

**ТЕРМОПРУЖНИЙ АНАЛІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК**

*Аналітично вивчено напружено-деформований стан функціонально-градієнтної циліндричної оболонки зі скінченною довжиною, яку нагріває плоске температурне поле. Матеріальні властивості оболонки є функціями поперечної координати. Для дослідження використано рівняння уточненої теорії оболонок, яка враховує деформацію поперечного зсуву та поперечну нормальну. Рівняння теплопровідності виведено за припущення лінійного розподілу температури по товщині. Для граничних умов вільного оперття квазістатичну задачу незв'язаної термопружності розв'язано методами перетворень Фур'є і Лапласа. Встановлено важливість врахування впливу матеріальної неоднорідності композиту метал–кераміка.*

**Ключові слова:** термопружність, циліндрична оболонка, функціонально-градієнтний матеріал, температурне навантаження.

**Вступ.** Тонкостінні елементи конструкцій типу пластин і оболонок, виготовлені з неоднорідних композитних матеріалів, часто використовують у сучасній техніці [1–3, 15]. Особливої уваги заслуговують функціонально-градієнтні (ФГ) композити з неперервною неоднорідністю. Вони жаротривкі, жорсткі на злам, здатні витримувати підвищені теплові напруження, не схильні до корозії і ерозії, тому придатні в сучасних технологіях. Здебільшого ФГ матеріали є сплавами кераміки та металу, або комбінацією різних матеріалів. Фізико-механічні їх властивості змінюються плавно і неперервно від однієї площини до іншої. Щоб використати нетрадиційні матеріали для виготовлення тонкостінних елементів конструкцій типу пластин і оболонок, потрібно розробити нові моделі та методи для їх розрахунку. Тому дослідження у цьому напрямку важливі і актуальні.

Упродовж останніх років детально вивчали ФГ пластини і оболонки. Зокрема [3], вплив неоднорідності матеріалу на граничну рівновагу оболонки з поверхневою тріщиною. Теоретично досліджено [11] нестационарну термопружну реакцію циліндричної панелі на дію неоднорідного термічного навантаження. Знайдено [7] точний розв'язок рівнянь термопружності зсувної теорії ФГ циліндричних оболонок скінченної довжини за температурного навантаження і дії внутрішнього тиску та осьових сил. Класичну і різні уточнені теорії для цього використали в працях [6, 8, 12, 14]. Застосовуючи рівняння взаємозв'язаної термопружності і метод скінченних елементів, проаналізували [5, 16] термомеханічну поведінку ФГ циліндричних оболонок. Побудовано [4, 9, 13, 19] аналітичні розв'язки для ФГ оболонок і пластин на основі тривимірних рівнянь термопружності. З допомогою методології, яка ґрунтується на принципі Гамільтона, автори статті [17] аналітично досліджували втрату тривкості ФГ циліндричних оболонок за теплових і силових навантажень. Аналізували [10] оптимальний склад ФГ матеріалів, щоб знизити температурні напруження і підвищити термотривкість. Детальніший огляд різних теорій моделювання і дослідження ФГ оболонок і пластин подано в праці [18]. Проте мало уваги приділено вивченню напружено-деформованого стану неоднорідних оболонок з використанням температурного поля, знайденого з рівняння теплопровідності з урахуванням теплообміну.

Мета статті – на основі рівнянь термопружності уточненої теорії оболонок та рівнянь теплопровідності з урахуванням конвективного теплообмі-

---

\* flyachok@ukr.net

ну з довіллям дослідити термопружний стан ізотропної ФГ кругової циліндричної оболонки за її нагріву плоским температурним полем, заданим у початковий момент часу.

**1. Формулювання задачі і основні рівняння.** Розглянемо неоднорідну ізотропну кругову циліндричну оболонку зі сталою товщиною  $2h$ , довжиною  $l$  і радіусом середньої поверхні  $R$ . Точки простору оболонки віднесемо до циліндричної системи координат  $x, \theta, Z$ , які позначають відповідно осьову, колову та радіальну координати. Надалі цим координатам відповідатимуть індекси 1, 2, 3.

Припустимо, що оболонка виготовлена із композиту метал–кераміка. Тоді ефективні матеріальні властивості композиту  $P_{ef}$  через характеристики кераміки  $P_c$  і металу  $P_m$  можна записати так:  $P_{ef}(z) = P_c f_c + P_m f_m$ , де  $f_c$  і  $f_m$  – відносні частки відповідно кераміки і металу в композиті, розподіл яких по товщині потрібно задати, причому  $f_c + f_m = 1$ . Задамо

степеневий закон розподілу [5, 8]  $f_c = f_c^- + (f_c^+ - f_c^-) \left( \frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^k$ , де  $f_c^+$  і  $f_c^-$  – частка кераміки  $f_c$  відповідно на верхній  $z = h$  і нижній  $z = -h$  поверхнях;  $k$  – параметр неоднорідності, який описує зміну частки матеріалу вздовж товщини і може набувати значень  $k \geq 0$ . Змінюючи його, можна досягнути оптимального складу композиту. В окремому випадку, коли  $f_c^- = 0$  і  $f_c^+ = 1$ , маємо  $f_c = \left( \frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^k$ , і формула для ефективних властивостей матеріалу набуде вигляду

$$P_{ef}(z) = P_m + (P_c - P_m) \left( \frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^k. \quad (1)$$

Очевидно, що зі зменшенням параметра  $k$  до нуля матеріал оболонки набуде властивостей чистої кераміки, а з його збільшенням до нескінченності – характеристики чистого металу. Вважатимемо, що модуль Юнга  $E(z)$ , коефіцієнт лінійного температурного розширення  $\alpha^t(z)$  і коефіцієнт теплопровідності  $\lambda(z)$  описує рівняння (1), а коефіцієнт Пуассона  $\nu = \text{const}$ .

Нехай оболонка нагрівається тепловими джерелами або температурним полем, заданим у початковий момент, а між поверхнями  $z = \pm h$  і довіллям відбувається конвективний теплообмін. Тоді в оболонці виникнуть температурні деформації та напруження. Для дослідження її напружено-деформованого стану застосуємо математичну модель [1, 2], яка ґрунтується на припущеннях про лінійну залежність температури  $t$  і компонентів вектора переміщень  $U_j$  від поперечної координати  $z$ :

$$U_j(x, \theta, z, \tau) = u_j(x, \theta, \tau) + z \gamma_j(x, \theta, \tau) \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$t(x, \theta, z, \tau) = T_1(x, \theta, \tau) + \frac{z}{h} T_2(x, \theta, \tau), \quad (3)$$

де  $u_j$  – компоненти переміщення точок середньої поверхні;  $\gamma_1, \gamma_2$  – кути повороту нормалі;  $\gamma_3$  – поперечна нормальна деформація;  $T_i = \frac{2i-1}{2h^i} \int_{-h}^h t z^{i-1} dz$

( $i = 1, 2$ ) – інтегральні характеристики температури.

Ця модель складається зі системи рівнянь теплопровідності і термопружності, які в загальному випадку взаємозв'язані. Якщо знехтувати вплив деформації на зміну температурного поля, то ці системи стають

незалежними і рівняння теплопровідності для визначення інтегральних характеристик температури  $T_1$  і  $T_2$  матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)} T_1 - \varepsilon_1^t T_1 + \Delta_{(2)} T_2 + \left( \frac{\lambda^{(1)}}{hR} - \varepsilon_2^t \right) T_2 - C^{(1)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - C^{(2)} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= -f_1 - W_1^t, \\ \Delta_{(2)} T_1 - \varepsilon_2^t T_1 + \Delta_{(3)} T_2 + \left( \frac{\lambda^{(2)}}{hR} - \frac{\lambda^{(1)}}{h^2} - \varepsilon_1^t \right) T_2 - C^{(2)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - C^{(3)} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= -f_2 - W_2^t, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\Delta_{(j)} = \lambda^{(j)} \left( \partial_{11}^2 + \frac{1}{R^2} \partial_{22}^2 \right); \quad \{ \lambda^{(j)}, C^{(j)} \} = \int_{-h}^h \{ \lambda(z), c_\varepsilon(z) \} \left( \frac{z}{h} \right)^{j-1} dz, \quad (j = 1, 2, 3);$$

$$W_i^t = \int_{-h}^h w_i \left( \frac{z}{h} \right)^{i-1} dz; \quad f_i = t_2^z \varepsilon_i^t + t_2^z \varepsilon_{3-i}^t, \quad (i = 1, 2); \quad \text{причому} \quad \varepsilon_i^t = (\alpha^+ - (-1)^i \alpha^-),$$

$t_i^z = \frac{1}{2} (t_2^+ - (-1)^i t_2^-)$ ;  $\lambda(z)$  – коефіцієнт теплопровідності;  $t_2^+$ ,  $t_2^-$  – температури середовищ, що омивають відповідно поверхні  $z = h$  і  $z = -h$ ;  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  – коефіцієнти тепловіддачі з цих поверхонь;  $c_\varepsilon(z)$  – питома теплоємність;  $w_i$  – потужність теплових джерел; крапка над функцією  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  позначає частинну похідну за часом  $\tau$ .

Систему рівнянь термопружності в узагальнених переміщеннях запишемо в операторній формі:

$$\sum_{s=1}^6 L_{rs} y_s = b_r \quad (r, s = 1, 2, \dots, 6), \quad (5)$$

де  $y_j = u_j$ ;  $y_{3+j} = \gamma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Диференціальні оператори  $L_{rs}$  ( $L_{rs} = L_{sr}$ ) і вільні члени  $b_r$  мають вигляд

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \partial_{11}^2 + A_{66} / R^2 \partial_{22}^2, \quad L_{12} = (A_{12} + A_{66}) / R \partial_{12}^2, \quad L_{13} = A_{12} / R \partial_1, \\ L_{14} &= B_{11} \partial_{11}^2 + B_{66} / R^2 \partial_{22}^2, \quad L_{15} = (B_{12} + B_{66}) / R \partial_{12}^2, \\ L_{16} &= (A_{13} + B_{12} / R) \partial_1, \quad L_{22} = A_{66} \partial_{11}^2 + A_{22} / R^2 \partial_{22}^2 - K' A_{55} / R^2, \\ L_{23} &= (A_{22} + K' A_{55}) / R^2 \partial_2, \quad L_{24} = (B_{12} + B_{66}) / R \partial_{12}^2, \\ L_{25} &= B_{66} \partial_{11}^2 + B_{22} / R^2 \partial_{22}^2 + K' A_{55} / R, \quad L_{26} = (A_{23} / R + (B_{22} + K' B_{55}) / R^2) \partial_2, \\ L_{33} &= -K' A_{44} \partial_{11}^2 - K' A_{55} / R^2 \partial_{22}^2 + A_{22} / R^2, \quad L_{34} = (B_{12} / R - K' A_{44}) \partial_1, \\ L_{35} &= (B_{22} / R - K' A_{55}) / R \partial_2, \quad L_{36} = -K' B_{44} \partial_{11}^2 + (B_{22} - K' B_{55} \partial_{22}^2) / R^2 + A_{23} / R, \\ L_{44} &= D_{11} \partial_{11}^2 + D_{66} / R^2 \partial_{22}^2 - K' A_{44}, \quad L_{45} = (D_{12} + D_{66}) / R \partial_{12}^2, \\ L_{46} &= (D_{12} / R + B_{13} - K' B_{44}) \partial_1, \quad L_{55} = D_{66} \partial_{11}^2 + D_{22} / R^2 \partial_{22}^2 - K' A_{55}, \\ L_{56} &= ((B_{23} - K' B_{55}) / R + D_{22} / R^2) \partial_2, \\ L_{66} &= A_{33} + 2B_{23} / R + D_{22} / R^2 - K' D_{44} \partial_{11}^2 - K' D_{55} / R^2 \partial_{22}^2, \\ b_1 &= A_{11}^t \partial_1 T_1 + B_{11}^t / h \partial_1 T_2, \quad b_2 = A_{22}^t / R \partial_2 T_1 + B_{22}^t / (Rh) \partial_2 T_2, \\ b_3 &= A_{22}^t / R T_1 + B_{22}^t / (Rh) T_2, \quad b_4 = B_{11}^t \partial_1 T_1 + D_{11}^t / h \partial_1 T_2, \end{aligned}$$

$$b_5 = B_{22}/R \partial_2 T_1 + D_{22}^t/(Rh) \partial_2 T_2, \quad b_6 = (A_{33}^t + B_{22}^t/R) T_1 + (D_{22}^t/R + B_{33}^t)/h T_2,$$

причому

$$\{A_{ii}, B_{ij}, D_{ij}\} = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{-h}^h E(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (i=1,2,3),$$

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{-h}^h E(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (i, j=1,2,3), \quad (i \neq j),$$

$$\{A_{ii}^t, B_{ii}^t, D_{ii}^t\} = \frac{1}{1-2\nu} \int_{-h}^h E(z) \alpha^t(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (i=1,2,3),$$

$$\{A_{ii}, B_{ii}, D_{ii}\} = \frac{1}{2(1+\nu)} \int_{-h}^h E(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (i=4,5,6),$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad k' - \text{коefficient зсуву [2].}$$

За відомими переміщеннями і температурним полем зусилля і моменти в оболонці можна визначити так:

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{33} \\ M_{11} \\ M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_{13} & B_{23} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & D_{12} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 \\ (\partial_2 u_2 + u_3)/R \\ \gamma_3 \\ \partial_1 \gamma_1 \\ (\partial_2 \gamma_2 + \gamma_3)/R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11}^t \\ A_{22}^t \\ A_{33}^t \\ B_{11}^t \\ B_{22}^t \end{pmatrix} T_1 - \begin{pmatrix} B_{11}^t \\ B_{22}^t \\ B_{33}^t \\ D_{11}^t \\ D_{22}^t \end{pmatrix} \frac{T_2}{h},$$

$$\begin{pmatrix} N_{12} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{66} & B_{66} \\ B_{66} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1/R \\ \partial_1 \gamma_2 + \partial_2 \gamma_1/R \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} N_{13} \\ M_{13} \end{pmatrix} = k' \begin{pmatrix} A_{44} & B_{44} \\ B_{44} & D_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 + \partial_1 u_3 \\ \partial_1 \gamma_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} N_{23} \\ M_{23} \end{pmatrix} = k' \begin{pmatrix} A_{55} & B_{55} \\ B_{55} & D_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 + (\partial_2 u_3 - u_2)/R \\ \partial_2 \gamma_3/R \end{pmatrix}. \quad (6)$$

**2. Метод розв'язування.** Для однозначності розв'язку систем (4) і (5) необхідно задати відповідні граничні умови на механічні і температурні функції, а також початкові умови для температури. Нехай краї  $x=0$  і  $x=l$  оболонки шарнірно оперті і на них підтримується нульова температура. Тоді граничні умови будуть:

$$u_3 = u_2 = \gamma_3 = \gamma_2 = 0, \quad N_{11} = M_{11} = 0, \quad (7)$$

$$T_1 = T_2 = 0. \quad (8)$$

У початковий момент температурні характеристики задамо функціями координат:

$$T_1(x, \theta, 0) = T_1^0(x, \theta), \quad T_2(x, \theta, 0) = T_2^0(x, \theta). \quad (9)$$

Вважатимемо, що умови теплообміну на поверхнях  $z = \pm h$  однакові:  $\alpha^+ = \alpha^- = \alpha_z$ ,  $t_z^+ = t_z^- = 0$ , джерела тепла відсутні і  $c_\epsilon = \text{const}$ . Тоді, використовуючи інтегральне перетворення Лапласа і подвійне скінченне перетворення Фур'є згідно з умовами (8), (9), знайдемо розв'язок системи (4) у вигляді

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{(\rho_i - g_4) T_{1nm}^0 + g_2 T_{2nm}^0}{\rho_i - \rho_j} e^{-\rho_i \tau} \sin \frac{\pi n x}{l} \cos m \theta,$$

$$T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{(\rho_i - g_1) T_{2nm}^0 + g_3 T_{1nm}^0}{\rho_i - \rho_j} e^{-\rho_i \tau} \sin \frac{\pi n x}{l} \cos m \theta, \quad (10)$$

де

$$\rho_i = \frac{g_1 + g_4}{2} + (-1)^i \sqrt{\frac{(g_1 - g_4)^2}{4} + g_2 g_3}, \quad g_1 = \beta_1 \xi + \text{Bi} / \delta^2, \quad g_2 = \beta_2 \xi - \beta_1 / \delta, \quad g_3 = 3 \beta_2 \xi,$$

$$g_4 = 3(\beta_3 \xi + \beta_1 / \delta^2 - \beta_2 / \delta + \text{Bi} / \delta^2), \quad \xi = \mu_n^2 + m^2, \quad \mu_n = \frac{\pi n R}{l}, \quad \text{Bi} = \frac{\alpha_2 h}{\lambda_m}, \quad \delta = \frac{h}{R},$$

$$\beta_1 = \frac{\lambda_c / \lambda_m + k}{k+1}, \quad \beta_2 = \frac{(\lambda_c / \lambda_m - 1)k}{(k+1)(k+2)}, \quad \beta_3 = \frac{3(k^2 + k + 2)\lambda_c / \lambda_m + k(k^2 + 3k + 8)}{3(k+1)(k+2)(k+3)},$$

$$T_{inm}^0 = \frac{k_0}{\pi l} \int_0^l \int_{-\pi}^{\pi} T_i^0(x, \theta) \sin \frac{\pi n}{l} x \cos m \theta dx d\theta, \quad k_0 = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases} \quad (i=1,2). \quad (11)$$

Для прикладу в початковий момент задамо плоске температурне поле, яке описує кусково-неперервна функція

$$T_1^0(x, \theta) = T^* \left( 1 - \frac{(x - x_0)^2}{d^2} \right) \left( 1 - \frac{\theta^2}{\eta^2} \right) [S_-(x - x_0 + d) - S_+(x - x_0 - d)] \times$$

$$\times [S_-(\theta + \eta) - S_+(\theta - \eta)], \quad T_2^0(x, \theta) = 0, \quad (12)$$

де  $T^* = \text{const}$ ;  $2d$  і  $2\eta$  – відповідно ширина і кут області нагріву;  $(x_0, 0)$  – координати центра цієї області;

$$S_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}; \quad S_-(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{– одиничні функції.}$$

Тепер з формул (11) і (12) одержимо такі вирази для коефіцієнтів Фур'є:

$$T_{1n0}^0 = \frac{16}{3} \frac{\eta T^*}{\pi^3 n^2 (d/l)^2} \left( \frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n d}{l} - \frac{d}{l} \cos \frac{\pi n d}{l} \right) \sin \frac{\pi n x_0}{l}, \quad T_{2n0}^0 = 0,$$

$$T_{1nm}^0 = \frac{32 T^*}{\pi^3 n^2 m^2 \eta^2 (d/l)^2} \left( \frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n d}{l} - \frac{d}{l} \cos \frac{\pi n d}{l} \right) \left( \frac{1}{m} \sin m \eta - \eta \cos m \eta \right) \sin \frac{\pi n x_0}{l},$$

$$T_{2nm}^0 = 0 \quad (m \neq 0).$$

Компоненти узагальнених переміщень, викликані температурним полем (10), згідно з граничними умовами (7) знаходимо зі системи диференціальних рівнянь (5) також методом скінчених подвійних перетворень Фур'є. Зусилля і моменти визначаємо з рівнянь (6).

**3. Аналіз числових результатів.** Числові дослідження виконували для оболонки, матеріал якої – композит метал–кераміка з такими фізико-механічними властивостями [5]:

**метал:**  $\nu = 0.3$ ;  $E_m = 66.2 \text{ GPa}$ ;  $\alpha_m^t = 10.3 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ ;  $\lambda_m = 18.1 \text{ W/mK}$ ,

**кераміка:**  $\nu = 0.3$ ;  $E_c = 117 \text{ GPa}$ ;  $\alpha_c^t = 7.11 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ ;  $\lambda_c = 2.036 \text{ W/mK}$ .

Значення інших параметрів такі:  $h/R = 0.05$ ,  $l/R = 3$ ,  $\eta = \pi/6$ ,  $d/l = (R/l) \sin \eta$ ,  $x_0 = l/2$ ,  $K' = 5/6$ ,  $\text{Bi} = 0.2$ .

Для заданих параметрів обчислили значення безрозмірних прогинів  $w' = \frac{u_3}{R\alpha_m T}$ , нормальних зусиль  $N'_i = \frac{N_{ii}}{E_m h \alpha_m T}$  і згинних моментів  $M'_i = \frac{M_{ii}}{E_m h^2 \alpha_m T}$  для безрозмірного часу  $\tau' = \frac{\lambda_m \tau}{c_\epsilon h^2}$ , рівного 0,05 і 5, а також для параметра неоднорідності  $k = 1; 5$  і 20.

Рис. 1 і 2 ілюструють зміну радіальних прогинів  $w'$  уздовж твірної  $\theta = 0$  і напрямної  $x' = 0.5$  відповідно. Максимальні прогини зафіксовано в центрі області нагріву. Уздовж твірної вони монотонно зменшуються до нуля з наближенням до країв оболонки, а уздовж напрямної коливаються між додатним і від'ємним значеннями. Зі збільшенням параметра неоднорідності  $k$  (ростом частки металу в композиті) стають більшими.

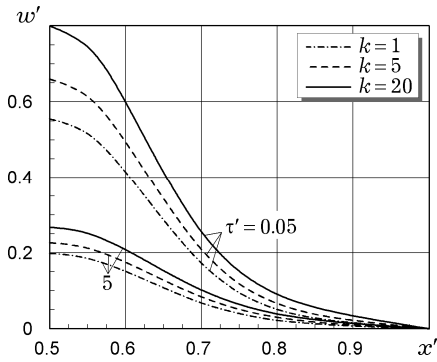


Рис. 1

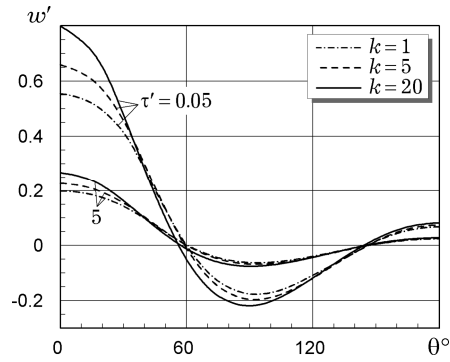


Рис. 2

Рис. 1. Залежність прогину  $w'$  від осьової координати  $x'$

Рис. 2. Залежність прогину  $w'$  від колової координати  $\theta$

Залежність нормальних зусиль  $N'_1$  і  $N'_2$  від осьової  $x'$  та колової  $\theta$  координат ілюструють рис. 3–6. Нормальні зусилля в центрі області нагрівання завжди стискальні. Зміна їх уздовж напрямної має коливний характер, а максимальні додатні значення досягаються на межі нагрітої і ненагрітої областей. Максимальні значення зусилля  $N'_2$  є більшими, ніж  $N'_1$ .

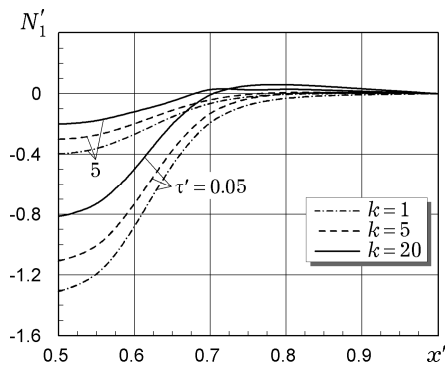


Рис. 3

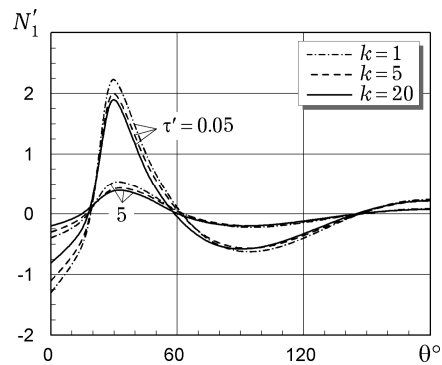


Рис. 4

Рис. 3. Залежність нормального зусилля  $N'_1$  від осьової координати  $x'$

Рис. 4. Залежність нормального зусилля  $N'_1$  від колової координати  $\theta$

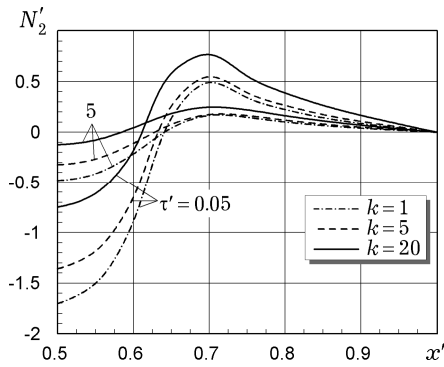


Рис. 5

Рис. 5. Залежність нормального зусилля  $N'_2$  від осьової координати  $x'$

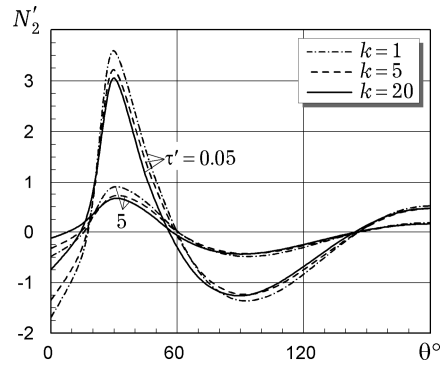


Рис. 6

Рис. 6. Залежність нормального зусилля  $N'_2$  від кулової координати  $\theta$

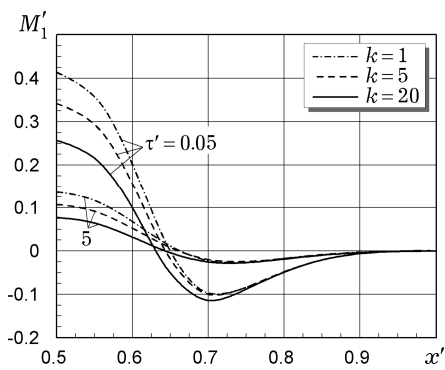


Рис. 7

Рис. 7. Залежність згинного моменту  $M'_1$  від осьової координати  $x'$

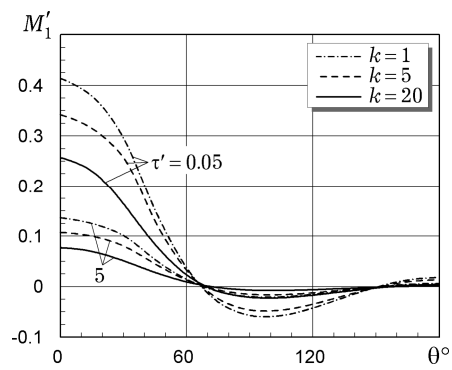


Рис. 8

Рис. 8. Залежність згинного моменту  $M'_1$  від кулової координати  $\theta$

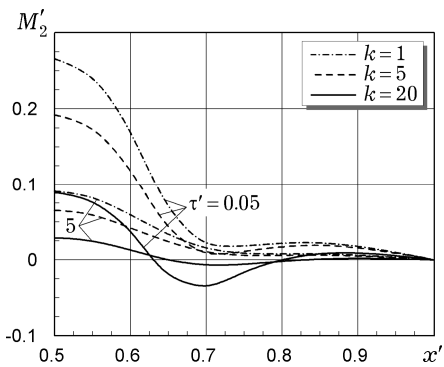


Рис. 9

Рис. 9. Залежність згинного моменту  $M'_2$  від осьової координати  $x'$

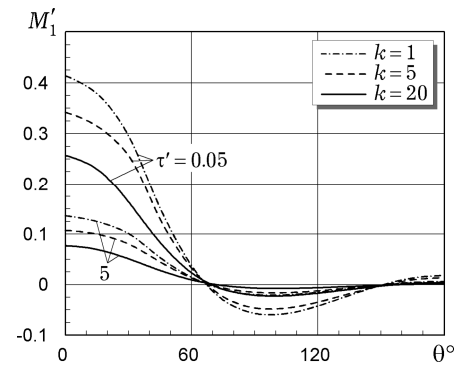


Рис. 10

Рис. 10. Залежність згинного моменту  $M'_2$  від кулової координати  $\theta$

Виявили (рис. 7–10), що характер зміни згинних моментів  $M'_1$  і  $M'_2$  уздовж твірної і напрямної, починаючи з центра області нагріву, коливний. У центрі цієї області вони мають додатні значення, які для моменту  $M'_1$  є

максимальні. Максимальні значення моменту  $M_2'$  досягаються спочатку в точці  $(0.5; 30^\circ)$  і з часом переміщуються до центра області нагріву. Загалом максимальні значення  $M_1'$  є більшими, ніж  $M_2'$ . Зі зростанням частки кераміки в композиті (зменшенням параметра  $k$ ) зусилля і моменти стають більшими, оскільки модуль пружності кераміки переважає модуль металу.

**Висновки.** На основі рівнянь уточненої теорії незв'язаної термопружності досліджено напружено-деформований стан неоднорідних за товщиною ізотропних кругових циліндричних оболонок за дії нестационарного локального нагріву. Методами перетворень Фур'є і Лапласа побудовано замкнутий розв'язок квазістатичної задачі температурних напружень для скінченної шарнірно опертої на кінцях оболонки, яка нагрівається температурним полем, заданим у початковий момент. Числовий аналіз виконано для композиту метал–кераміка, властивості якого змінюються в радіальному напрямку за степеневим законом від кераміки на зовнішній поверхні оболонки до металу – на внутрішній. Досліджено залежність радіального переміщення, нормальних зусиль і згинних моментів від осової та колової координат у різні моменти часу для різних значень параметра неоднорідності. Числові розв'язки подано у вигляді графіків.

1. Жидик У. В. Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних оболонок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 72–75.
2. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Жидик У. В., Флячок В. М. Моделювання термопружних процесів в неоднорідних анізотропних оболонках з початковими деформаціями // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2010 – 53, № 2. – С. 122–136.
3. Кушнір Р. М., Николишин Т. М., Ростун М. Й. Гранична рівновага неоднорідної за товщиною сферичної оболонки з поверхневою тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – 43, № 3. – С. 5–11.
4. Ayoubi P., Alibeigloo A. Three-dimensional transient analysis of FGM cylindrical shell subjected to thermal and mechanical loadin // J. Thermal Stresses. – 2017. – 40, No. 9. – P. 1166–1183.
5. Bahtui A., Eslami, M. R. Coupled thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells // J. Mech. Res. Communications. – 2007. – 34, No. 1. – P. 1–18.
6. Cinefra M., Carrera E., Brischetto S., Belouettar S. Thermo-mechanical analysis of functionally graded shells // J. Thermal Stresses. – 2010. – 33, No. 10. – P. 942–963.
7. Hosseini Kordkheili S. A., Naghdabadi R. Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders under axial loading // J. Thermal Stresses. – 2008. – 31, No. 1 – P. 1–17.
8. Houari M. S. A., Benyoucer S., Mechab I., Tounsi A., Bedia E. A. A Two-variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates // J. Thermal Stresses. – 2011. – 34, No. 4. – P. 315–334.
9. Malekzadeh P., Heydarpour Y., Golbahar M. R., Haghghi, Vaghefi M. Transient response of rotating laminated functionally graded cylindrical shells in thermal environment // Int. J. Pressure Vessels Piping. – 2012. – 98. – P. 43–56.
10. Noda N. Thermal stresses in functionally graded materials // J. Thermal Stresses. – 1999. – 22, No. 4-5. – P. 477–512.
11. Ootao Y., Tanigawa Y. Transient thermoelastic problem of a functionally graded cylindrical panel due to nonuniform heat supply // J. Thermal Stresses. – 2007. – 30, No. 5. – P. 441–457.
12. Pandey S., Pradyumna S. Transient stress analysis of sandwich plate and shell panels with functionally graded material core under thermal shock // J. Thermal Stresses. – 2018. – 41, No. 5. – P. 543–567.
13. Pelletier J. L., Vel S. S. An exact solution for the steady-state Thermoelastic response of functionally graded orthotropic cylindrical shells // Int. J. Solid Struct. – 2006. – 43, No. 5. – P. 1131–1158.



14. Punera D., Kant T., Desai Y. M. Thermoelastic analysis of laminated and functionally graded sandwich cylindrical shells with two refined higher order models // J. Thermal Stresses. – 2018. – 41, No. 1. – P. 54–79.
15. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. – New York: CRC Press, 2004. – 831 p.
16. Reddy J. N., Chin C. D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates // J. Thermal Stresses. – 1998. – 21, No. 6. – P. 593–626.
17. Sun J., Xu X., Lim C. W. Buckling of functionally graded cylindrical shells under combined thermal and compressive loads // J. Thermal Stresses. – 2014. – 37, No. 3. – P. 340–362.
18. Thai H. T., Kim S. E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // Compos. Struct. – 2015. – 128. – P. 70–86.
19. Zhang J. H., Li G. Z., Li S. R., Ma Y. B. DQM-based thermal stresses analysis of a functionally graded cylindrical shell under thermal shock // J. Thermal Stresses. – 2015. – 38, No. 9. – P. 959–982.

#### ТЕРМОУПРУГОЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Аналитически изучено напряженно-деформированное состояние функционально-градиентной цилиндрической оболочки конечной длины, которая нагревается плоским температурным полем. Материальные свойства оболочки являются функциями поперечной координаты. Для исследования использованы уравнения уточненной теории оболочек, которая учитывает деформацию поперечного сдвига и поперечную нормальную. Уравнения теплопроводности выведены в предположении линейного распределения температуры по толщине. Для граничных условий свободного операния квазистатическая задача несвязанной термоупругости решена методами преобразований Фурье и Лапласа. Показана важность влияния материальной неоднородности для композита металл–керамика.

**Ключевые слова:** термоупругость, цилиндрическая оболочка, функционально-градиентный материал, температурная нагрузка.

#### THERMOELASTIC ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED CYLINDRICAL SHELLS

We analyze the thermal displacements and stresses in a functionally graded thin cylindrical shell with finite length subjected to instantaneous heating. Material properties are taken to be analytical functions of the thickness coordinate. The thermoelasticity equations includes both transverse shear deformation and transverse normal strain, as well as expansional strains. Temperature distribution across the shell thickness assumed is linear. By the Fourier and Laplace transform methods the solution to quasistatic thermoelastic problem for simply supported shell is obtained. Numerical examples are given and discussed to show the significant influence of material inhomogeneity, and adopting a certain value of the inhomogeneity parameter  $k$  can optimize the thermomechanical responses.

**Keywords:** thermoelasticity, cylindrical shell, functionally graded material, thermal load.

<sup>1</sup>Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

<sup>2</sup>Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

<sup>3</sup>Укр. акад. друкарства, Львів