

ОПТИМІЗАЦІЯ СТАТИЧНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПЛОСКОДЕФОРМОВАНОГО ПІВПРОСТОРУ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗОВНІШНЬОГО ТЕПЛООВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Досліджено двовимірну стаціонарну задачу керування вертикальними температурними переміщеннями плоскодеформованого півпростору, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла. За функцію керування вибрано розподіл температури довкілля, з яким за законом Ньютона відбувається конвективний теплообмін півпростору. У просторі неперервних функцій побудовано розв'язок оберненої задачі термopружності, до якої зведено сформульовану задачу керування. Для конкретних випадків теплового навантаження півпростору проаналізовано особливості поведінки знайденого розв'язку.

Ключові слова: обернена задача термopружності, плоскодеформований півпростір, температурні переміщення, статична задача керування.

Вступ. Значна частина елементів технологічного обладнання, зокрема мікроелектронних пристроїв, під час роботи нагрівається внутрішніми джерелами тепла, що часто призводить до виникнення у них високоградієнтного температурного поля [5, 7]. Щоб забезпечити надійне функціонування таких елементів, індуковане джерелами тепло необхідно відвести. Для цього часто використовують режим конвективного теплообміну з довкіллям. Ефективність такого тепловідведення можна підвищити за умов керованої зміни температури середовища [1] чи коефіцієнта теплообміну із цим середовищем [13]. Однак для забезпечення міцнісних і функціональних властивостей відповідних елементів тут слід враховувати обмеження на параметри їх термонапруженого стану. До таких, зокрема, відносять максимальні значення напружень та переміщень [1, 6], що виникають в елементах за розглядуваного теплового навантаження. Тому такі задачі тепловідведення можна розглядати як задачі оптимізації процесу нагріванням чи охолодженням тіла за певних додаткових обмежень.

Задачі керування термонапруженим станом однорідних, неоднорідних і термочутливих тіл та підходи до їх розв'язування досліджували, зокрема, у працях [1, 2, 4, 8, 9, 12, 13, 15].

Нижче шляхом зведення до оберненої задачі термopружності побудовано та вивчено розв'язок задачі оптимального охолодження за допомогою конвективного теплообміну з довкіллям плоскодеформованого півпростору, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла, за обмежень на вертикальні температурні переміщення його межевої поверхні чи деякого перерізу, паралельного до неї.

1. Формулювання задачі керування. Розглянемо однорідний ізотропний півпростір, віднесений до прямокутної декартової системи координат x_* , y_* , z_* так, що $0 \leq x_* < \infty$, $|y_*| < \infty$, $|z_*| < \infty$. Вважатимемо, що він нагрівається внутрішніми джерелами тепла, а через його межеву поверхню $x_* = 0$ здійснюється конвективний теплообмін із довкіллям за законом Ньютона. Тоді двовимірну стаціонарну задачу теплопровідності для півпростору описують рівняння [3]

$$\Delta T(x, y) + Q(x, y) = 0, \quad x \in [0, \infty), \quad y \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

і крайові умови

$$\frac{\partial T(0, y)}{\partial x} - \alpha \left[T(0, y) - t(y) \right] = 0, \quad (2)$$

* yasinsky.anatoliy@gmail.com

$$\lim_{x, |y| \rightarrow \infty} T(x, y) = 0, \quad (3)$$

де $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа; $x = x_*/R$, $y = y_*/R$ – безрозмірні декартові координати; R – деяка нормувальна довжина; $T(x, y)$ – температурне поле півпростору; $Q(x, y) = Q_*(x, y)R^2/\lambda$ – відносна інтенсивність внутрішніх теплових джерел; $Q_*(x, y)$ – їх інтенсивність; $\alpha = \alpha_*R/\lambda$ – безрозмірний коефіцієнт теплообміну; α_* – коефіцієнт теплообміну; λ – коефіцієнт теплопровідності; $t(y)$ – температура довкілля.

Вважаємо, що функція розподілу теплових джерел $Q(x, y)$ задана, а конвективний теплообмін із довкіллям використовуємо для відведення тепла, індукованого ними. Необхідно відшукати такий закон відведення тепла, щоб за сталого значення коефіцієнта теплообміну α розподіл вертикальних температурних переміщень межевої поверхні півпростору чи деякого перерізу $x = x_1$, $0 \leq x_1 = \text{const}$, паралельного до цієї поверхні, був максимально близьким до наперед заданого. Тобто задача керування полягає у визначенні такої функції зміни температури довкілля $t(y)$, $y \in [0, \infty)$, яка б мінімізувала функціонал

$$J(u) = \max_{y \in [0, \infty)} |u_x(x_1, y; t) - \varphi_*(y)|, \quad (4)$$

де $u_x(x_1, y; t)$ – вертикальні температурні переміщення у заданому перерізі $x = x_1$ півпростору; $\varphi_*(y)$ – заданий розподіл переміщень.

2. Побудова розв'язку задачі курування. Термонапружений стан вільного від зовнішнього силового навантаження плоскодеформованого півпростору, спричинений температурним полем $T(x, y)$, опишемо системою диференціальних рівнянь [3, 11]

$$\begin{aligned} (1-\nu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} &= \alpha_T(1+\nu) \frac{\partial T}{\partial x}, \\ (1-\nu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} &= \alpha_T(1+\nu) \frac{\partial T}{\partial y}, \quad u_z \equiv 0 \end{aligned} \quad (5)$$

та умовами

$$\sigma_{xx}|_{x=0} = \sigma_{xy}|_{x=0} = 0, \quad (6)$$

де u_x , u_y , u_z – компоненти вектора переміщень; σ_{xx} , σ_{xy} – компоненти тензора напружень; ν – коефіцієнт Пуассона; α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення. Вважаємо, що усі компоненти тензора напружень прямують до нуля, коли $x \rightarrow \infty$ і $|y| \rightarrow \infty$.

Припустимо, що у просторі неперервних функцій існує керування $t(y)$, $y \in [0, \infty)$, яке забезпечує існування точної нижньої грані функціонала (4). У цьому випадку задача мінімізації функціонала (4) еквівалентна задачі відшукування керування $t(y)$, яке забезпечуватиме рівність

$$u_x(x_1, y; t) = \varphi_*(y), \quad y \in [0, \infty). \quad (7)$$

Припустимо також, що розв'язки задач теплопровідності (1)–(3) і термопружності (5), (6) знайдено аналітично і подано у вигляді

$$T(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty G(x, y, \xi, s) t(\xi) d\xi ds + \int_0^\infty \int_0^\infty G_*(x, y, \eta, \xi, s) Q(\eta, \xi) d\eta d\xi ds, \quad (8)$$

$$u_j(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty P_j(x, y, \eta, \xi) T(\eta, \xi) d\eta d\xi, \quad (9)$$

де $G(x, y, \xi, s)$, $G_*(x, y, \eta, \xi, s)$, $P_j(x, y, \eta, \xi)$, $j = x, y$ – відомі функції.

Якщо температурне поле (8) підставити у вираз для переміщень (9) і скористатися умовою (7), то отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty \kappa(y, \xi) t(\xi) d\xi = f(y) \quad (10)$$

на шукану функцію $t(y)$, де $\kappa(y, \xi)$, $f(y)$ – відомі функції.

За таких припущень вихідну задачу керування (4) можна звести до оберненої задачі термопружності [4, 14], яку описує інтегральне рівняння (10) і в якій за заданим у площині $x = x_1$ розподілом температурних переміщень потрібно визначити функцію зміни температури довкілля.

Щоб побудувати інтегральне рівняння (10), знайдемо розв'язки задач теплопровідності (1)–(3) і термопружності (5), (6) у вигляді (8), (9).

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що температурне поле $T(x, y)$ є парною функцією координати y . Скориставшись косинус-перетворенням Фур'є [10], знайдемо, що

$$G(x, y, \xi, s) = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\exp(-sx)}{s + \alpha} \cos(s\xi) \cos(sy), \quad (11)$$

$$G_*(x, y, \eta, \xi, s) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos(s\xi) \cos(sy)}{s(s + \alpha)} [(s - \alpha) \exp(-s(x + \eta)) + (s + \alpha) \exp(-s|x - \eta|)]. \quad (12)$$

Як відомо [3, 11], розв'язок задачі термопружності для плоскодеформованого півпростору можна побудувати з двох частин: загального розв'язку системи однорідних рівнянь (5) (без температурної компоненти) за умов (6) і частинного розв'язку системи відповідних неоднорідних рівнянь. Загальний розв'язок системи рівнянь (5), (6) будемо за допомогою функції напружень Ері F [3, 11], яка задовольняє бігармонічне рівняння

$$\Delta^2 F = 0, \quad (13)$$

а частинний – за допомогою термопружного потенціалу переміщень Φ , який задовольняє рівняння [3, 11]

$$\Delta \Phi = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T R^2 T. \quad (14)$$

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень виразимо через функції F та Φ так [3, 11]:

$$u_x = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{R^2(1 - 2\nu)} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

$$u_y = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{R^2(1 - 2\nu)} \left(2(1 - \nu) \Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \quad (15)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (F - 2G\Phi), \quad \sigma_{yy} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F - 2G\Phi), \quad (16)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (F - 2G\Phi), \quad \sigma_{zz} = \frac{1}{R^2} \Delta(vF - 2G\Phi), \quad (17)$$

де G – модуль зсуву.

Скориставшись виразами (16), (17) та записаними у просторі зображень за Фур'є умовами (6), загальний розв'язок задачі (6), (13), який задовольняє умову $\lim_{x \rightarrow \infty} F_F = 0$, запишемо у вигляді

$$F_F = -\frac{\alpha_T(1+\nu)GR^2}{s(1-\nu)} \left(1 + \frac{2sx}{R} \right) \int_0^\infty T_F(\eta, s) \exp(-s(\eta+x)) d\eta, \quad (18)$$

де F_F , T_F – косинус-зображення Фур'є відповідно функцій $F(\eta, y)$ і $T(\eta, y)$,

причому $T_F(\eta, s) = \int_0^\infty T(\eta, y) \cos(sy) dy$, $s \in [0, \infty)$ – параметр інтегрального перетворення.

Застосувавши косинус-перетворення Фур'є до рівняння (14), одержимо його частинний розв'язок у просторі зображень, коли $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_F = 0$:

$$\Phi_F(x, s) = -\frac{\alpha_T(1+\nu)R^2}{2s(1-\nu)} \int_0^\infty T_F(\eta, s) \exp(-s|x-\eta|) d\eta. \quad (19)$$

На основі співвідношень (15) та формули обернення для косинус-перетворення Фур'є [10]

$$F(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_F(x, s) \cos(sy) ds, \quad y \in [0, \infty) \quad (20)$$

у просторі оригіналів отримаємо формули (9), де

$$\begin{aligned} P_x(x, y; \eta, \xi) &= \frac{(1+\nu)\alpha_T R}{(1-\nu)\pi} \int_0^\infty [\exp(-s|x-\eta|) \operatorname{sign}(x-\eta) - \\ &\quad - (3-4\nu+2sx) \exp(-s(x+\eta))] \cos(s\xi) \cos(sy) ds, \\ P_y(x, y; \eta, \xi) &= \frac{(1+\nu)\alpha_T R}{(1-\nu)\pi} \int_0^\infty [(3-4\nu-2sx) \exp(-s(x+\eta)) + \\ &\quad + \exp(-s|x-\eta|)] \cos(s\xi) \sin(sy) ds. \end{aligned}$$

Маючи розв'язки задач теплопровідності і термопружності для півпростору у вигляді (8), (9), знаходимо ядро

$$\kappa(y, \xi) = \frac{2(1-\nu)\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-sx_1)}{s(s+\alpha)} \cos(sy) \cos(s\xi) ds$$

та праву частину

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{Q(\eta, \xi)}{s} A(\eta, s) \cos(sy) \cos(s\xi) ds d\eta d\xi - \phi(y)$$

інтегрального рівняння (10). Тут

$$\begin{aligned} A(\eta, s) &= (x_1 - \eta) \exp(-s|x_1 - \eta|) - \\ &\quad - \left(\frac{4(1-\nu)}{s+\alpha} + x_1 + (3-4\nu+2sx_1)\eta \right) \exp(-s(x_1 + \eta)), \end{aligned}$$

$$\varphi(y) = \frac{(1-\nu)\varphi_*(y)}{(1+\nu)\alpha_T R}.$$

Застосувавши косинус-перетворення Фур'є до інтегрального рівняння (10) з наведеними ядром і правою частиною, у просторі зображень знайдемо його розв'язок, який з допомогою формули обернення (20) запишемо так:

$$t(y) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)\alpha} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty Q(\eta, \xi)(s+\alpha) \exp(s x_1) \times \\ \times A(\eta, s) \cos(sy) \cos(s\xi) ds d\eta d\xi - \frac{2}{\pi(1-\nu)\alpha} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(\xi) \times \\ \times s(s+\alpha) \exp(s x_1) \cos(sy) \cos(s\xi) ds d\xi. \quad (21)$$

Поклавши у формулі (21) $\alpha t(y) = q(y)$, $\alpha = 0$, можна отримати розв'язок задачі керування температурними переміщеннями півпростору, коли на його межовій поверхні задано тепловий потік $q(y)$.

3. Числові результати та їх аналіз. За допомогою формули (21) дослідимо поведінку оптимального розподілу температури довкілья $t(y)$, яка забезпечує нульові вертикальні температурні переміщення межевої поверхні півпростору $\varphi(y) = 0$, $x_1 = 0$, коли внутрішні теплові джерела сталої інтенсивності $Q_0 = \text{const}$ розподілені за законом

$$Q(x, y) = Q_0(H(h_2 - x) - H(h_1 - x))H(a - y)$$

у прямокутній області $D = \{(x, y) \in [h_1, h_2] \times [0, a]\}$ на відстані $x = h_1$ від межі.

Тут $h_i = \text{const}$, $i = 1, 2$, $a = \text{const}$, $H(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y < 0 \end{cases}$ – функція Гевісайда.

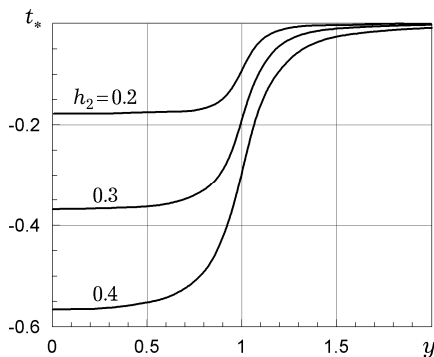


Рис. 1

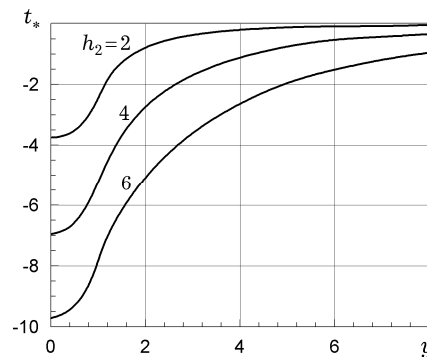


Рис. 2

На рис. 1 і 2 зображено безрозмірну функцію $t_* = 2\pi(1-\nu)t/Q_0$, розраховану за формулою (21) при $\alpha = 1$, $a = 1$, коли відстань від межевої поверхні півпростору до області тепловиділення стала – $h_1 = 0,1$, а змінною є товщина області $h_2 - h_1$. Забезпечити нульові вертикальні температурні переміщення межевої поверхні півпростору зі збільшенням товщини області тепловиділення можна лише охолодженням, без додаткового нагрівання. З ростом різниці $h_2 - h_1$ підвищується і абсолютне значення функції керування з одночасним збільшенням зони охолодження у напрямку осі Oy . За збільшення чи зменшення довжини a області D функція керування якісно зберігає наведену на рис. 1 і 2 поведінку з відповідним збільшенням чи

зменшенням зони охолодження у напрямку осі Oy . Як засвідчили числові дослідження, підвищуючи значення коефіцієнта теплообміну α через межову поверхню півпростору, забезпечити її нульові вертикальні температурні переміщення можна меншою за модулем функцією керування за решти незмінних параметрів.

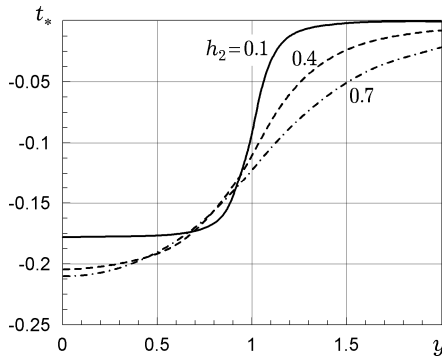


Рис. 3

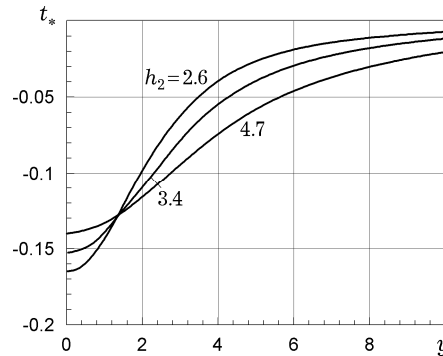


Рис. 4

Рис. 3 і 4 для $\alpha = 1$ ілюструють поведінку функції керування t_* , коли прямокутна область тепловиділення D сталої товщини $h_2 - h_1 = 0.1$ і довжина $a = 1$ віддаляється від межової поверхні півпростору. Виявили, що з віддаленням області тепловиділення D від межової поверхні півпростору абсолютне значення функції керування спочатку несуттєво зростає, а після деякого граничного значення h_1^* зменшується з одночасним збільшенням зони охолодження у напрямку осі Oy . У розглядуваному випадку $h_1^* \approx 0.7$ (рис. 3). Це зумовлено тим, що з віддаленням від межової поверхні півпростору вплив теплових джерел на вертикальні температурні переміщення цієї поверхні послаблюється. Зі збільшенням чи зменшенням довжини a області D функція керування якісно зберігає описану поведінку з відповідним збільшенням чи зменшенням зони охолодження у напрямку осі Oy . Збільшуючи значення коефіцієнта теплообміну α через межову поверхню півпростору, забезпечити її нульові вертикальні температурні переміщення можна меншою за модулем функцією керування за решти незмінних параметрів.

Із аналізу формули (21) випливає, що існування функції керування $t(y)$, яка забезпечує точну нижню грань функціонала (4), безпосередньо пов'язане з існуванням невластивих інтегралів

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Q_F(\eta, s) (s + \alpha) \exp(s x_1) A(\eta, s) \cos(sy) ds d\eta,$$

$$\int_0^{\infty} \varphi_F(s) s (s + \alpha) \exp(s x_1) \cos(sy) ds.$$

Коли функції $Q(x, y)$, $\varphi(y)$ або інші вихідні параметри є такі, що наведені вище інтеграли розбігаються, то це означає, що припущення про існування функції керування $t(y)$, яка забезпечує точну нижню грань функціонала (4), порушується. Однак у цьому випадку, скориставшись виразом (21), можна побудувати наближення цієї функції вертикальними переміщеннями у вигляді послідовності, яка мінімізує критерій оптимальності (4) у просторі неперервних функцій.

Нехай теплові джерела $Q(x, y)$ сталої інтенсивності розподілені у прямокутній області D за описаним вище законом. Дослідимо поведінку функ-

ції керування $t(y)$, коли $x_1 \neq 0$. Якщо, наприклад, $x_1 < h_1$, то на основі формули (21) отримаємо:

$$t(y) = \frac{Q_0}{2\pi(1-\nu)\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\sin(sa)}{s} (s + \alpha) B(x_1, s) \cos(sy) ds, \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} B(x_1, s) = & \frac{1}{s^2} [((x_1 - h_1)s - 1) \exp(s(2x_1 - h_1)) + \\ & + (1 - (x_1 - h_2)s) \exp(s(2x_1 - h_2))] - \\ & - \left[\frac{4(1-\nu)}{s+\alpha} - 2(1-2\nu + sx_1)x_1 \right] \frac{\exp(-sh_1) - \exp(-sh_2)}{s} + \\ & + \frac{3-4\nu+2sx_1}{s^2} [(1 + s(x_1 + h_2)) \exp(-sh_2) - \\ & - (1 + s(x_1 + h_1)) \exp(-sh_1)]. \end{aligned}$$

З наведених формул випливає, що при $2x_1 > h_1$ інтеграл (22) розбігається. Скориставшись формулою (22), запишемо n -е наближення шуканого керування у вигляді

$$t^{(n)}(y) = \frac{Q_0}{2\pi(1-\nu)\alpha} \int_0^{\omega_n} \frac{\sin(sa)}{s} (s + \alpha) B(x_1, s) \cos(sy) ds, \quad (23)$$

де за ω_n можна взяти елементи будь-якої монотонно зростаючої числової послідовності $\{\omega_n\}$, $n = 1, 2, \mathbf{K}$.

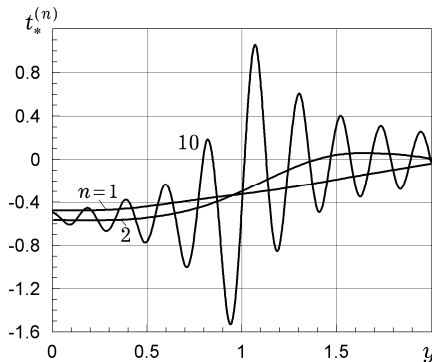


Рис. 5

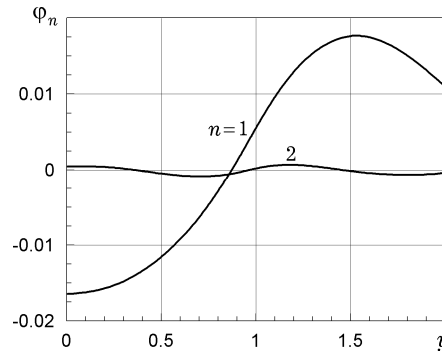


Рис. 6

Рис. 5 ілюструє поведінку першого $n=1$, другого $n=2$ та десятого $n=10$ безрозмірних елементів $t_*^{(n)} = 2\pi(1-\nu)t^{(n)}/Q_0$ мінімізувальної послідовності (23), коли $\omega_n = \pi(2n-1)/2$, $n = 1, 2, \dots$ – нулі функції $\cos(y)$, $\alpha = 1$; $a = 1$; $\nu = 0.3$; $h_1 = 0.21$; $h_2 = 0.31$; $x_1 = 0.2$.

Безрозмірні значення вертикальних температурних переміщень $\varphi_n = 2\pi\varphi/Q_0$, які відповідають першому та другому наведеним вище елементам мінімізувальної послідовності, зображені на рис. 6. Як бачимо, абсолютні значення переміщень $\max |u_x(x_1, y)|$ суттєво зменшуються зі збільшенням величини n .

Поведінка елементів мінімізувальної послідовності має осцилювальний характер, причому амплітуда і частота осциляцій зростає зі збільшенням значення n (рис. 5). Фізично це означає, що мінімізувати вертикальні

переміщення $u_x(x_1, y)$ лише охолодженням межевої поверхні півпростору неможливо. Тут центральна зона охолодження межевої поверхні повинна почергово переходити в зони підігріву і охолодження на периферії за координатою y .

Висновки. Сформульовано задачу керування розподілом вертикальних температурних переміщень заданого перерізу плоскодеформованого півпростору, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла. За функцію керування вибрано розподіл температури довкілля, з яким відбувається конвективний теплообмін півпростору, а за критерій оптимальності – мінімальне значення рівномірного відхилення керованого розподілу переміщень від заданого. На основі припущення про існування у просторі неперервних функцій керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності, сформульовану задачу оптимізації зведено до оберненої задачі термопружності, яку описує інтегральне рівняння першого роду типу згортки. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є побудовано аналітичний розв'язок оберненої задачі.

Для конкретного випадку теплового навантаження півпростору проаналізовано поведінку знайденого керування, яке забезпечує рівність нулю вертикальних переміщень межевої поверхні за різних характерних параметрів. Якщо припущення про існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності, порушується, запропоновано методику побудови у просторі неперервних функцій послідовності, яка мінімізує заданий критерій оптимальності. Проаналізовано поведінку елементів мінімізувальної послідовності та значення критерію оптимальності, які їм відповідають.

1. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
2. *Дейнека В. С., Аралова А. А.* Оптимальное управление термонапряженным состоянием полого длинного цилиндра // Доп. НАН України. – 2012. – № 5. – С. 38–42.
3. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – Киев: Виц. шк., 1975. – 216 с.
4. *Моделивання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл:* в. 5-ти т. / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. – Т. 5: Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с.
5. *Попович В. С., Ракоча І. І.* Напружено-деформований стан кусково-однорідного термочутливого циліндра за тепловиділення кипінням рідини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 2. – С. 89–97.
Te same: *Popovych V. S., Rakocha I. I.* Stress-strain state of a piecewise homogeneous thermally sensitive cylinder in the presence of heat removal by liquid boiling // J. Math. Sci. – 2017. – 223, No. 2. – P. 103–116.
<https://doi.org/10.1007/s10958-017-3341-4>.
6. *Ткаченко О. А., Чиж І. Г.* Термодефокусування зображень в оптичних системах // Наук. вісті Нац. техн. ун-ту України «КПІ». – 2012. – № 1. – С. 126–131.
7. *Федасюк Д. В.* Методи та засоби теплового проектування мікроелектронних пристроїв. – Львів: Вид-во держ. ун-ту «Львівська політехніка», 1999. – 228 с.
8. *Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І.* Застосування варіаційного методу однорідних розв'язків для оптимального керування осесиметричним напруженим станом циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – 60, № 2. – С. 105–116.
9. *Ashida F., Morimoto T., Yamada T.* Adaptive control of maximum thermal stress in a smart piezocomposite disk // J. Therm. Stresses. – 2016. – 39, No. 3. – P. 314–325. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2015.1125199>.
10. *Farlow S. J.* Partial differential equations for scientists and engineers. – New York: Dover Publ., 1993. – 414 p.
11. *Hetnarski R. B., Eslami M. R.* Thermal stresses-advanced theory and applications. – Dordrecht: Springer, 2009. – 560 p.
12. *Kushnir R. M., Yasinsky A. V.* Optimal heating control of thermosensitive bodies under plastic deformation of material // J. Eng. Math. – 2013. – 78, No. 1. – P. 83–98. – <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9467-3>.

13. Nyashin Y. I., Ilialov O. R. Optimization problem for obtaining a prescribed residual stress distribution: formulation and solution // Int. J. Mech. Sci. – 1995. – 37, No. 5. – P. 485–493. – [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(94\)00080-4](https://doi.org/10.1016/0020-7403(94)00080-4).
14. Yasinsky A. Determination and optimization of stress state of bodies on the basis of inverse thermoelasticity problems // In: Encyclopedia of Thermal Stresses /Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 916–924. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_607.
15. Yasinsky A., Tokovyy Yu., Ierokhova O. Optimization of two-dimensional nonstationary thermal stresses and displacements in a half-space through the use of internal heat sources // J. Therm. Stresses. – 2016. – 39, No. 9. – P. 1084–1097. <https://doi.org/10.1080/01495739.2016.1192854>.

ОПТИМИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПЛОСКОДЕФОРМИРОВАННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНЕЙ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКИ

Исследована двумерная стационарная задача управления вертикальными температурными перемещениями плоскодеформированного полупространства, нагреваемого внутренними источниками тепла. В качестве функции управления выбрана температура окружающей среды, с которой по закону Ньютона происходит конвективный теплообмен полупространства. В пространстве непрерывных функций построено решение обратной задачи термоупругости, к которой сведено задачу управления. Для конкретных случаев тепловой нагрузки полупространства проанализированы особенности поведения найденного решения.

Ключевые слова: обратная задача термоупругости, плоскодеформированное полупространство, температурные перемещения, статическая задача управления.

OPTIMIZATION OF STEADY-STATE THERMAL DISPLACEMENTS IN A PLANE-DEFORMED HALF-SPACE BY MEANS OF EXTERNAL THERMAL LOADING

A two-dimensional steady-state problem on the control of vertical thermal displacements of a plane-deformed half-space with internal heat sources is analyzed. Distribution of the environment temperature was chosen to be the control function when assuming the Newton-law convective heat-exchange between the half-space and the environment. The formulated control problem has been reduced to an inverse thermoelasticity problem which then was solved in the space of continuous functions. For specific case studies of thermal loadings of the half-space, the key features of the constructed solution are analyzed.

Key words: inverse thermoelasticity problem, plane-strained half-space, thermal displacements, steady-state control problem.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.07.18