

**РОЗШАРУВАННЯ ТРИШАРОВОЇ ОСНОВИ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*Досліджено нелінійну поведінку багатошарової системи, на яку діє нормально розподілене поверхнєве навантаження. Для цього застосовано числово-аналітичне моделювання нелінійних процесів деформування тришарової системи. Нелінійну крайову задачу з додатковими умовами у вигляді нерівностей подано у варіаційному формулюванні. Для розв'язання задачі використано метод скінченних елементів у поєднанні з методом Ньютона–Рафсона та методом продовження за параметром навантаження. Числово проаналізовано напружено-деформований стан для різних варіантів товщини верхнього шару та розміру зони навантаження.*

**Ключові слова:** плоска задача теорії пружності, односторонній контакт, варіаційне формулювання задачі, метод скінченних елементів, напруження, переміщення, тертя, питома вага.

**Вступ.** Задачі контактної механіки деформівного твердого тіла викликають підвищений інтерес у дослідників у зв'язку з їх практичним застосуванням у галузі машинобудування, авіа- і космічної техніки, трибології, геофізики, будівельної індустрії, біомеханіки тощо. Огляд досліджень контактних задач для пружних середовищ наведено в монографії [1]. Односторонній контакт двох півпросторів та контакт шару і основи за виникнення міжповерхневих відшарувань під дією зовнішнього навантаження та внутрішніх сил вивчено в статті [4]. У праці [8] розглянуто два типи моделей контактної зони – білінійну і експоненціальну, які описують пошкодження зв'язків між шарами, що призводить до розшарування (відриву). Тут увагу зосереджували на впливі параметрів моделі на виникнення відриву.

У статті [6] автори пропонують математичну модель контактної взаємодії періодично текстурованих тіл з урахуванням фрикційного проковзування. Тіла взаємодіють у два етапи. Спершу вони притискаються одне до одного монотонно зростаючими нормальними зусиллями. Потім до тіл прикладено номінальні дотичні напруження, що призводить до фрикційного проковзування їх поверхонь в околі щілин. Задачу про контакт зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь для функцій висот міжконтактних зазорів і відносного зсуву поверхонь у зонах проковзування.

У дослідженні [9] концепцію механіки руйнування використано для розв'язання задачі про нормальний контакт без тертя під взаємними нормальним та тангенціальним навантаженнями. Виявлено, що, оцінюючи коефіцієнт інтенсивності напружень, можна отримати розмір та місцерозташування області контакту.

Для числового аналізу застосовують різноманітні методи та алгоритми. В статті [3] під час дослідження конструктивно нелінійної задачі з односторонніми зв'язками і тертям за невідомою зоною контакту вжито ітеративний підхід з використанням спеціальних контактних елементів в тонкому фрикційній шарі у поєднанні зі скінченно-елементною моделлю. Метод Удзави на основі модифікованого функціоналу Лагранжа для розв'язання контактної задачі теорії пружності з тертям (квазіваріаційної нерівності Сіньоріні) досліджено у праці [2]. Розглянуту область апроксимовано методом скінченних елементів (МСЕ). Досліджено метод послідовних наближень для числового розв'язання задачі.

Розглянуто [7] один з варіантів МСЕ за мішаною схемою, що базується на функціоналі Рейснера. Найчастіше такі задачі розв'язують за допомогою

---

\* [natalyguk29@gmail.com](mailto:natalyguk29@gmail.com)

скінченно-елементної апроксимації методом переміщень. З допомогою мішаної схеми МСЕ можна подолати труднощі, пов'язані з точністю апроксимації компонент тензора напружень. На основі методу декомпозиції області вивчено [5] контактну взаємодію за штрафними функціями. Розроблено [10] метод плаваючих вузлів для аналізу пошкоджень шаруватих композитів зі суттєвими деформаціями.

Методи дослідження задач, формулювання яких пов'язано із варіаційними нерівностями, базуються зазвичай на припущенні про сильну опуклість мінімізувальних функціоналів. Для розв'язання таких нерівностей найчастіше використовують методи двоїстості, які ґрунтуються на класичних функціоналах Лагранжа з лінійною залежністю від двоїстих змінних. Проте за наявності односторонніх зв'язків функціонал, що мінімізують, стає напівкоерцитивним, тому мінімізування за допомогою відомих методів пошуку сідлових точок не гарантує збіжності.

Нижче розглянуто нелінійну поведінку тришарової конструкції за локального одностороннього контакту і тертя для різних варіантів співвідношень товщини верхнього шару та розміру зони навантаження. Для розв'язання задачі запропоновано модифікацію функціоналу Лагранжа, до якого за допомогою характеристичних функцій приєднано додаткові умови, що вказують на наявність або відсутність зон відриву та тертя шарів.

**1. Формулювання задачі про деформування тришарової системи.** Розглянемо систему (рис. 1), що займає плоску область:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^3 \Omega^{(k)}, \quad \Omega^{(1)} = \{(x_1, x_2), x_1 \in (-\infty, +\infty), x_2 \in [0, h^{(1)}]\},$$

$$\Omega^{(2)} = \{(x_1, x_2), x_1 \in (-\infty, +\infty), x_2 \in [-h^{(2)}, 0]\},$$

$$\Omega^{(3)} = \{(x_1, x_2), x_1 \in (-\infty, +\infty), x_2 \in [-(h^{(3)} + h^{(2)}), -h^{(2)}]\}.$$

На пружний верхній шар з питомою вагою  $\rho_1$  діє розподілене поверхневе нормальне навантаження ( $q = \text{const}$ ), що монотонне за часом:

$$q(x_1) = \begin{cases} -q, & \text{якщо } -a \leq x_1 \leq a, \\ 0, & \text{якщо } x_1 < -a, x_1 > a. \end{cases}$$

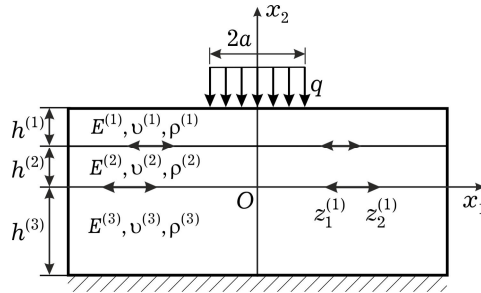


Рис. 1. Схема навантаження системи

Деформований стан тришарової системи описуємо нелінійними співвідношеннями, що зв'язують деформації і переміщення за припущення малості деформацій та кутів повороту порівняно з одиницею:

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = e_{11}^{(k)} + \frac{1}{2}(\theta^{(k)})^2, \quad \varepsilon_{22}^{(k)} = e_{22}^{(k)} + \frac{1}{2}(\theta^{(k)})^2, \quad \varepsilon_{12}^{(k)} = e_{12}^{(k)},$$

$$\text{де } 2\theta^{(k)} = \left( \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_2} \right), \quad e_{11}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1}, \quad e_{22}^{(k)} = \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2}, \quad e_{12}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_1};$$

$u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, k = \overline{1,3}$ , — проєкції переміщення точки тіла  $k$ -го шару на орти цієї

системи;  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ,  $i, j = 1, 2$  – компоненти вектора деформацій у системі  $X_1, X_2$ .

За фізичні для  $k$ -го шару обрали співвідношення закону Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(k)} &= \frac{E^{(k)}}{1+\nu^{(k)}} \left( \varepsilon_{11}^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1-2\nu^{(k)}} \vartheta^{(k)} \right), \\ \sigma_{22}^{(k)} &= \frac{E^{(k)}}{1+\nu^{(k)}} \left( \varepsilon_{22}^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1-2\nu^{(k)}} \vartheta^{(k)} \right), \\ \sigma_{12}^{(k)} &= \frac{E^{(k)}}{2(1+\nu^{(k)})} \varepsilon_{12}^{(k)}, \\ \vartheta^{(k)} &= \varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)}, k = \overline{1, 3},\end{aligned}\tag{1}$$

де  $\sigma_{ij}^{(k)}$  – компоненти тензора напружень для деформованої конфігурації;  $E^{(k)}$ ,  $\nu^{(k)}$ ,  $\rho^{(k)}$  – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та питома вага  $k$ -го шару.

Рівняння рівноваги деформованої системи мають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X_2} ((\sigma_{22}^{(k)}(\varepsilon^{(k)}) - \sigma_{21}^{(k)}(\varepsilon^{(k)})\theta^{(k)})) + \\ + \frac{\partial}{\partial X_1} ((\sigma_{12}^{(k)}(\varepsilon^{(k)}) - \sigma_{11}^{(k)}(\varepsilon^{(k)})\theta^{(k)})) + F_1^{*(k)} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial X_2} ((\sigma_{21}^{(k)}(\varepsilon^{(k)}) + \sigma_{22}^{(k)}(\varepsilon^{(k)})\theta^{(k)})) + \\ + \frac{\partial}{\partial X_1} ((\sigma_{11}^{(k)}(\varepsilon^{(k)}) + \sigma_{12}^{(k)}(\varepsilon^{(k)})\theta^{(k)})) + F_2^{*(k)} = 0,\end{aligned}$$

де  $F_1^{*(k)}$ ,  $F_2^{*(k)}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , – проєкції питомої об'ємної сили  $k$ -го шару на відповідні координатні осі.

На лініях контакту шарів  $\Gamma^{(r)}$ ,  $r = \overline{1, 2}$ , де можуть виникати односторонні зв'язки, передбачаємо існування ділянок  $\Gamma_C^{(r)}$ ,  $\Gamma_H^{(r)}$ ,  $\Gamma_O^{(r)}$ , що відповідають зонам зчеплення, проковзування і відставання:

$$\Gamma_C^{(r)} \cup \Gamma_H^{(r)} \cup \Gamma_O^{(r)} = \Gamma^{(r)}, \Gamma_C^{(r)} \cap \Gamma_H^{(r)} \cap \Gamma_O^{(r)} = \emptyset.$$

У зоні зчеплення виконуються умови

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22}^{(3)}, \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12}^{(3)}, \sigma_{22}^{(k)} \leq 0, |\sigma_{12}^{(k)}| < K^{(r)} |\sigma_{11}^{(k)}|, \\ u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, u_1^{(2)} = u_1^{(3)}, u_2^{(2)} = u_2^{(3)}, k = \overline{1, 3}, \forall X_1 \in \Gamma_C^{(r)},\end{aligned}\tag{2}$$

де  $K^{(r)}$  – коефіцієнт тертя на лінії контакту  $r$  ( $r = \overline{1, 2}$ ), у зоні проковзування – умови (3)

$$\begin{aligned}|\sigma_{12}^{(k)}| = K^{(r)} |\sigma_{22}^{(k)}|, \sigma_{12}^{(k)} / |\sigma_{12}^{(k)}| = -\Delta u_1 / |\Delta u_1|, \\ \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22}^{(3)}, k = \overline{1, 3}, r = 1, 2, \forall X_1 \in \Gamma_H^{(r)}.\end{aligned}\tag{3}$$

у зоні відставання – умови (4)

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0, \sigma_{12}^{(k)} = 0, k = \overline{1, 3}, \forall X_1 \in \Gamma_O^{(r)},\tag{4}$$

при цьому  $u_2^{(k)} = \mathcal{U}_2^{*(k)}$ ,  $\mathcal{U}_2^{*(1)} \geq \mathcal{U}_2^{*(2)}$ ,  $\mathcal{U}_2^{*(2)} \geq \mathcal{U}_2^{*(3)}$ , де  $\mathcal{U}^{*(k)} = \{\mathcal{U}_1^{*(k)}, \mathcal{U}_2^{*(k)}\}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , – вектор невідомих переміщень на лініях контакту шарів.

Система (1) разом зі статичними геометричними крайовими умовами та додатковими у вигляді нерівностей (2)–(4), що описують умови на лінії контакту шарів, дає можливість сформулювати крайову задачу.

**2. Метод розв'язання задачі.** Для визначення невідомих областей  $\Gamma_C^{(r)}$ ,  $\Gamma_\Pi^{(r)}$ ,  $\Gamma_O^{(r)}$  вводимо характеристичні функції  $\gamma_m^{(r)}$ ,  $m, r = 1, 2$ :

$$\gamma_1^{(r)}(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\sigma_{12}^{(k)}| = K^{(r)} |\sigma_{22}^{(k)}|, \quad x_1 \in \Gamma_\Pi^{(r)}, \\ 0 & \text{при } |\sigma_{12}^{(k)}| < K^{(r)} |\sigma_{22}^{(k)}|, \quad x_1 \in \Gamma_C^{(r)}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\gamma_2^{(r)}(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } \sigma_{22}^{(k)} \geq 0, \quad x_1 \in \Gamma_O^{(r)}, \\ 0 & \text{при } \sigma_{22}^{(k)} < 0, \quad x_1 \notin \Gamma_O^{(r)}. \end{cases}$$

Крайовій задачі з додатковими умовами у вигляді нерівностей відповідає варіаційне формулювання: необхідно знайти такий вектор  $W = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \mathcal{U}_1^{*(k)}, \gamma_m^{(r)}\}$ ,  $i, j, r, m = 1, 2, k = \overline{1, 3}$ , що

$$W = \arg \min_{W \in \bar{W}} J_\Pi(W), \quad (6)$$

де функціонал повної енергії системи

$$\begin{aligned} J_\Pi(W) = & \sum_{k=1}^3 \left\{ \iint_{\Omega^{(k)}} \left( \frac{1}{2} C_k^{ijlm} \varepsilon_{ij}^{(k)}(u) \varepsilon_{lm}^{(k)}(u) + \rho^{(k)} g u_2^{(k)} \right) dx_1 dx_2 - \right. \\ & - \int_{\Gamma^{(1)}} \mathcal{A}(x_1) u_2^{(1)} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{конт}}^{(r)}} (\gamma_1^{(r)} K^{(r)} \mathfrak{G}_{22}(u_1^{(1)} - u_1^{(2)}) + (1 - \gamma_1^{(r)}) \mathfrak{G}_{12}(u_1^{(1)} - u_1^{(2)})) d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_{\text{конт}}^{(r)}} (\gamma_2^{(r)} \mathfrak{G}_{22}(u_2^{(k)} - \mathcal{U}_2^{*(k)}) + (1 - \gamma_2^{(r)}) \mathfrak{G}_{22}(u_2^{(1)} - u_2^{(2)})) d\Gamma - \\ & \left. - \int_{\Gamma_O^{(r)}} \mathfrak{A}_2^{(k)}(u_1^{(k)} - \mathcal{U}_1^{*(k)}) d\Gamma \right\}; \end{aligned} \quad (7)$$

$C_k^{ijlm} > 0$  – коефіцієнти жорсткості,  $i, j, l, m, = 1, 2, k = \overline{1, 3}$ ;  $\mathfrak{G}_{ij}$  – напруження на лініях контакту;  $\bar{U}, \bar{E}, \bar{\mathcal{U}}^*$  – множини, що є областями визначення невідомих задачі;  $\bar{W} = \bar{U} \times \bar{E} \times \bar{\mathcal{U}}^*$ .

Для побудови розв'язку задачі (6) дискретизували область, що займає система, використовуючи скінченно-елементну апроксимацію. Для цього на областях  $\Omega^{(k)}$  ввели сітку з вузлами в точках з координатами  $X_s = \{x_{1s}, x_{2s}\}$ ,  $s = \overline{1, N}$ . Тепер невідомі функції  $u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \mathcal{U}_1^{*(k)}, \gamma_m^{(r)}$ ,  $i, j, m, r = 1, 2, k = \overline{1, 3}$ , подамо у вигляді векторів, компонентами яких є значення функцій задачі у вузлах сітки:

$$U = \{U_i\}^T, \quad U_i = \{U_{ik}\}^T, \quad U_{ik} = \{U_{iks}\}^T, \quad \mathcal{U}^* = \{\mathcal{U}_i^*\}^T, \quad \mathcal{U}_i^* = \{\mathcal{U}_{ik}^*\}^T, \quad \mathcal{U}_{ik}^* = \{\mathcal{U}_{iks}^*\}^T, \\ \varepsilon_{ij} = \{E_{ijs}\}^T, \quad \sigma = \{\sigma_{ijs}\}^T, \quad \gamma_{ms} = 0 \vee 1, \quad i, j = 1, 2, \quad s = \overline{1, N}, \quad k = 1, 2, \quad m = 1, 2.$$

Вузли, розташовані на лініях контакту шарів  $\Gamma^{(r)}$ , нумеруємо так:  $P^C = \{P_1^C, P_2^C, \dots, P_h^C\}$ ,  $P^\Pi = \{P_1^\Pi, P_2^\Pi, \dots, P_b^\Pi\}$ ,  $P^O = \{P_1^O, P_2^O, \dots, P_b^O\}$ . Ці вектори, які відповідають зонам зчеплення, проковзування і відставання, визначені шляхом обчислення значень  $\gamma_m^{(r)}$ ,  $m, r = 1, 2$ , згідно з умовами (5).

Після підставлення скінченно-елементної апроксимації в функціонал (7), інтегрування та варіювання отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь:

$$M(U) = R, \quad (8)$$

яка еквівалентна умові  $\frac{\partial \mathcal{J}_\Pi^*}{\partial U_{iks}} = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ,  $s = \overline{1, N}$ ;

$\mathcal{J}_\Pi^*$  – значення функціоналу (7) після підставлення скінченно-елементної апроксимації та інтегрування;  $M(U)$  – матриця жорсткості, яка містить нелінійні складові;  $R$  – вектор, який залежить від  $\mathcal{U}^*$ .

Для розв'язання системи нелінійних рівнянь (8) застосуємо ітераційний метод продовження за параметром навантаження  $t^{(n)} = t^{(n-1)} + \Delta t$ . Складові проекції поверхневої та об'ємних сил зобразимо так:  $q^{(n)} = t^{(n)} q_0$ ,  $F_i^{(n)} = t^{(n)} \bar{F}_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Тоді система (8) на  $n$ -му кроці руху за параметром навантаження матиме вигляд

$$A(U^{(n-1)}) \Delta U^{(n)} = \Delta R^{(n)}(U^{(n-1)}, U^{*(n-1)}),$$

де  $U^{(n)} = U^{(n-1)} + \Delta U^{(n)}$ ,  $A(U^{(n-1)}) = \left\{ \frac{\partial M}{\partial U} \right\}_{U^{(n-1)}}$ ;  $\Delta R^{(n)}$  – приріст правої частини системи зі зміною номера кроку  $n$ .

Для виконання умови мінімуму  $\mathcal{J}_\Pi^*$  по  $\mathcal{U}_{iks}^*$ ,  $i = 1, 2, k = \overline{1, 3}, s = \overline{1, N}$ , на кожному  $n$ -му кроці ітерації використовуємо метод Ньютона–Рафсона:

$$\mathcal{U}^{*(n)} = \mathcal{U}^{*(n-1)} - (C^{(n-1)})^{-1} \mathcal{G}^{(n-1)} \Big|_{\Gamma_0^{(r)}}.$$

Тут

$$\mathcal{G}^{(n-1)} \Big|_{\Gamma_0^{(r)}} = \left\{ \mathcal{G}_s^{(n-1)} \right\}^T \Big|_{\Gamma_0^{(r)}}, \quad \mathcal{G}_s^{(n-1)} = \left\{ \mathcal{G}_{11s}^{(n-1)}, \mathcal{G}_{12s}^{(n-1)} \right\}^T \Big|_{\Gamma_0^{(r)}}, \quad X_s \in \Gamma_0^{(r)};$$

$$C^{(n-1)} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}_s(U^{(n-1)}, \mathcal{U}^*)}{\partial \mathcal{U}_\zeta^*} \right\} \Big|_{\Gamma_0}, \quad s, \zeta = \overline{1, N}.$$

**3. Числовий аналіз задачі.** Числово моделювали напружено-деформований стан тришарової конструкції, використовуючи модулі програмного комплексу, який реалізує МСЕ. Для моделювання обрали конструкцію аеродромного покриття, що містить шар посилення із дрібнозернистого асфальтобетону, покриття із крупнозернистого асфальтобетону та шар щелевеної штучної основи. В розрахунках врахували власну вагу шарів.

За допомогою розробленого алгоритму розв'язання задачі проаналізували поведінку тришарової системи (див. рис. 1). Варіюваними параметрами, які впливають на напружено-деформований стан конструкції, обрали товщину асфальтобетонного шару та розмір зони навантаження. Параметр  $\alpha = h^{(1)} / h^{(3)}$  варіювали від 0.2 до 0.4, параметр  $\beta = a / h^{(3)}$  (де  $a$  – зона дії рівномірно розподіленого поверхневого навантаження) – від 0 до 0.4. Для розрахунку обрали: константи матеріалу верхнього пружного шару – питому вагу  $\rho_1 = 2500 \text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E_1 = 1.5 \cdot 10^3 \text{ МПа}$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu_1 = 0.3$ ; константи матеріалу середнього пружного шару –  $\rho_2 = 2400 \text{ кг/м}^3$ ,  $E_2 = 9 \cdot 10^2 \text{ МПа}$ ,  $\nu_2 = 0.28$ ; пружної основи –  $\rho_3 = 1800 \text{ кг/м}^3$ ,  $E_3 = 3.5 \cdot 10^2 \text{ МПа}$ ,  $\nu_3 = 0.25$ ;  $q_{\max} = 1.65 \text{ кН/м}$ ,  $K^{(r)}$  – коефіцієнт тертя на лініях контакту  $r$ ,  $r = 1, 2$ ;  $h^{(2)} = 0.14 \text{ м}$ ,  $h^{(3)} = 0.5 \text{ м}$ .

На рис. 2–6 подано результати розрахунків відносних переміщень  $\Delta u_1^{(r)}(x_1) = (u_1^{(r)}(x_1) - u_1^{(r+1)}(x_1)) / h^{(3)}$ ,  $\Delta u_2^{(r)}(x_1) = (u_2^{(r)}(x_1) - u_2^{(r+1)}(x_1)) / h^{(3)}$ ,  $r = 1, 2$ , на лініях розмежування шарів та відносних напружень  $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \cdot h^{(3)} / q_{\max}$ ,  $i, j = 1, 2$ , на нижній межі першого та другого шарів залежно від параметра  $\alpha$  при  $\beta = 0.2$  без врахування тертя.

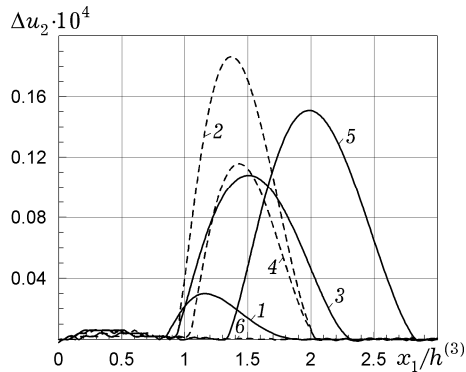


Рис. 2. Відносні нормальні переміщення точок на лініях контакту шарів:  
 1 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ; 2 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ; 3 –  $\alpha = 0.24$ ,  $r = 1$ ;  
 4 –  $\alpha = 0.24$ ,  $r = 2$ ; 5 –  $\alpha = 0.4$ ,  $r = 1$ ; 6 –  $\alpha = 0.4$ ,  $r = 2$

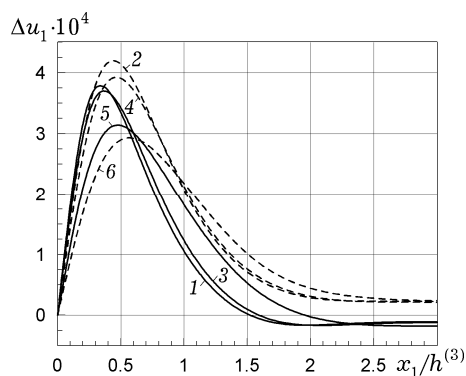


Рис. 3. Відносні дотичні переміщення точок на лініях контакту шарів:  
 1 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ; 2 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ; 3 –  $\alpha = 0.24$ ,  $r = 1$ ;  
 4 –  $\alpha = 0.24$ ,  $r = 2$ ; 5 –  $\alpha = 0.4$ ,  $r = 1$ ; 6 –  $\alpha = 0.4$ ,  $r = 2$

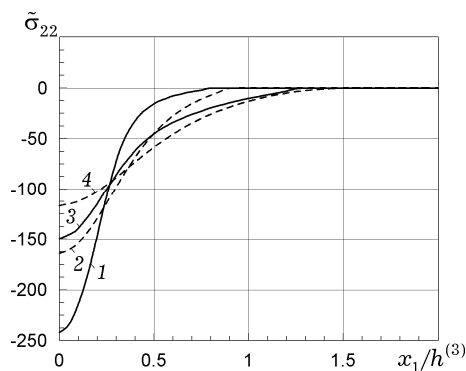


Рис. 4. Функції  $\tilde{\sigma}_{22}^{(i)} = \sigma_{22}^{(i)} \cdot h^{(3)} / q_{\max}$ ,  $i = 1, 2$ , на нижній межі  $i$ -го шару:  
 1 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ; 2 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ; 3 –  $\alpha = 0.4$ ,  $r = 1$ ; 4 –  $\alpha = 0.4$ ,  $r = 2$

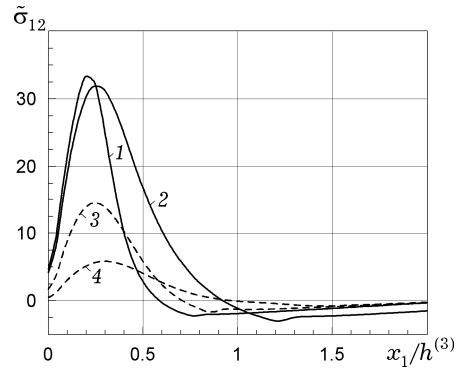


Рис. 5. Функції  $\bar{\sigma}_{12}^{(i)} = \sigma_{12}^{(i)} \cdot h^{(3)} / q_{\max}$ ,  $i = 1, 2$ , на нижній межі  $i$ -го шару:  
 1 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ; 2 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ; 3 –  $\alpha = 0.4$ ,  $r = 1$ ; 4 –  $\alpha = 0.4$ ,  $r = 2$

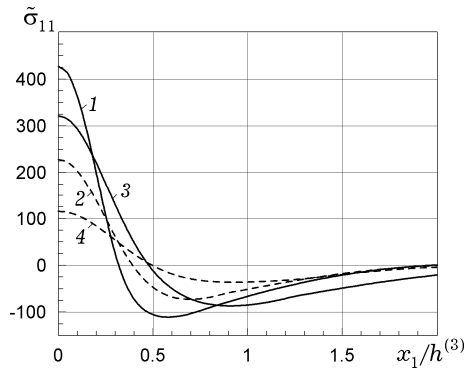


Рис. 6. Функції  $\bar{\sigma}_{11}^{(i)} = \sigma_{11}^{(i)} \cdot h^{(3)} / q_{\max}$ ,  $i = 1, 2$ , на нижній межі  $i$ -го шару:  
 1 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ; 2 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ; 3 –  $\alpha = 0.4$ ,  $r = 1$ ; 4 –  $\alpha = 0.4$ ,  $r = 2$

З аналізу рис. 2 можна зробити висновок, що зі зростанням параметра  $\alpha$  у розглянутих межах зона відставання на першій лінії контакту пересувається праворуч від зони навантаження та значення максимальних нормальних переміщень зростають майже в чотири рази, а зона відставання на межі другого шару та основи зменшується, при цьому значення максимальних нормальних переміщень спадають до нуля. Для  $\alpha < 0.24$  висота розшарування на першій лінії контакту залишається меншою ніж на другій, при  $\alpha = 0.24$  майже однакова, а при  $\alpha > 0.24$  стає більшою. Відносні дотичні переміщення точок залежно від цього параметра мають однаковий характер (рис. 3).

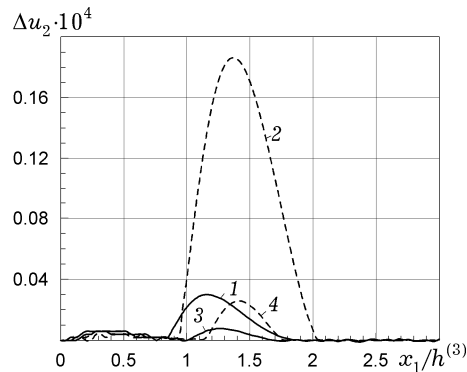


Рис. 7. Відносні нормальні переміщення точок на лініях контакту шарів:  
 1 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $K^{(1)} = K^{(2)} = 0$ ; 2 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ,  $K^{(1)} = K^{(2)} = 0$ ;  
 3 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $K^{(1)} = 0.2$ ,  $K^{(2)} = 0.1$ ; 4 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ,  $K^{(1)} = 0.2$ ,  $K^{(2)} = 0.1$

На рис. 7–11 подано результати розрахунків напружено-деформованого стану системи за наявності тертя при  $K^{(1)} = 0.2$ ,  $K^{(2)} = 0.1$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.2$ .

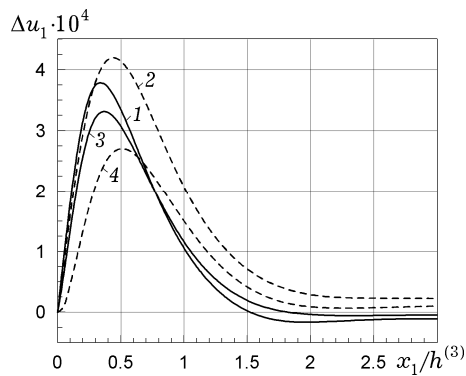


Рис. 8. Відносні дотичні переміщення точок на лініях контакту шарів:  
 1 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $K^{(1)} = K^{(2)} = 0$ ; 2 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ,  $K^{(1)} = K^{(2)} = 0$ ;  
 3 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $K^{(1)} = 0.2$ ,  $K^{(2)} = 0.1$ ; 4 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ,  $K^{(1)} = 0.2$ ,  $K^{(2)} = 0.1$

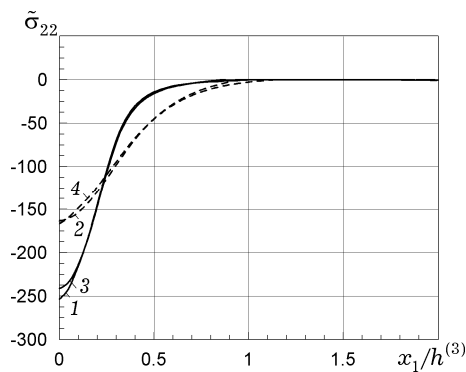


Рис. 9. Функції  $\tilde{\sigma}_{22}^{(i)} = \sigma_{22}^{(i)} \cdot h^{(3)} / q_{\max}$ ,  $i = 1, 2$ , на нижній межі  $i$ -го шару:  
 1 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $K^{(1)} = K^{(2)} = 0$ ; 2 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ,  $K^{(1)} = K^{(2)} = 0$ ;  
 3 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $K^{(1)} = 0.2$ ,  $K^{(2)} = 0.1$ ; 4 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ,  $K^{(1)} = 0.2$ ,  $K^{(2)} = 0.1$

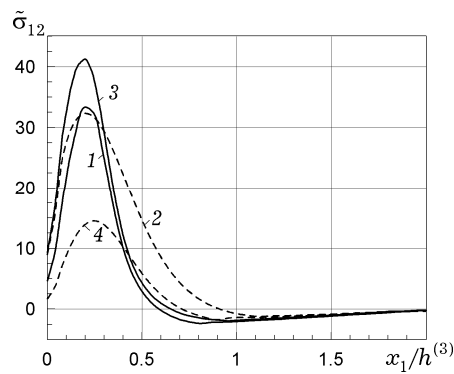


Рис. 10. Функції  $\tilde{\sigma}_{12}^{(i)} = \sigma_{12}^{(i)} \cdot h^{(3)} / q_{\max}$ ,  $i = 1, 2$ , на нижній межі  $i$ -го шару:  
 1 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $K^{(1)} = K^{(2)} = 0$ ; 2 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ,  $K^{(1)} = K^{(2)} = 0$ ;  
 3 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $K^{(1)} = 0.2$ ,  $K^{(2)} = 0.1$ ; 4 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ,  $K^{(1)} = 0.2$ ,  $K^{(2)} = 0.1$



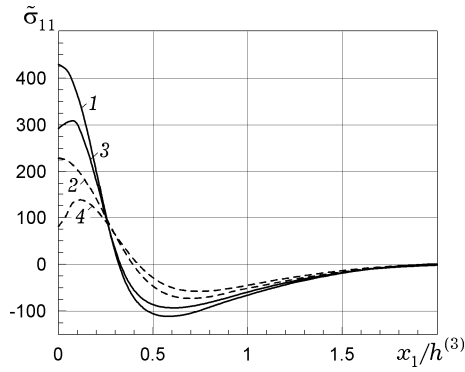


Рис. 11. Функції  $\tilde{\sigma}_{11}^{(i)} = \sigma_{11}^{(i)} \cdot h^{(3)} / q_{\max}$ ,  $i = 1, 2$ , на нижній межі  $i$ -го шару:  
 1 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $K^{(1)} = K^{(2)} = 0$ ; 2 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ,  $K^{(1)} = K^{(2)} = 0$ ;  
 3 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $K^{(1)} = 0.2$ ,  $K^{(2)} = 0.1$ ; 4 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ,  $K^{(1)} = 0.2$ ,  $K^{(2)} = 0.1$

За наявності тертя відносні нормальні переміщення точок на межі поділу першого та другого шарів зменшуються в рази, а на межі другого шару та основи зростають майже вдесятеро (рис. 7). З рис. 8 видно, що тертя не впливає на відносні дотичні переміщення.

Напруження (рис. 4–6) суттєво залежать від виду моделі (врахування тертя, висоти верхнього шару та зони навантаження). Максимальні за модулем відносні нормальні напруження зі зростанням параметра  $\alpha$  зменшувались на нижній межі верхнього шару більше, ніж на нижній межі другого, тертя майже не впливало на поведінку цих функцій (рис. 9). Параметр  $\alpha$  та тертя відчутно не змінюють максимальні за модулем відносні дотичні напруження на першій лінії проти другої (рис. 10). Максимальні за модулем відносні дотичні напруження можуть у десятки разів бути меншими за інші складові напружень.

Досліджували відшарування шарів залежно від розміру зони навантаження. На рис. 12 та 13 подано залежність максимальних нормальних переміщень  $\Delta u_2^{\max(r)} = \max(u_2^{(r)}(x_1) - u_2^{(r+1)}(x_1)) / h^{(3)}$ ,  $r = 1, 2$ , на лінії контакту шарів та відносних зон відставання  $\Delta z^{(r)} = (z_2^{(r)} - z_1^{(r)}) / h^{(3)}$ ,  $r = 1, 2$ , від розміру зони навантаження та параметра  $\beta = a / h^{(3)}$ .

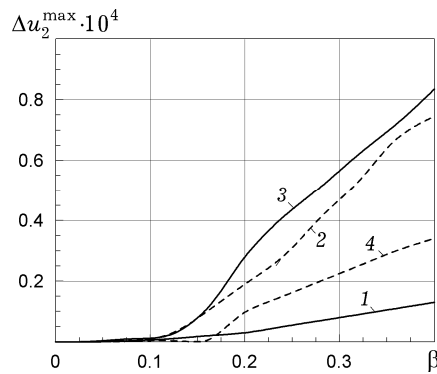


Рис. 12. Функції  $\Delta u_2^{\max(r)}$  на лініях контакту шарів:  
 1 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 1$ ; 2 –  $\alpha = 0.2$ ,  $r = 2$ ;  
 3 –  $\alpha = 0.3$ ,  $r = 1$ ; 4 –  $\alpha = 0.3$ ,  $r = 2$

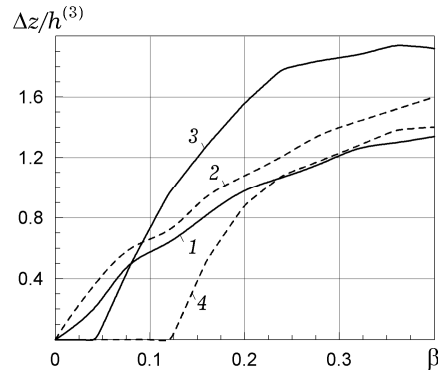


Рис. 13. Функції  $\Delta z^{(r)}$  на лініях контакту шарів:

- 1 –  $\alpha=0.2$ ,  $r=1$ ; 2 –  $\alpha=0.2$ ,  $r=2$ ;  
 3 –  $\alpha=0.3$ ,  $r=1$ ; 4 –  $\alpha=0.3$ ,  $r=2$

Як бачимо, значення максимальних нормальних переміщень зі збільшенням параметра  $\beta$  зростають незалежно від значень параметра  $\alpha$  (рис. 12). Суттєвий вплив параметра  $\alpha$  на розміри зон відшарування залежно від зони навантаження демонструє рис. 13. За певних значень товщини верхнього шару тришарова система може деформуватися за повного зчеплення шарів, або за повного зчеплення другого шару та основи.

**Висновки.** Для розв'язання задачі деформування тришарової системи з невідомими заздалегідь умовами на межі шарів застосовано варіаційний підхід, що базується на використанні модифікованого повного функціоналу Лагранжа, до якого за допомогою характеристичних функцій приєднано додаткові умови, що вказують на наявність або відсутність зон відставання і тертя та їх геометрію. Розроблено ітераційний числовий алгоритм розв'язання задач теорії пружності з односторонніми зв'язками, що поєднує метод скінчених елементів, метод продовження за параметром навантаження і метод Ньютона–Рафсона. Числово досліджено односторонню контактну взаємодію шарів тришарового аеродромного покриття з урахуванням тертя. Досліджено вплив товщини асфальтобетонного шару та розміру зони навантаження на характер поведінки напружень і деформацій на лінії контакту шарів. Встановлено, що за певних співвідношень товщини шарів і навантажень можливе деформування системи з утворенням зон проковзування, нормального контакту і відставання. Показано, що, враховуючи тертя та збільшення товщини верхнього шару, можна значно зменшити розміри відшарування шарів.

1. Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. – Львів: Растр-7, 2018. – 200 с.
2. Кудашкина Д. А., Намм Р. В. Метод Удзавы для решения контактной задачи теории упругости с трением // Ученые заметки ТОГУ. – 2014. – 5, № 3. – С. 1–9.  
[http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles/2014/TGU\\_5\\_109.pdf](http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles/2014/TGU_5_109.pdf)
3. Лукашевич А. А., Розин Л. А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа // Инж.-строит. журн. – 2013. – № 1. – С. 75–81.
4. Ободан Н. І., Гук Н. А., Козакова Н. Л. Ідентифікація зони додаткового впливу для забезпечення повного контакту двошарової основи // Східно-Європ. журн. передових технологій. – 2017. – № 5/7(89). – С. 23–29.  
 – doi: 10.15587/1729-4061.2017.109674.
5. Прокопшин І. І., Мартиняк Р. М. Числове дослідження контактної взаємодії двох тіл з виїмкою методом декомпозиції області // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – № 16. – С. 232–239.

6. Слободян Б. С., Ляшенко Б. А., Маланчук Н. И., Марчук В. Е., Мартыняк Р. М. Моделирование контактного взаимодействия периодически текстурированных тел с учетом фрикционного скольжения // Журн. мат. наук. – 2016. – 215. – Вып. 1. – С. 110–120.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2826-x>.
7. Станкевич И. В. Численное решение смешанных задач теории упругости с односторонними связями // Математика и мат. моделирование. – 2017. – № 5. – С. 40–53.  
– doi: 10.24108/mathm.0517.0000078.
8. Jun L., Liu X. Y., Nan Y. Y., Xuefeng Y. Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffener integrated composite structure // Mech. of advan. mat. and struct. – 2016. – 23, № 10. – P. 1188–1196.
9. Xu Y., Jackson R. L. Periodic Contact Problems in Plane Elasticity: The Fracture Mechanics Approach // J. Tribol. – 2017. – 140(1), 011404. Paper No. TRIB-17-1114. – P. 1–11.  
– doi: 10.1115/1.4036920.
10. Zhi J., Chen B. Y., Tay T. E. Geometrically nonlinear analysis of matrix cracking and delamination in composites with floating node method // Computational Mechanics. – 2019. – 63, No. 2/ – P 201–217.  
– <https://link.springer.com/article/10.1007/s00466-018-1591-8>

### РАССЛОЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

*Исследовано нелинейное поведение многослойной системы под влиянием нормально-распределенной поверхностной нагрузки. Для этого применено численно-аналитическое моделирование нелинейных процессов деформирования трехслойной системы. Нелинейную краевую задачу с дополнительными условиями в виде неравенств сформулировано в вариационной постановке. Для решения задачи использован метод конечных элементов в сочетании с методом Ньютона–Рафсона и методом продолжения по параметру нагрузки. Выполнен численный анализ напряженно-деформированного состояния для различных вариантов толщины верхнего слоя и размера зоны нагрузки.*

**Ключевые слова:** плоская задача теории упругости, односторонний контакт, вариационная постановка задачи, метод конечных элементов, напряжение, перемещение, трение, удельный вес.

### TRANSMISSION OF THE THREE-DIMENSIONAL BASIS OF NORMAL LOADING

*This work is devoted to the study of the nonlinear behavior of a multilayer system, on which the normal-distributed surface load operates. In the course of the research, numerical-analytical modeling of nonlinear processes of deformation of a three-layer system was applied. A nonlinear boundary value problem with additional conditions in the form of inequalities is formulated in a variational statement. For solving the problem, the finite element method is used in conjunction with the Newton–Ruffson method and the method of continuation of the load parameter. A numerical analysis of the stress-strain state was performed for various variants of the thickness of the upper layer and the size of the loading zone.*

**Key words:** flat problem of elasticity theory, one-way contact, variational statement of the problem, finite element method, stress, displacement, friction, specific gravity.

Дніпровський нац. ун-т  
ім. О. Гончара, Дніпро

Одержано  
06.12.18