $a=64$.

Таблиця 1

a	0.5	1	2	4	8	16
(I)	1.0126	1.0440	1.0829	1.0906	1.0912	1.0912
(II)	1.0178	1.0652	1.1158	1.1227	1.1230	1.1230
(III)	1.0083	1.0284	1.0571	1.0654	1.0662	1.0662
(IV)	1.0292	1.0867	1.1336	1.1395	1.1398	1.1398

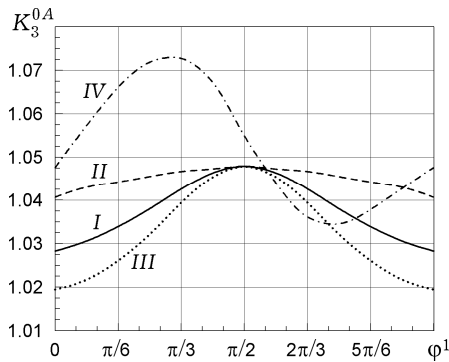


Рис. 3

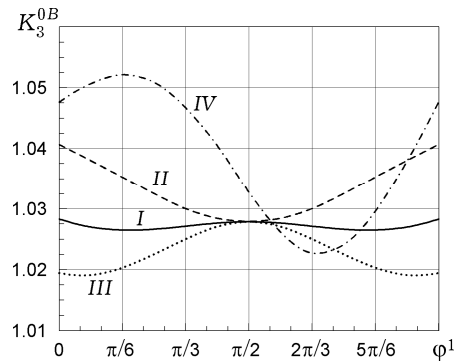


Рис. 4

На рис. 3 і 4 подано залежності нормованих КІН для лівого (А) і правого (В) вістер тріщини відповідно для $d=2$, $a=64$ від кута орієнтації φ^1 за різних видів матеріалу. Для ортотропного (II), (III) та ізотропного (I) матеріалів графіки нормованих КІН стосовно значення $\varphi^1 = \pi/2$ симетричні, що, враховуючи симетрію задачі, додатково підтверджує достовірність результатів. Причому для кута $\varphi^1 = \pi/2$ значення КІН для різних мір ортотропії щодо поверхні півпростору (II), (III) та ізотропного матеріалу (I) з точністю до похибки обчислень збігаються.

Крім того, різна міра ортотропії матеріалу (II), (III) впливає не лише на кількісну, але й на якісну поведінку графіків КІН. Зокрема, для міри ортотропії типу (III) для вершини тріщини В зі зростанням кута φ^1 від нуля до $\pi/2$ КІН збільшується, а для міри ортотропії типу (II) – спадає. Для вершини тріщини А зі зростанням кута φ^1 від нуля до $\pi/2$ КІН збільшуються для всіх мір типів ортотропії. Максимальні їх значення отримали для анізотропного матеріалу типу (IV). Для ізотропного матеріалу (I) вони збіглися з отриманими [4, 7] безпосереднім розв'язуванням задачі для півпростору, що також підтверджує їхню достовірність.

Приклад 2. Дослідимо поздовжній зсув шару з вільними від навантаження берегами за наявності симетрично навантаженої зусиллями τ^1 внутрішньої центральної тріщини L_1 (ліва частина рис. 5). Ширина шару $2H$. Центр тріщини L_1 розташований у точці $(0, H)$; довжина тріщини $2a_1$; φ^1 – кут орієнтації відносно осі Ox .

Застосовуючи метод прямого вирізування, вихідну задачу зводимо до дослідження анізотропного простору з трьома тріщинами L_1, L_2, L_3 , де тріщини L_2, L_3 ($x_{02} = x_{03} = 0$; $y_{02} = 0$; $y_{03} = 2H$; $\varphi^2 = \varphi^3 = 0$) моделюють вільні від навантаження межі шару (права частина рис. 5).

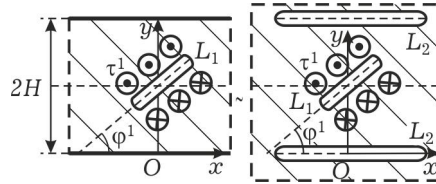


Рис. 5

У табл. 2 подано результати обчислення нормованих КІН $K_3^{0A,B} = K_3^{1A,B} / \tau^1 \sqrt{\pi a_1}$ для тріщини, що паралельна межі змодельованого шару ($\varphi^1 = 0$), для різних відносних довжин $a = a_2/a_1 = a_3/a_1$ та чотирьох видів матеріалу. Відносна відстань від центра тріщини до межі області одинична ($d = H/a_1 = 1$).

Таблиця 2

a	0.5	1	2	4	8	16
(I)	1.0251	1.0847	1.1446	1.1493	1.1493	1.1493
(II)	1.0353	1.1246	1.1982	1.2009	1.2009	1.2009
(III)	1.0165	1.0548	1.1016	1.1085	1.1085	1.1085
(IV)	1.0378	1.1261	1.2238	1.2280	1.2281	1.2277

Як і у прикладі 1, зі збільшенням відносної довжини a нормовані КІН поступово прямують до конкретних значень. Причому у цій задачі меншу від 0.1% похибку отримали вже для $a = 4$ для всіх досліджених матеріалів.

Якщо тріщина перпендикулярна до межі області ($d = 2$, $\varphi^1 = \pi/2$), для одержання меншої, ніж 1%, похибки потрібно, щоб відносна довжина L_2 була не менше $a = 64$.

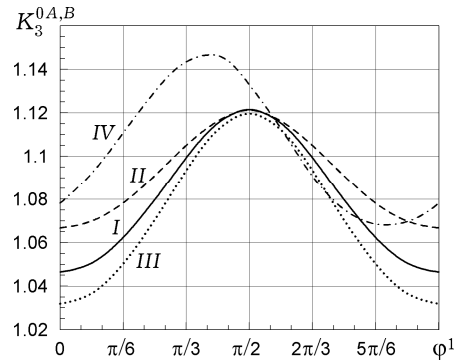


Рис. 6

На рис. 6 побудовано залежності нормованих КІН для $d = 2$, $a = 64$ від кута орієнтації φ^1 для різних матеріалів. Оскільки задача симетрична, КІН для лівої і правої вершин тріщини однакові: $K_3^{0A} = K_3^{0B}$.

Як і у задачі для півпростору, для ортотропного в базовій системі координат (II), (III) та ізотропного (I) матеріалів графіки нормованих КІН стосовно значення $\varphi^1 = \pi/2$ симетричні. Зі зростанням кута φ^1 від нуля до

$\pi/2$ значення КІН для матеріалів (I), (II), (III) зростають. Нахил головних осей ортотропії у матеріалі (IV) цю симетрію порушує. Для кута $\varphi^1 = \pi/2$, як і для *прикладу 1*, значення КІН для матеріалів (I), (II), (III) з точністю до похибки обчислень збігаються. Висновок про незалежність КІН від пружних сталей ортотропного відносно осі тріщини матеріалу для симетрично навантаженої центральної тріщини, що перпендикулярна межам шару, отримано також у праці [18].

Приклад 3. Розглянемо *приклад 2* за навантаження берегів шару зусиллями τ , коли внутрішня центральна тріщина L_1 вільна від навантаження, а зовнішні зусилля прикладено до зовнішньої поверхні шару (ліва частина рис. 7). Застосовуючи метод прямого вирізування, вихідну задачу зводимо до дослідження пружної рівноваги анізотропного простору з трьома тріщинами L_1, L_2, L_3 , де симетрично навантажені зусиллями $\tau^2 = \tau^3 = -\tau$ тріщини L_2, L_3 моделюють навантажені межі шару (права частина рис. 7).

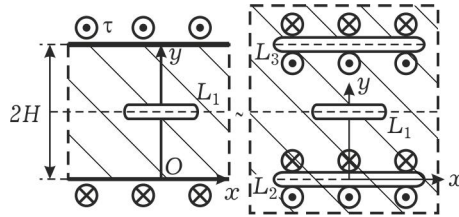


Рис. 7

У табл. 3 наведено результати обчислення нормованих КІН $K_3^{0A,B} = K_3^{1A,B} / \tau \sqrt{\pi a_1}$ для тріщини, що паралельна межі змодельованого шару ($\varphi^1 = 0$) для різних відносних довжин $a = a_2/a_1 = a_3/a_1$ та чотирьох типів матеріалу. Відносна відстань від центра тріщини до межі області одинична ($d = H/a_1 = 1$).

Таблиця 3

a	0.5	1	2	4	8	16
(I)	0.0910	0.3635	0.9146	1.1364	1.1492	1.1492
(II)	0.1022	0.4375	1.0407	1.1966	1.2010	1.2010
(III)	0.0775	0.2963	0.7870	1.0772	1.1083	1.1085
(IV)	0.1133	0.4446	1.0711	1.2251	1.2281	1.2287

Зі збільшенням відносної довжини a КІН поступово прямує до остаточних значень. Причому вже для $a = 8$ його значення з похибкою менше від 0.1% збігаються із обчисленими для $a = 16$. Зазначимо, що значення КІН для симетрично навантаженої тріщини у шарі з вільними від навантаження берегами (*приклад 2*) також збігаються (з точністю до похибки обчислень) з одержаними у цьому прикладі для всіх розглянутих матеріалів.

Приклад 4. Дослідимо поздовжній зсув анізотропного клина зі симетрично навантаженою зусиллями τ^1 тріщиною L_1 на його бісектрисі. Межі клина вільні від навантаження. Кут розхилу клина 2φ . Центр тріщини L_1 розташований у точці $(x_{01}, 0)$; її довжина $2a_1$ (ліва частина рис. 8). Застосовуючи метод прямого вирізування, вихідну задачу зводимо до дослідження

анізотропного простору з трьома тріщинами L_1, L_2, L_3 , де L_2 та L_3 моделюють вільну від навантаження межу тіла (права частина рис. 8).

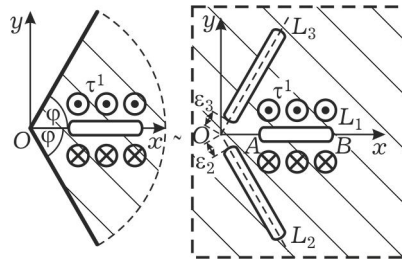


Рис. 8

Позначимо через $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ відстань від суміжних вершин тріщин L_2, L_3 до точки перетину їхніх осевих ліній. Нехай $\varepsilon = \varepsilon_2/a_1 = \varepsilon_3/a_1$ – відносна відстань до віртуальної вершини клина; $a = a_2/a_1 = a_3/a_1$ – відносна довжина моделювальних тріщин.

Дослідимо вплив a на збіжність методу прямого вирізування для кута $\varphi = \pi/6$. Нехай $\varepsilon = 0.001$, а відносна відстань від центра тріщини L_1 до вершини клина $d = x_{01}/a_1 = 2$.

У табл. 4 подано результати обчислення нормованих КІН для лівого (А) і правого (В) вістрів тріщини ($K_3^{0A,B} = K_3^{1A,B}/\tau^1\sqrt{\pi a_1}$) для різних відносних довжин a та чотирьох видів матеріалу.

Таблиця 4

K_3^{0A}						
a	0.5	1	2	4	8	16
(I)	1.0055	1.1042	1.2148	1.2215	1.2216	1.2216
(II)	1.0097	1.1193	1.2708	1.2775	1.2776	1.2776
(III)	1.0044	1.0922	1.1712	1.1775	1.1777	1.1777
(IV)	1.0119	1.1475	1.3015	1.3101	1.3101	1.3101
K_3^{0B}						
(I)	1.0036	1.0195	1.1238	1.1374	1.1376	1.1376
(II)	1.0055	1.0179	1.1595	1.1753	1.1754	1.1754
(III)	1.0020	1.0217	1.0972	1.1083	1.1087	1.1087
(IV)	1.0075	1.0259	1.1800	1.1983	1.1985	1.1985

Як бачимо, зі збільшенням відносної довжини a нормовані КІН прямують до остаточних значень. Вже для $a=8$ вони збігаються з похибкою, меншою, ніж 0.1%, із результатами обчислення нормованих КІН для $a=16$, що дає підстави вважати цей результат значеннями нормованих КІН навантаженої тріщини у клині.

Дослідимо вплив відносної відстані до віртуальної вершини клина ε на збіжність методу прямого вирізування. Нехай $a=16$, а відносна відстань від центра тріщини L_1 до вершини клина $d=1.1$, оскільки зі збільшенням відстані між вістрями тріщини L_1 та вершиною O клина концентрація напружень, очевидно, зменшуватиметься.

У табл. 5 наведено результати обчислення нормованих КІН K_3^{0A} та K_3^{0B} для різних значень параметра ε та чотирьох видів матеріалу. Висока точність спостерігається вже для $\varepsilon = 0.01$. Отримані у табл. 4 і 5 результати для ізотропного матеріалу збіглися (з точністю до похибки обчислень) з

отриманими раніше [2], що додатково підтверджує достовірність здійснених обчислень.

Таблиця 5

ε	K_3^{0A}				K_3^{0B}			
	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.1	0.01	0.001	0.0001
(λ)	1.9658	2.2013	2.2015	2.2015	1.3966	1.4037	1.4037	1.4037
(λ)	2.1544	2.3619	2.3617	2.3627	1.4741	1.4795	1.4793	1.4798
(λ)	1.8020	2.0652	2.0657	2.0653	1.3323	1.3421	1.3426	1.3425
(λ)	2.1731	2.4425	2.4474	2.4469	1.5141	1.5208	1.5211	1.5209

Висновки. У раніше розробленому методі прямого вирізування враховано анізотропію матеріалу у задачах поздовжнього зсуву однорідних тіл з тріщинами. На декількох ілюстративних прикладах дослідження пружної рівноваги анізотропних півпростору, шару та клина з тріщиною підтверджена його ефективність та достовірність. У задачах антиплоскої деформації півпростору та шару з дефектом для окремих геометричних параметрів та навантаження тріщини виявлено, що КІН не залежать від пружних сталих ортотропного відносно осі тріщини матеріалу. Отримані результати обчислення нормованих КІН збіглися з відомими з літератури з похибкою, не вище, ніж 1%. З'ясовано, що міра анізотропії та орієнтація головних осей анізотропії у багатьох випадках суттєво впливають на КІН.

1. Васильєв К. В., Пастернак Я. М., Сулим Г. Т. Антиплоска деформація квадратного в плані тіла з внутрішньою тонкою неоднорідністю // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 165–176.
2. Васильєв К. В., Сулим Г. Т. Застосування методу прямого вирізування до розв'язування задачі поздовжнього зсуву клина з тонкими неоднорідностями довільної орієнтації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 3. – С. 117–126.
Te same: Vasil'ev K. V., Sulym H. T. Application of the method of direct cutting-out to the solution of the problem of longitudinal shear of a wedge with thin heterogeneities of arbitrary orientation // J. Math. Sci. – 2012. – 180, No. 2. – P. 122–134.
3. Васильєв К. В., Сулим Г. Т. Метод прямого вирізування у задачах кусково-однорідних тіл з міжфазними тріщинами за поздовжнього зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 4. – С. 44–57.
Te same: Vasil'ev K. V., Sulym H. T. Method of direct cutting-out in the problems of piecewise homogeneous bodies with interface cracks under longitudinal shear // J. Math. Sci. – 2019. – 238, No. 1. – P. 46–62.
4. Васильєв К., Сулим Г. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування // Машинознавство. – 2006. – № 11–12. – С. 10–17.
5. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
6. Пастернак Я. М., Васильєв К. В., Сулим Г. Т. Антиплоска деформація зосередженими чинниками обмежених тіл із тріщинами та жорсткими включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 1. – С. 72–83.
Te same: Pasternak Ia. M., Vasil'ev K. V., Sulym H. T. Antiplane deformation by concentrated factors of bounded bodies with cracks and rigid inclusions // J. Math. Sci. – 2013. – 190, No. 5. – P. 710–724.
7. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид центр НТШ, 2007. – 716 с.
8. Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Використання J -інтеграла для дослідження поздовжнього зсуву анізотропних тіл із тонкостінними стрічковими включеннями // Вісник Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 88–92.

9. Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Застосування методу граничних елементів до аналізу антиплоскої деформації анізотропних тіл із тонкостінними структурами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – 51, № 4. – С. 136–144.
Te same: *Sulym H. T., Pasternak Ia. M.* Application of the boundary element method for analysis of the antiplane shear of anisotropic bodies containing thin-walled structures // *J. Math. Sci.* – 2010. – 167, No. 2. – P. 162–172.
10. Сулим Г. Т., Шевчук С. П. Поздовжній зсув шаруватих анізотропних середовищ зі стрічковими неоднорідностями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – 41, № 3. – С. 90–97.
Te same: *Sulym H. T., Shevchuk S. P.* Longitudinal shear of layered anisotropic media with band-type inhomogeneities // *J. Math. Sci.* – 2001. – 104, No. 5. – P. 1506–1514.
11. Шевчук С. П. Вплив пружного стрічкового включення на деформацію поверхні анізотропного півпростору за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2006. – 49, № 3. – С. 125–130.
12. *Bozhydarnyk V., Pasternak Ia., Sulym H., Oliyarnyk N.* BEM approach for the antiplane shear of anisotropic solids containing thin inhomogeneities // *Acta mech. et automatica.* – 2011. – 5, No. 4. – P. 11–16.
13. *Faal R. T., Fariborz S. J., Daghyani H. R.* Antiplane deformation of orthotropic strips with multiple defects // *J. Mech. Mater. Struct.* – 2006. – 1, No. 7. – P. 1097–1114.
14. *Georgiadis H. G.* Complex-variable and integral-transform methods for elastodynamic solutions of cracked orthotropic strip // *Eng. Fract. Mech.* – 1986. – 24, No. 5. – P. 727–735.
15. *Ghadiri M., Shahani A. R.* Mode III fracture analysis of an anisotropic finite wedge with an interfacial crack // *Math. Mech. Solids.* – 2012. – 18, No. 8. – P. 823–836.
16. *Lee W. K., Earmme Y. Y.* An interfacial edge crack in anisotropic biomaterial under anti-plane singularity // *Int. J. Fract.* – 2000. – 104, No. 1. – P. 15–22.
17. *Li X.-F., Duan X.-Y.* An interfacially-cracked orthotropic rectangular bi-material subjected to antiplane shear loading // *Appl. Math. and Comput.* – 2006. – 174, No. 2. – P. 1060–1079.
18. *Li X.-F., Lee K. Y.* Closed-form solution for an orthotropic elastic strip with a crack perpendicular to the edges under arbitrary anti-plane shear // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* – 2009. – 89, No. 5. – P. 370–382.
19. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* A comprehensive study on Green's functions and boundary integral equations for 3D anisotropic thermomagnetoelasticity // *Eng. Analysis with Boundary Elements.* – 2016. – 64. – P. 222–229.
20. *Pasternak Y., Sulym H.* Boundary element analysis of anisotropic thermomagneto-electroelastic solids with 3D shell-like inclusions // *Acta mech. et automatica.* – 2017. – 11, No. 4. – P. 308–312.
21. *Shahani A. R.* Mode III stress intensity factors for edge-cracked circular shafts, bonded wedges, bonded half planes and DCB's // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – 40, No. 24. – P. 6567–6576.
22. *Shahani A. R., Ghadiri M.* Analysis of anisotropic sector with a radial crack under anti-plane shear loading // *Int. J. Solids Struct.* – 2010. – 47, No. 7–8. – P. 1030–1039.
23. *Sulym G., Shevchuk S.* Antiplane problem for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations // *J. Theor. and Appl. Mech.* – 1999. – 37, No. 1. – P. 47–63.
24. *Sulym H., Pasternak Ia., Pasternak R.* Boundary element analysis of multifield materials: recent studies with application to crack and thin inclusion problems // *Scientific Thesis No 274. Library of Mechanics.* Białystok: Printing House of Białystok University of Technology – 2015. – 172 p.
25. *Wu X.-Fa., Dzenis Y. A., Zou W.-S.* Interfacial edge crack between two bonded dissimilar orthotropic strips under antiplane point loading // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* – 2003. – 83, No. 6. – P. 419–422.

МЕТОД ПРЯМОГО ВЫРЕЗАНИЯ В ЗАДАЧАХ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ

В разработанном ранее методе прямого вырезания учтена анизотропия материала. В основе метода – моделирование конечного или ограниченного тела с

тонкими дефектами структуры произвольного типа и заданными на его границе краевыми условиями бесконечным пространством с теми же, как и в исходной задаче, неоднородностями и дополнительными тонкими неоднородностями (трещинами или абсолютно жесткими включениями), которые формируют границу тела. С помощью нагруженных трещин смоделированы краевые условия первого рода, а с помощью абсолютно жестких включений, внедренных в матрицу с определенным натяжением, – краевые условия второго рода. Разработанный подход апробирован на задачах продольного сдвига анизотропных полупространства, слоя и клина при наличии внутренней трещины и заданных краевых условий первого рода.

Ключевые слова: анизотропия, ортотропный материал, трещина, полупространство, слой, клин, коэффициент интенсивности напряжений, метод прямого вырезания, продольный сдвиг

THE DIRECT CUTTING-OUT METHOD IN THE PROBLEMS OF ELASTIC EQUILIBRIUM OF ANISOTROPIC BODIES WITH CRACKS UNDER LONGITUDINAL SHEAR

In the previously developed direct cutting-out method the anisotropy of the material is taken into account. The basis of the method is in modeling of a finite or bounded body with thin structural defects of an arbitrary type and given boundary conditions by an infinite space with the same, as in basic problem, inhomogeneities and additional thin inhomogeneities (cracks or absolutely rigid inclusions) which form the boundary of investigated body. With the help of loaded cracks, the boundary conditions of the first kind are modeled, and with the help of absolutely rigid inclusions embedded into a matrix with a certain tension – the boundary conditions of the second kind. The developed approach was carried out on several problems of longitudinal shear of anisotropic half-space, layer and wedge in the presence of an internal crack and the specified boundary conditions of the first kind.

Key words: anisotropy, orthotropic material, crack, half-space, layer, wedge, stress intensity factor, direct cutting-out method, mode iii

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
11.06.18