

**ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩ У РАМКАХ ПСЕВДОКОНТИНУУМУ КОССЕРА**

*Розвинено аналітично-числову методикку дослідження динамічного напруженого стану безмежного пластинчастого елемента з отвором у рамках псевдоконтинууму Коссера. Методика базується на застосуванні перетворення Фур'є за часом і методи граничних інтегральних рівнянь. На основі розробленої методики досліджено концентрацію динамічних кільцевих і радіальних напружень біля отворів кругової та еліптичної форм у біоматеріалах.*

**Ключові слова:** плоска нестационарна задача, псевдоконтинуум Коссера, динамічний напружений стан, біоматеріали.

**Вступ.** В останні роки велика кількість досліджень присвячена створенню нових біоматеріалів, що можуть використовуватись у клінічній хірургії, зокрема у протезуванні. Значна кількість робіт у літературі присвячена вивченню впливу розмірних ефектів на механічну поведінку при моделюванні кісткових тканин.

Значний внесок в експериментальні дослідження впливу мікроструктури людської кістки на її напружений стан виконано у роботах R. Lakes [6, 9, 10, 14].

У праці H. Ramézani [12] на основі апарату континууму Коссера для мікроструктурного вивчення пористих матеріалів людських губчастих кісток застосовано теорію мікродилатації. В [11] отримано опис ієрархічної багатомасштабної поведінки трабекулярної кістки людини за допомогою мікро-комп'ютерно-томографічного зображення.

Для вивчення впливу ультразвуку на людські тканини у [8] проведено теоретичний аналіз поширеного і відбитого полів плоскої падаючої хвилі на інтерфейсі м'яз – кістка. Результати показують, що хвильові поля впливають на мікроструктуру людської кістки.

У [7] на основі другої градієнтної моделі враховано розмірні ефекти механічної поведінки кісткових тканин. Тут також представлені деякі приклади зразків поєднання кістки біорізносорбованими штучними матеріалами (трансплантатами), які використовуються при реконструкції у хірургії.

Отже, вивчення поведінки біоматеріалів за дії імпульсного навантаження є важливим з точки зору фундаментальних досліджень і практичних застосувань в медицині.

Метою цієї роботи є розвиток методики дослідження динамічного напруженого стану виготовлених з біоматеріалів пластинчатих елементів з отворами різної форми за дії імпульсного навантаження у вигляді пружної падаючої хвилі. Аналітично-числовий підхід побудовано на основі апарату несиметричної теорії пружності зі стисненням обернуттям – псевдоконтинууму Коссера, що дає можливість враховувати вплив розмірних ефектів матеріалу.

**1. Виклад методу.** Розглянемо пружне мікропористе середовище з модулем зсуву  $G$  і густиною  $\rho$ . Дослідження проведемо для випадку, коли середовище має вигляд пластинчастого елемента з отвором, границю якого позначимо через  $L$ . Віднесемо його до декартової системи координат  $Ox_1x_2$ , яку розмістимо у центрі ваги тіла. Дослідимо динамічний напружений стан мікропористого пластинчастого елемента за дії імпульсного навантаження у вигляді падаючої пружної хвилі, потенціал якої задається у формі, аналогічній, як у [2, 3]:

\* shypra@ukr.net

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \varphi_0 f\left(\frac{x_i m_i}{a} + c_1 \frac{t}{a}\right), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1)$$

де  $\varphi_0$  – стала,  $a$  – деякий характерний розмір,  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}$  – швидкість хвилі поширення,  $\lambda$  – стала Ляме,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{m}$  – напрямний одиничний вектор,  $m_i m_i = 1$ .

Для дослідження зміни в часі динамічних напружень у біосередовищах використаємо рівняння моментної теорії пружності зі стисненим обертанням – апарат псевдоконтинууму Коссера, у яких враховано внутрішній момент кількості руху мікрочастинок [3]:

$$(\lambda + 2G) \text{grad div } \mathbf{u} + \text{rot rot} \left( \frac{B}{4} \Delta \mathbf{u} - G \mathbf{u} \right) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

де  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u_j(\mathbf{x}, t)\}$ ,  $j = 1, 2$ , – вектор переміщень,  $B$  – стала, що відповідає мікроструктурі матеріалу. Граничні умови задачі записуються у вигляді

$$\sigma_n|_L = \sigma_n^\varphi, \quad \tau_{sn}|_L = \tau_{sn}^\varphi, \quad (3)$$

де  $\sigma_n^\varphi$ ,  $\tau_{sn}^\varphi$  – напруження на границі отвору від дії падаючої хвилі, що визначаються на основі (1),  $\mathbf{n}$  – вектор нормалі до границі.

Застосовуючи до рівняння (2) перетворення Фур'є за часовою змінною  $t$ :

$$\tilde{f}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega t} dt,$$

отримаємо аналоги рівнянь усталених коливань із циклічною частотою  $\omega$ :

$$(\lambda + G) \partial_j \tilde{\theta} + \frac{B}{4} \Delta \partial_j \tilde{\theta} - \frac{B}{4} \Delta \Delta \tilde{u}_j + G \Delta \tilde{u}_j + \omega^2 \tilde{u}_j = 0,$$

де  $\tilde{u}_j$  – Фур'є-зображення переміщень,  $\tilde{\theta} = \partial_m \tilde{u}_m$ . Застосовуючи перетворення Фур'є до граничних умов (3), отримаємо

$$\tilde{\sigma}_n|_L = \tilde{\sigma}_n^\varphi, \quad \tilde{\tau}_{sn}|_L = \tilde{\tau}_{sn}^\varphi. \quad (4)$$

Використовуючи метод граничних інтегральних рівнянь в області Фур'є-зображень для першої основної задачі потенціальне зображення загального розв'язку виберемо у вигляді [5]

$$\tilde{u}_k(\mathbf{x}, \omega) = \int_L p_j(\mathbf{x}^0, \omega) U_{jk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0, \omega) ds, \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

де  $p_1$ ,  $p_2$  – невідомі потенціальні функції. Інтегрування вздовж границі проводиться за змінними  $\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, x_2^0\}$ .

У рамках моментного псевдоконтинууму Коссера представлення для зображень  $U_{jk}^*$  побудуємо з урахуванням умов випромінювання Зомерфельда у вигляді суми:

$$U_{jk}^* = U_{jk}^{*(cl)} + U_{jk}^{*(M)},$$

де  $U_{jk}^{*(cl)}$  – фундаментальний тензор переміщень у рамках класичної теорії пружності [5]:

$$U_{jk}^{*(cl)} = \frac{1}{2\pi G} \left( K_0(\mathbf{x}_2 r) \delta_{jk} + \frac{1}{x_2^2} \partial_k \partial_j (K_0(\mathbf{x}_1 r) - K_0(\mathbf{x}_2 r)) \right),$$

а  $U_{jk}^{*(M)}$  – фундаментальний тензор, що враховує вплив оберально-зсувних деформацій у псевдоконтинуумі Коссера [4]:

$$U_{jk}^{*(M)} = -\frac{D}{2\pi G} \Delta(\Delta\delta_{jk} - \partial_k\partial_j)D_m K_0(x_m r), \quad j, k = 1, 2,$$

де  $x_m = i\omega/c_m$ ,  $m = 2, 3, 4$ , – хвильові числа,  $K_0(r)$  – модифікована функція Бесселя третього роду нульового порядку (функція Макдональда),  $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$  – відстань,

$$D = \frac{c_3^2 c_4^2}{\omega^2(c_3^2 + c_4^2)}, \quad D_1 = \frac{c_2^2 c_3^2}{\omega^2(c_3^2 - c_2^2)} + \frac{c_2^2 c_4^2}{\omega^2(c_2^2 + c_4^2)},$$

$$D_2 = \frac{c_2^2 c_3^2}{\omega^2(c_2^2 - c_3^2)}, \quad D_3 = -\frac{c_2^2 c_4^2}{\omega^2(c_2^2 + c_4^2)},$$

$D_i$  – сталі,  $c_2 = \sqrt{G/\rho}$  – швидкість хвиль зсуву,  $c_3 = \sqrt{c_2(\sqrt{c_2^2 + 4\ell^2\omega^2} + c_2)/2}$ ,  $c_4^2 = \sqrt{c_2(\sqrt{c_2^2 + 4\ell^2\omega^2} - c_2)/2}$  – швидкості хвиль обертання-зсуву [3],  $\ell$  – масштабний фактор,  $\ell^2 = B/(4G)$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Для виконання умов (4) на границі отвору розраховуємо напруження за формулами, що є аналогом закону Гука у моментному континуумі Коссера [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} &= \lambda e_{rr}\delta_{kl} + (2G + \alpha)e_{kl} + \alpha\epsilon_{klm}(r_m - \varpi_m), \\ \mu_{kl} &= \beta\varpi_{r,r}\delta_{kl} + \gamma\varpi_{k,\ell} + \varepsilon\varpi_{\ell,k}, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\sigma_{kl}$  – силові напруження,  $e_{kl} = (u_{k,\ell} + u_{\ell,k})/2$ ,  $\epsilon_{klm}$  – символ Леві-Чівіта,  $r_k = (\epsilon_{klm}u_{m,\ell})/2$ ,  $\mu_{kl}$  – моментні напруження,  $\varpi = \text{rot } \mathbf{u}/2$  – мікроповорот,  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  – пружні сталі матеріалу у континуумі Коссера. Будемо вважати, що для псевдоконтинууму Коссера  $B = \gamma + \varepsilon$  [3].

Підставляючи зображення (5) у формули (6), отримаємо інтегральні представлення виду:

$$\tilde{\sigma}_n = \int_L (f_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)p_j) ds, \quad \tilde{\tau}_{sn} = \int_L (g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)p_j) ds, \quad (7)$$

де  $f_j, g_j$  – відомі функції, що містять нерегулярні складові. Виділивши ці складові у підінтегральних функціях і здійснивши граничний перехід у залежностях (7), отримаємо систему інтегральних рівнянь для визначення невідомих на границі функцій [4]:

$$\begin{aligned} \text{Re}(q)/2 + \mathbf{V.P.} \int_L (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)q d\zeta + f_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)\bar{q} d\bar{\zeta}) &= \tilde{\sigma}_n^\varphi, \\ \text{Im}(q(1 - (\ell\omega/c_2)^2))/2 + \mathbf{V.P.} \int_L (g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)q d\zeta + g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)\bar{q} d\bar{\zeta}) &= \tilde{\tau}_{sn}^\varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $p ds = -iq d\zeta$ ,  $p = p_1 + ip_2$  – невідома функція. Тут інтеграли розуміємо у сенсі головного значення.

Числові розрахунки невідомих на границі функцій проводилися чисельно на основі методики, розвинутої у [13], що ґрунтується на сумісному використанні методу механічних квадратур і методу колокації.

Для дослідження динамічного напруженого стану біосередовищ за дії імпульсного навантаження у вигляді падаючої пружної хвилі розрахунок кільцевих напружень на границі отвору та радіальних напружень у плас-

тинчастому елементі проводимо за формулами

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_\theta &= \frac{\nu}{2} \operatorname{Im} \left( p \frac{ds}{d\zeta} \right) + \mathbf{V.P.} \int_L (h_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p_j ds) + \bar{\sigma}_\theta^0, \\ \bar{\sigma}_r &= \mathbf{V.P.} \int_L (v_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p_j ds),\end{aligned}$$

де  $h_j, v_j$  – відомі функції [4],  $\bar{\sigma}_\theta^0$  – відомі напруження від падаючої хвилі.

Оригінали напружень знаходимо з використанням дискретного оберненого перетворення Фур'є:

$$\sigma(T_k) = \frac{1}{T} \left( \sum_{n=-K}^{K-1} \tilde{\sigma}(\omega_n) \exp \left( 2\pi i \frac{nk}{K} \right) - \sum_{n=-K}^{K-1} \tilde{\sigma}(\omega_n) \right), \quad (9)$$

де  $K$  – кількість елементів дискретної вибірки,  $\omega_n = 2\pi n / T$  – частоти вибірки,  $T_k = kT / K$ ,  $k = -K, \dots, K-1$ , – фіксовані моменти часу. Для оптимізації числових розрахунків представлення (9) обчислювали на основі алгоритму швидкого дискретного перетворення Фур'є при  $K = 2^m$ ,  $m$  – ціле додатне число.

**2. Результати досліджень.** У [7] наведено результати досліджень для матеріалу людської кістки (модуль Юнга  $E = 17$  ГПа, стала, що відповідає мікроструктурі матеріалу  $B = 5.07 \cdot 10^6$  Н) та біоматеріалу ( $E = 13.6$  ГПа,  $B = 5.67 \cdot 10^6$  Н), що може бути використаний для реконструкції, які мають однакову густину  $\rho = 1800$  кг/м<sup>3</sup>, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.34$ . На основі розробленого підходу дослідимо розподіл динамічних кільцевих і радіальних напружень у пластинчастих елементах з отворами кругової та еліптичної форм.

При дослідженні динамічного напруженого стану модуляцію імпульсу за часом прийматимемо у формі слабкої ударної хвилі [1]:

$$f_*(\tau) = p_* \tau^{n_*} e^{-\alpha_* \tau}, \quad \tau > 0, \quad (10)$$

та вигляді квазімонохроматичного імпульсу [1]:

$$f_*(\tau) = \sin(\omega_* \tau), \quad 0 < \tau < \tau_0, \quad f(\tau) = 0, \quad \tau > \tau_0, \quad (11)$$

де  $p_*, n_*, \alpha_*, \omega_*$  – сталі,  $\tau = c_1 t / a$  – безрозмірний часовий параметр.

З урахуванням формул (10), (11) в області Фур'є-зображень потенціал падаючої у напрямі  $Ox_1$  хвилі матиме вигляд:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, \omega) = \varphi_0 \frac{a}{c_1} \tilde{f}_* \left( \frac{\omega a}{c_1} \right) e^{i\omega x_1 / c_1}, \quad \tilde{\psi}(\mathbf{x}, \omega) = 0,$$

де  $\tilde{f}_*(\omega)$  – Фур'є-зображення модуляції імпульсу (10), (11).

Для випадку пластинчастого елемента з *круговим отвором* радіуса  $R$  на рис. 1 наведено результати числових розрахунків відносних динамічних кільцевих напружень  $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / \sigma_0$  на границі отвору (рис. 1а) і відносних радіальних напружень  $\bar{\sigma}_r = \sigma_r / \sigma_0$  (рис. 1б) у перерізах, що віддалені на відстань  $\delta = 5R$  та  $\delta = 10R$ . Числові розрахунки виконано для випадку, коли падаюча хвиля задається у формі (10) при  $p_* = 185$ ,  $\alpha_* = 10$ ,  $n_* = 2$ ,  $\sigma_0 = 1$  ГПа. При числових розрахунках для матеріалу людської кістки та біоматеріалу [7] приймали  $a = 10^3$  м,  $R = 10^{-5}$  а.

На рис. 1 суцільним лініям відповідають напруження  $\bar{\sigma}_\theta$  у біоматеріалі, а штриховим – напруження у матеріалі людської кістки. Значення динаміч-

них напружень  $\bar{\sigma}_\theta^{cl}$ , розраховані на основі рівнянь класичної теорії пружності без урахування впливу обертально-зсувних деформацій, наведено на рис. 1а пунктирними лініями. Значення безрозмірного часового параметра  $\tau$  вибрано для матеріалу людської кістки.

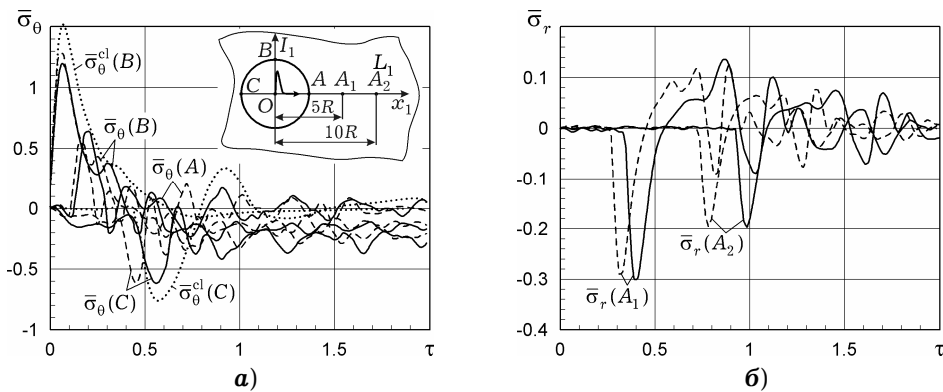


Рис. 1

Числові розрахунки показали, що при врахуванні впливу обертально-зсувних деформацій динамічні напруження у біоматеріалі та матеріалі людської кістки є практично однаковими. Проте швидкість поширення хвиль у біоматеріалі є меншою у 1.22 рази, ніж у матеріалі людської кістки.

На рис. 1а бачимо, що максимальні значення кільцевих напружень виникають у точці  $B$  на границі отвору. У біоматеріалі вони практично співпадають з напруженнями, що виникають у матеріалі людської кістки: у 1.07 раз менші. Динамічні напруження, розраховані без урахування впливу обертально зсувних деформацій, у 1.25 рази більші, ніж значення, отримані на основі розробленого підходу. Крім того, використання рівнянь моментного псевдоконтинууму Коссера до розрахунку напруженого стану біоматеріалів дає можливість враховувати наявність збурень у досліджуваних елементах після проходження пружної хвилі, що підтверджується числовими результатами: коливний характер розподілу напружень після проходження імпульсу хвилі, який не враховується на основі рівнянь класичної теорії пружності.

Значення відносних кільцевих напружень у точці  $A$  на границі отвору у 1.14 рази більші в біоматеріалі, ніж у матеріалі людської кістки. Напруження, які виникають у точці  $C$  на границі отвору пластинчастого елемента, є однаковими для обох досліджуваних матеріалів.

Додатковим фактом достовірності розробленого підходу є те, що відносні динамічні радіальні напруження є нульовими до досягнення падаючою хвилею відповідного перерізу (рис. 1б). Цей факт узгоджується з основними принципами хвильової механіки.

Використовуючи розроблений підхід, розрахуємо розподіл динамічних кільцевих напружень  $\bar{\sigma}_\theta$  на границі отвору пластинчастого елемента, виготовленого з біоматеріалу [7], за дії квазімонохроматичного імпульсу, що задається у формі (11) при  $\omega_* = 4$ . На рис. 2 наведено результати розрахунків для випадку *кругового* (штрихові лінії) та *еліптичного* отворів з відношенням півосей  $\varepsilon = 2$  (суцільні лінії) у точках  $A$ ,  $B$  і  $C$  границі. Числові розрахунки виконано для випадку, коли більша піввісь еліптичного отвору, яка розміщена вздовж осі  $Ox_1$ , дорівнює  $R$ .

На рис. 2 бачимо, що за дії квазімонохроматичного імпульсу максимальні значення відносних кільцевих напружень  $\bar{\sigma}_\theta$  у точці  $B$  для випадку кругового отвору в 1.29 рази перевищують відповідні значення для отвору еліптичної форми. Вони виникають протягом першого періоду імпульсу

хвилі. При проходженні другого періоду імпульсу значення напружень є однаковими для обох розглянутих випадків.

У точці С максимальні значення відносних динамічних кільцевих напружень  $\bar{\sigma}_\theta$  для випадку еліптичного отвору в 1.69 рази більші, ніж для кругового. При цьому максимальні значення напружень на границі кругового отвору виникають при проходженні першого періоду імпульсу хвилі, а на границі еліптичного отвору – другого періоду імпульсу.

У точці С на границі значення відносних кільцевих напружень більші у 2.76 рази для еліптичного отвору від відповідних значень для кругового отвору при проходженні першого періоду імпульсу хвилі.

Числові розрахунки показали, що при зростанні ексцентриситету еліптичного отвору коливність розподілу динамічних напружень зменшується.

**Висновки.** Сформульовано задачу розсіяння імпульсів пружних хвиль отвором у двовимірній області, рух якої описується в рамках псевдоконтинууму Коссера. Запропоновано методологію розрахунку напружено-деформованого стану тіла, яка враховує вплив обертально-зсувних деформацій мікрочастинок середовища. Достовірність розробленого підходу забезпечується узгодженістю отриманих результатів з основними принципами поширення хвиль у пружних тілах.

На основі розробленої методики досліджено розподіл динамічних напружень у пластинчастих елементах з отворами кругової та еліптичної форми, що виготовлені з біоматеріалів і матеріалів людської кістки. Числові розрахунки показали, що динамічні напруження, розраховані з урахуванням обертально-зсувних деформацій, є менші на 20÷25%, ніж значення, отримані на основі рівнянь класичної теорії пружності.

Запропонована методика може бути використана при розробці матеріалів, що використовуються при реконструкції у хірургії.

1. Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В. Динамічна концентрація напружень в околі заглибленого тонкого прямолінійного включення низької жорсткості в умовах антиплоскої деформації // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – 50, № 1. – С. 136–139.
2. Поддубняк А. П. Эхо-сигнал от упругой сферы при воздействии остронаправленного звукового импульса // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1979. – Вып. 9. – С. 92–95.
3. Савин Г. Н., Шульга Н. А. Динамическая плоская задача моментной теории упругости // *Прикл. механика.* – 1967. – 3, № 6. – С. 1–7.  
Te same: Savin G. N., Shulga N. A. Dynamic plane problem of the moment theory of elasticity // *Soviet Appl. Mech.* – 1967. – 3, No. 6. – P. 1–4.  
<https://doi.org/10.1007/BF01262150>.
4. Шваб'юк В. І., Мікуліч О. А., Шваб'юк В. В. Напружений стан пінистих середовищ із тунельними порожнинами при нестационарному динамічному навантаженні // *Проблеми прочності.* – 2017. – № 6. – С. 99–110.  
Te same: Shvabyuk V. I., Mikulich O. A., Shvabyuk V. V. Stress state of foam media with tunnel openings under non-stationary dynamic loading // *Strength Mater.* – 2017. – 49, No. 6. – P. 818–828.  
– <https://doi.org/10.1007/s11223-018-9927-3>.
5. Bonnet M. Equations intégrales et éléments de frontière. Application en mécanique des solides et des fluides. – Paris: CNRS Éditions; Éditions EYROLLES, 1995. – vii+316 p.

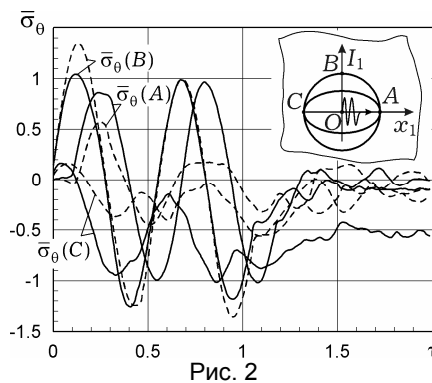


Рис. 2

6. Buechner P. M., Lakes R. S. Size effects in the elasticity and viscoelasticity of bone // Biomech. Model. Mechanobiol. – 2003. – **1**, No. 4. – P. 295–301.  
https://doi.org/10.1007/s10237-002-0026-8.
7. Giorgio I., Andraus U., dell'Isola F., Lekszycki T. Viscous second gradient porous materials for bones reconstructed with bio-resorbable grafts // Extreme Mech. Lett. – 2017. – **13**. – P. 141–147. – https://doi.org/10.1016/j.eml.2017.02.008.
8. Hsia S.-Y., Chiu S.-M., Cheng J.-W. Wave propagation at the human muscle-compact bone interface // Theoret. Appl. Mech. – 2006. – **33**, No. 3. – P. 223–243.
9. Lakes R. S. Dynamical study of couple stress effects in human compact bone // Trans. ASME. J. Biomech. Eng. – 1982. – **104**, No. 1. – P. 6–11.  
– doi:10.1115/1.3138308.
10. Lakes R. S., Yoon H. S., Katz J. L. Slow compressional wave propagation in wet human and bovine cortical bone // Science. – 1983. – **220**, No. 4596. – P. 513–515.  
– doi: 10.1126/science.6836296.
11. Ramézani H., El-Hraiech A., Jeong J., Benhamou C. Size effect method application for modeling of human cancellous bone using geometrically exact Cosserat elasticity // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2012. – **237-240**. – P. 227–243.  
– https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.05.002.
12. Ramézani H., Jeong J. Micro-dilatation theory application to the spongy bones: Theoretical aspects and numerical modeling // Conference: 22ème Congrès Français de Mécanique (at Lyon, France, 2015). – DOI: 10.13140/RG.2.1.1854.6409.
13. Shvabyuk V., Sulym H., Mikulich O. Stress state of plate with incisions under the action of oscillating concentrated forces // Acta Mechanica et Automatica. – 2015. – **9**, No. 3. – P. 140–144. – https://doi.org/10.1515/ama-2015-0023.
14. Yang J. F. C., Lakes R. S. Transient study of couple stress in compact bone: torsion // Trans. ASME. J. Biomech. Eng. – 1981. – **103**, No. 1. – P. 275–279.

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МИКРОПОРИСТЫХ СРЕД В РАМКАХ ПСЕВДОКОНТИНУУМА КОССЕРА

Развита аналитически-числовая методика исследования динамического напряженного состояния бесконечного пластинчатого элемента с отверстием в рамках псевдоконтинуума Коссера. Методика базируется на применении преобразования Фурье по времени и методе граничных интегральных уравнений. На основе разработанной методики исследовано концентрацию динамических кольцевых и радиальных напряжений возле отверстий круговой и эллиптической форм в биоматериалах.

**Ключевые слова:** плоская нестационарная задача, псевдоконтинуум Коссера, динамическое напряжённое состояние, биоматериалы.

#### INVESTIGATION OF DYNAMIC STRESS STATE OF MICRO-POROUS MEDIA IN THE FRAMEWORK OF THE COSSERAT PSEUDO-CONTINUUM

The analytical-numerical method of studying the dynamic stressed state of an unbounded laminar element with an hole within the framework of the Cosserat pseudo-continuum is developed. The method is based on the application of the Fourier transform over time and the method of boundary integral equations. On the basis of the proposed method, the concentration of dynamic circumferential and radial stresses in biomaterials near the holes of circular and elliptic forms are studied.

**Key words:** plane non-stationary problem, Cosserat pseudocontinuum, dynamic stress state, biomaterials.

Луцьк. нац. техн. ун-т, Луцьк

Одержано  
10.10.17