

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ. II. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Для осесимметрично нагруженных кольцевых пластин, жестко закрепленных на одной кромке и статически нагруженных на другой кромке, а также для прямоугольных удлиненных пластин при цилиндрическом изгибе разработан упрощенный вариант уточненной теории (модельные задачи), сложность реализации которого сопоставима со сложностью теорий Рейсснера и Редди. Проведены конкретные расчеты термоупругопластического изгиба таких пластин при разных уровнях теплового воздействия. Показано, что для относительно толстых пластин ни классическая теория, ни традиционные неклассические теории Рейсснера и Редди не гарантируют получения надежных результатов по определению прогиба даже в рамках грубой 10%-й точности. Выявлено, что при изгибе слоистых металлокомпозитных пластин в условиях повышенных температур в окрестности их опорных кромок возникают ярко выраженные краевые эффекты, характеризующие срез этих конструкций в поперечном направлении. Традиционные же теории, имеющие низкие порядки аппроксимаций поперечных сдвигов, не позволяют выявить эти локальные эффекты, что и приводит к их весьма грубой точности. Показано, что для адекватного расчета термоупругопластического изгиба относительно тонких пластин, а также относительно толстых пластин, материалы фаз композиции которых являются линейно-упругими, вполне достаточно использовать теорию Редди.

Ключевые слова: слоистая композитная пластина, регулярная структура, термоупругопластичность деформационного типа, изгибаемая пластина, теория Рейсснера, теория Редди, уточненная теория изгиба.

В настоящей работе продолжается исследование, опубликованное в [14], где сформулированы граничные задачи термоупругопластического изгиба слоистых пластин регулярной структуры при учете их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам в рамках уточненных теорий, из которых в первом приближении получаются соотношения традиционной неклассической теории Редди, и где проведен анализ публикаций по этой тематике. В [14] показано, что сложность реализации теории Редди такая же, как у теории Рейсснера, но в рамках последней теории нельзя удовлетворить никакие граничные условия на лицевых поверхностях конструкции; уточнение же теории Редди приводит к существенному усложнению двумерных граничных задач изгиба слоистых пластин регулярной структуры. Однако в [14] не были проведены сравнения решений, полученных по традиционным неклассическим теориям Рейсснера и Редди и по уточненным теориям.

В связи с этим в данной работе рассматриваются модельные задачи, для которых соотношения уточненных теорий имеют сложность, сопоставимую со сложностью реализации теорий Рейсснера и Редди, а также проводится сравнительный анализ решений, полученных на базе этих теорий и более точных соотношений как при термоупругом, так и термоупругопластическом деформировании изгибаемых пластин.

1. Модельные задачи. Для демонстрации необходимости уточнения традиционных теорий (Кирхгофа, Рейсснера и Редди) исследуем одномерные задачи изгиба слоистых пластин регулярной структуры, имеющих постоянную толщину $2h$ и ограниченных кромками с координатами r_0 , r_1 ($r_0 \leq x_1 \leq r_1$), т.е. рассмотрим либо цилиндрический изгиб прямоугольных

* lab4nemir@rambler.ru

удлиненных пластин, сориентированных вдоль оси Ox_2 , либо осесимметричный изгиб кольцевых пластин. В последнем случае положения точек пластины задаются в цилиндрической системе координат x_i , где x_1 – полярный радиус, x_2 – полярный угол, x_3 – осевая координата. Нагрузки и закрепления пластин не зависят от переменной x_2 , внешние силы в направлении Ox_2 также отсутствуют. Следовательно, решения таких задач не зависят от переменной x_2 и, кроме того, имеют место тождественные равенства:¹

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_3) &\equiv 0, & \varepsilon_{12}(x_1, x_3) &= \varepsilon_{23}(x_1, x_3) \equiv 0, \\ \sigma_{12}(x_1, x_3) &= \sigma_{23}(x_1, x_3) \equiv 0. \end{aligned} \quad (27)$$

В случае цилиндрического изгиба имеет место еще одно равенство:

$$\varepsilon_{22}(x_1, x_3) \equiv 0.$$

Для простоты рассмотрим случай, когда на лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$ касательные нагрузки отсутствуют: $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$, $i = 1, 2$. Поэтому из уравнений (17) в рамках теории Редди и её уточнений (при $\beta = 1$) получаем

$$\varepsilon_{13}^{(\pm)} = \varepsilon_{23}^{(\pm)} \equiv 0. \quad (28)$$

Функции $\varepsilon_{13}(x_1, x_3)$, $u_1(x_1, x_3)$, $\varepsilon_{11}(x_1, x_3)$ по-прежнему определяются равенствами (1), (3), (4), а деформация ε_{22} в рассматриваемых одномерных случаях с учетом (2), (3), (28) выражается так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}(x_1, x_3) &= \delta \frac{u_1}{x_1} = \delta \left[\frac{u_1^0}{x_1} - \frac{x_3}{x_1} \frac{du_3^0}{dx_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \frac{\varepsilon_{13}^{(k)}}{x_1} \right], \quad |x_3| \leq h. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь и далее δ – параметр переключения: $\delta = 0$ соответствует случаю цилиндрического изгиба прямоугольной удлиненной пластины, $\delta = 1$ – случаю осесимметричного изгиба кольцевой пластины.

На основании соотношений (9) с учетом (1), (4), (27)–(29) получим выражения для осредненных напряжений в композиции слоистой пластины:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}(x_1, x_3) &= b_{i1}(x_1, x_3) \left[\frac{du_1^0}{dx_1} - x_3 \frac{d^2 u_3^0}{dx_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \frac{d\varepsilon_{13}^{(k)}}{dx_1} \right] + \delta b_{i2}(x_1, x_3) \left[\frac{u_1^0}{x_1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_3}{x_1} \frac{du_3^0}{dx_1} + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \frac{\varepsilon_{13}^{(k)}}{x_1} \right] + p_{ii}, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_{13}(x_1, x_3) &= b_{44}(x_1, x_3) \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \varepsilon_{13}^{(k)}(x_1), \quad |x_3| \leq h, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1, \end{aligned} \quad (30)$$

Уравнения равновесия элемента слоистой композиции в рассматриваемых

¹ В настоящем исследовании для удобства изложения продолжается сквозная нумерация формул, начатая в [1].

случаях изгиба пластин с учетом (9), (27), (28) имеют вид [7]

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_3 \sigma_{13} + \delta \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{x_1} = -X_1(x_1, x_3), \quad (31)$$

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_3 \sigma_{33} + \delta \frac{\sigma_{13}}{x_1} = -X_3(x_1, x_3), \quad |x_3| \leq h, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1. \quad (32)$$

Далее при $\delta = 1$ будем рассматривать частный случай закрепления кольцевой пластины: одна из кромок (например, внутренняя) жестко закреплена (т.е. при $x_1 = r_0$ выполняются равенства (20), (21) при $u_{i0} = 0$, $i = 1, 2, 3$), а на другой кромке (например, внешней) заданы статические граничные условия (19) (при $x_1 = r_1$, $\gamma = 0$ и $\sigma_{n\tau} = 0$). В этом случае (а также при цилиндрическом изгибе прямоугольных удлиненных пластин ($\delta = 0$)) можно построить упрощенный вариант уточненной теории, сложность реализации которого сопоставима с теориями Рейснера и Редди [13]. С этой целью проинтегрируем по толщине пластины уравнения (31) с весами 1 и x_3 , а уравнение (32) – с весами x_3^ℓ . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{11} + \delta \frac{F_{11} - F_{22}}{x_1} &= -X_1^{(0)}(x_1), \\ \partial_1 M_{11} + \delta \frac{M_{11} - M_{22}}{x_1} &= F_{13} - X_1^{(1)}(x_1), \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(\delta)} \partial_1 (r(\delta) M_{13}^{(\ell)}) &= -X_3^{(\ell)} + \ell \int_{-h}^h x_3^{\ell-1} \sigma_{33} dx_3 - \\ &- h^\ell [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^\ell \sigma_{33}^{(-)}], \quad 0 \leq \ell \leq K, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$r(\delta) = \begin{cases} 1, & \delta = 0, \\ x_1, & \delta = 1, \end{cases} \quad (35)$$

F_{ii} , M_{ii} – мембранные усилия и изгибающие моменты; $F_{13} \equiv M_{13}^{(0)}$ – поперечная сила; $M_{13}^{(\ell)}$, $\ell \geq 1$, – математические моменты высших порядков, имеющие тот же смысл, что и в (11), (14). В уравнениях (33), (34) следует учесть соотношения (15) и рассуждения, касающиеся аппроксимации (16).

Если на кромке $x_1 = r_*$ заданы статические граничные условия (19), где $\gamma = 0, \pi$ и $\sigma_{n\tau} = 0$, то по аналогии с (33), (34) получим (см. (22))

$$F_{11}(r_*) = F_{nn}, \quad M_{11}(r_*) = M_{nn}, \quad (36)$$

$$M_{13}^{(\ell)}(r_*) = \cos \gamma M_{n3}^{(\ell)}, \quad 0 \leq \ell \leq K, \quad \gamma = \begin{cases} 0, & x_1 = r_1, \\ \pi, & x_1 = r_0, \end{cases} \quad (37)$$

где F_{nn} , M_{nn} – нормальное мембранное усилие и изгибающий момент, заданные на рассматриваемой кромке; $M_{n3}^{(\ell)}$ определены в (23).

Используя соотношения (30), вычислим силовые факторы, входящие в уравнения (33), (34), (36), (37):

$$F_{ii}(x_1) = a_{i1}^{(0)}(x_1) \frac{du_1^0}{dx_1} - a_{i1}^{(1)}(x_1) \frac{d^2 u_3^0}{dx_1^2} + 2 \sum_{k=0}^K c_{i1}^{(0,k)}(x_1) \frac{d\varepsilon_{13}^{(k)}}{dx_1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \delta \left[a_{i2}^{(0)}(x_1) \frac{u_1^0}{x_1} - a_{i2}^{(1)}(x_1) \frac{1}{x_1} \frac{du_3^0}{dx_1} + 2 \sum_{k=0}^K c_{i2}^{(0,k)}(x_1) \frac{\varepsilon_{13}^{(k)}}{x_1} \right] + P_{ii}^{(0)}(x_1), \\
M_{ii}(x_1) = & a_{i1}^{(1)}(x_1) \frac{du_1^0}{dx_1} - a_{i1}^{(2)}(x_1) \frac{d^2 u_3^0}{dx_1^2} + 2 \sum_{k=0}^K c_{i1}^{(1,k)}(x_1) \frac{d\varepsilon_{13}^{(k)}}{dx_1} + \\
& + \delta \left[a_{i2}^{(1)}(x_1) \frac{u_1^0}{x_1} - a_{i2}^{(2)}(x_1) \frac{1}{x_1} \frac{du_3^0}{dx_1} + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{k=0}^K c_{i2}^{(1,k)}(x_1) \frac{\varepsilon_{13}^{(k)}}{x_1} \right] + P_{ii}^{(1)}(x_1), \quad i = 1, 2, \quad (38)
\end{aligned}$$

$$M_{13}^{(\ell)}(x_1) = \sum_{k=0}^K g_{44}^{(\ell,k)}(x_1) \varepsilon_{13}^{(k)}(x_1), \quad 0 \leq \ell \leq K, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1, \quad (39)$$

где коэффициенты $a_{ij}^{(m)}$, $c_{ij}^{(m,k)}$, $g_{44}^{(\ell,k)}$ и функции $P_{ii}^{(m)}$ определены в (12).

Согласно равенствам (15), (16), правая часть уравнения (34) известна и зависит только от переменной x_1 , поэтому при каждом ℓ соотношение (34) с учетом (35) является простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно функции $M_{13}^{(\ell)}$, для однозначного интегрирования которого используется соответствующее граничное условие, например, (37). В случае цилиндрического изгиба прямоугольной удлиненной пластины, шарнирно опертой вдоль длинных кромок, граничное условие, аналогичное (37), также можно получить при некоторых видах нагружения. Так, в случае, изображенном на рис. 1 (где $r_0 = 0$, $r_1 = L$,

$\sigma_{33}^{(-)} \equiv 0$ и $\sigma_{33}^{(+)} = -q = \text{const}$), в силу симметрии нагружения и опирания пластины в центральном её сечении имеем $\sigma_{13}(L/2, x_3) = 0$, $|x_3| \leq h$. Следовательно, в сечении $x_1 = L/2$, со-

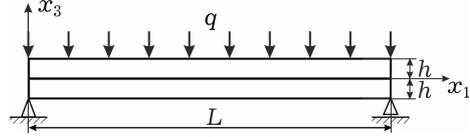


Рис. 1

гласно (12), $M_{13}^{(\ell)}(L/2) = 0$. Это равенство вместо (37) и является требуемым краевым условием для уравнения (34) с учетом (35) при $\delta = 0$.

Если краевая задача (34), (37) для каждого ℓ уже решена (т.е. $M_{13}^{(\ell)}(x_1)$ известны на текущей итерации), то в каждой точке $x_1 \in [r_0, r_1]$ равенства (39) образуют замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\varepsilon_{13}^{(k)}(x_1)$, из которой можно определить текущие приближения этих функций. После этого в соотношениях (38) неизвестными остаются только функции $u_1^0(x_1)$ и $u_3^0(x_1)$. Для получения соответствующих им разрешающих уравнений выражения (38) нужно подставить в уравнения (33). Тогда получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{F}_{11}}{dx_1} - \delta \left[a_{21}^{(0)} \frac{du_1^0}{dx_1} - a_{21}^{(1)} \frac{d\theta}{dx_1} + a_{22}^{(0)} \frac{u_1^0}{x_1} - a_{22}^{(1)} \frac{\theta}{x_1} \right] = \\
= -r(\delta) X_1^{(0)}(x_1) + 2\delta \sum_{k=0}^K \left(c_{21}^{(0,k)} \frac{d\varepsilon_{13}^{(k)}}{dx_1} + c_{22}^{(0,k)} \frac{\varepsilon_{13}^{(k)}}{x_1} \right) + \delta P_{22}^{(0)}(x_1), \\
\frac{d\bar{M}_{11}}{dx_1} - \delta \left[a_{21}^{(1)} \frac{du_1^0}{dx_1} - a_{21}^{(2)} \frac{d\theta}{dx_1} + a_{22}^{(1)} \frac{u_1^0}{x_1} - a_{22}^{(2)} \frac{\theta}{x_1} \right] = r(\delta) M_{13}^{(0)}(x_1) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -r(\delta)X_1^{(1)}(x_1) + 2\delta \sum_{k=0}^K \left(c_{21}^{(1,k)} \frac{d\varepsilon_{13}^{(k)}}{dx_1} + c_{22}^{(1,k)} \frac{\varepsilon_{13}^{(k)}}{x_1} \right) + \delta P_{22}^{(1)}(x_1), \\
r(\delta)a_{11}^{(0)} \frac{du_1^0}{dx_1} - r(\delta)a_{11}^{(1)} \frac{d\theta}{dx_1} + \delta a_{12}^{(0)} u_1^0 - \delta a_{12}^{(1)} \theta - \bar{F}_{11} = \\
& = -2 \sum_{k=0}^K \left(r(\delta)c_{11}^{(0,k)} \frac{d\varepsilon_{13}^{(k)}}{dx_1} + \delta c_{12}^{(0,k)} \varepsilon_{13}^{(k)} \right) - r(\delta)P_{11}^{(0)}(x_1), \\
r(\delta)a_{11}^{(1)} \frac{du_1^0}{dx_1} - r(\delta)a_{11}^{(2)} \frac{d\theta}{dx_1} + \delta a_{12}^{(1)} u_1^0 - \delta a_{12}^{(2)} \theta - \bar{M}_{11} = \\
& = -2 \sum_{k=0}^K \left(r(\delta)c_{11}^{(1,k)} \frac{d\varepsilon_{13}^{(k)}}{dx_1} + \delta c_{12}^{(1,k)} \varepsilon_{13}^{(k)} \right) - r(\delta)P_{11}^{(1)}(x_1), \\
\frac{du_3^0}{dx_1} - \theta(x_1) = 0, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1, \tag{40}
\end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\bar{F}_{11}(x_1) = r(\delta)F_{11}(x_1), \quad \bar{M}_{11}(x_1) = r(\delta)M_{11}(x_1), \tag{41}$$

$r(\delta)$ определяется равенствами (35).

Согласно равенствам (12), (15), (34), (37) с учетом (16), правые части в системе (40) известны на текущей итерации метода последовательных приближений. Левые же части в (40) формально совпадают с левыми частями уравнений (42) из [13] (при соответствующих переобозначениях коэффициентов).

Для однозначного интегрирования системы (40) необходимо использовать статические граничные условия (36) (заданные, например, на кромке $x_1 = r_1$), а также кинематические условия (20), (24) (заданные, например, на внутренней кромке $x_1 = r_0$) при $i = 1$ и $\ell = 0, 1$ с учетом (25), (28) и введенной функции $\theta = \frac{du_3^0}{dx_1}$ (см. (40)).

В случае цилиндрического изгиба шарнирно опертой, прямоугольной удлиненной пластины (см. рис. 1) соответствующие граничные условия таковы

$$\bar{F}_{11}(r_1) = 0, \quad \bar{M}_{11}(r_0) = \bar{M}_{11}(r_1) = 0, \tag{42}$$

$$u_1^0(r_0) = 0, \quad u_3^0(r_0) = u_3^0(r_1) = 0, \quad r_0 = 0, \quad r_1 = L, \tag{43}$$

где L – ширина пластины. При этом задача является статически определимой относительно \bar{F}_{11} , \bar{M}_{11} при $\delta = 0$, т.е. эти силовые факторы с учетом (42) можно определить непосредственно из (33). Следовательно, при $\delta = 0$ первые два из уравнений (40) не потребуются, а три последних уравнения из (40) с учетом (43) образуют замкнутую краевую задачу относительно кинематических неизвестных u_1^0 , u_3^0 , θ .

Так как система (40) содержит производные только первого порядка от неизвестных функций $\bar{F}_{11}(x_1)$, $\bar{M}_{11}(x_1)$, $\theta(x_1)$, $u_1^0(x_1)$, $u_3^0(x_1)$, то сформулированная для нее двухточечная граничная задача на каждой текущей итерации может быть проинтегрирована, как и в [13], численно методом пристрелки [11] с привлечением абсолютно устойчивых неявных методов Рунге – Кутты [6].

При $K = 0$ система (40) совпадает с уравнениями (42) из [13], поэтому в рамках теории Рейсснера ($\beta = 0$, см. (1)) исследуемая задача решается совершенно так же, как и в рамках теории Редди ($\beta = 1$), различие заключается только в числовых значениях коэффициентов $a_{ij}^{(m)}$, $c_{ij}^{(m,k)}$, которые вычисляются по формулам (12) либо при $\beta = 0$, либо при $\beta = 1$. При использовании упрощенного варианта уточненной теории ($K \geq 1$, $\beta = 1$) система (40) интегрируется так же, как в рамках теории Редди [13], но имеет известные поправки в правых частях.

2. Обсуждение результатов расчетов. В качестве конкретных примеров исследуем особенности изгибного поведения кольцевых пластин, ограниченных кромками радиусов $r_0 = 1$ м, $r_1 = 2$ м, и прямоугольных удлиненных пластин шириной $L = 1$ м (см. рис. 1), имеющих толщину $2h = 10$ см. Касательные нагрузки на лицевых поверхностях отсутствуют (см. (28)), конструкции рассматриваются при температуре естественного состояния $\Theta_0 = 20$ °С или равномерно нагреты до температуры $\Theta = 400$ °С. Пластины изготовлены из регулярно чередующихся изотропных и равносопротивляющихся магниевых (высокопрочный сплав ВМ65) и стальных (марки 40Х) слоев ($N = 2$), либо из алюминиевых (низкопрочный сплав АДМ) и стальных слоев марки 11Н8М18К14Т. При этом в каждом из материалов коэффициент K_n в (5) вычисляется по формуле [8, 10]:

$$K_n = \frac{E_n}{1 - 2\nu_n}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

где E_n , ν_n – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала n -го компонента композиции. Относительное объемное содержание слоев каждой фазы композиции равно 0.5 ($\omega_1 = \omega_2 = 0.5$, см. (1) в [12]).

Предполагается, что связь между напряжением σ и механической деформацией ε в каждом компоненте композиции при растяжении и сжатии описывается идеализированной диаграммой с линейным упрочнением [10]:

$$\sigma = \begin{cases} E_n \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(n)} = \sigma_s^{(n)} / E_n, \\ \text{sgn}(\varepsilon) \sigma_s^{(n)} + E_s^{(n)} (\varepsilon - \text{sgn}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(n)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(n)}, \end{cases} \quad 1 \leq n \leq N, \quad (44)$$

где $E_s^{(n)}$ – модуль линейного упрочнения материала n -го компонента композиции; $\sigma_s^{(n)}$, $\varepsilon_s^{(n)}$ – предел текучести и соответствующая ему упругая деформация того же материала. Физико-механические характеристики материалов рассматриваемых металлокомпозиций приведены в табл. 1 с указанием температуры Θ , при которой они определены.

Таблица 1. Физико-механические характеристики материалов слоев [5, 9].

Материал	Θ , °С	E_n , ГПа	ν_n	$\sigma_s^{(n)}$, МПа	$E_s^{(n)}$, ГПа	$\alpha_n \cdot 10^6$, 1/К
Магниевый сплав ВМ65	20	43.0	0.33	267	0.379	20.9
	400	18.5	0.31	11	3.931	22.6
Сталь марки 40Х	20	214.0	0.3	435	0.893	13.3
	400	200.0	0.3	412	1.309	14.8
Алюминиевый сплав АДМ	20	71.0	0.32	30	0.143	24.0
Сталь марки 11Н8М18К14Т	20	210.0	0.31	3400	9.545	11.7

Пластины равномерно нагружены только в поперечном направлении: $q(x_1) = -\sigma_{33}^{(+)} = \text{const}$, $\sigma_{33}^{(-)} \equiv 0$, $X_1 = X_3 \equiv 0$ (см. (31), (32), (34) и рис. 1). Внешние кромки кольцевых пластин свободны от нагружения ($F_{nn} = 0$, $M_{nn} = 0$, $M_{n3}^{(\ell)} = 0$, $0 \leq \ell \leq K$, см. (36), (37) при $x_1 = r_1$), а внутренние жестко закреплены (см. (20), (24), (25) при $\ell = 0, 1$ и $u_{30} = u_{i0} \equiv 0$, $x_1 = r_0$, $i = 1, 2$); продольные кромки прямоугольных удлиненных пластин шарнирно оперты (см. рис. 1), т.е. рассматриваются модельные задачи.

На рис. 2 изображены эпюры прогибов $u_3^0(x_1)$ для пластин из ВМ65–40Х-композиции (рис. 2а и рис. 2б) и АДМ–11Н8М18К14Т-композиции (рис. 2в). Зависимости $u_3^0(x_1)$ на рис. 2а и рис. 2в соответствуют кольцевым пластинам, а на рис. 2б – прямоугольной удлиненной пластине (цилиндрический изгиб). Кривые на рис. 2, номера которых помечены одним штрихом «'», определены при температуре естественного состояния $\Theta_0 = 20^\circ\text{C}$, а двумя штрихами «''» – при температуре $\Theta = 400^\circ\text{C}$.

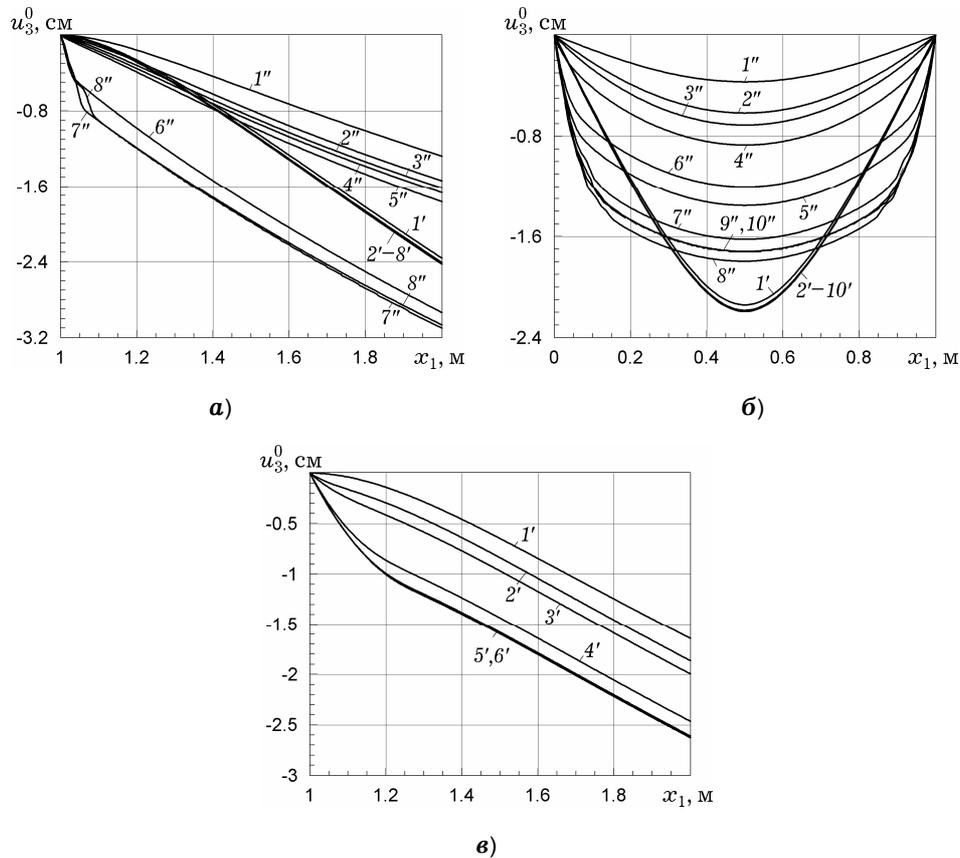


Рис. 2. Эпюры прогибов: а) – кольцевой пластины из ВМ65–40Х-композиции; б) – прямоугольной удлиненной пластины из ВМ65–40Х-композиции; в) – кольцевой пластины из АДМ–11Н8М18К14Т-композиции

Кривые $1'$ и $1''$ рассчитаны по классической теории (при этом в (24), (40) следует принять $\beta = 0$, $\varepsilon_{i3}^{(k)} \equiv 0$, $0 \leq k \leq K = 0$); линии $2'$ и $2''$ – по теории Рейсснера ($\beta = 0$, $K = 0$); остальные кривые с номерами i' и i'' соответствуют уточненным теориям при $\beta = 1$ и $K = 2(i - 3)$, $i \geq 3$ (в частности,

кривые с номерами $3'$ и $3''$ ($i = 3$) определены по теории Редди). Сравнение кривых на рис. 2 с номерами $i \geq 3$ показывает, что с увеличением K имеет место сходимость частичных сумм в (1), (3), (4), однако скорость сходимости этих сумм разная в разных случаях.

Кривые $1'-8'$ на рис. 2а определены при $q = 1.5$ МПа, а линии $1'-10'$ на рис. 2б – при $q = 8$ МПа. Видно, что кривые $2'$, $3'$ и т.д. на этих рисунках визуальнo практически неразличимы; линии же $1'$ отличаются от них незначительно (на рис. 2а ординаты точек кривой $1'$ отличаются от аналогичных величин кривой $8'$ всего на 2.7%, а на рис. 2б – на 2.3 %). Следовательно, классическая теория вполне приемлема для расчета механического поведения изгибаемых слоистых пластин из ВМ65-40Х-композиции при температурах, близких к температуре естественного состояния. Поведение кривых $1'-10'$ на рис. 2б при этом свидетельствует о том, что в окрестности центрального сечения ($x_1 \approx L/2$) шарнирно опертой, прямоугольной удлиненной пластины, выполненной из такой композиции, реализуется напряженное состояние, близкое к пластическому шарниру [10]. Кривые $1'-8'$ на рис. 2а в точке $x_1 = 1$ м (в заделке) имеют горизонтальные касательные, что указывает на наличие пренебрежимо малых деформаций поперечных сдвигов в кольцевой пластине из ВМ65-40Х-композиции при $\Theta = 20$ °С (это и объясняет близость кривых $1'-8'$ на рис. 2а). При этом в окрестности внутренней кромки ($x_1 \approx 1$ м) в таких пластинах также реализуется напряженное состояние, близкое к пластическому шарниру.

Однако согласно данным, приведенным в табл. 1, при повышении температуры жесткостные и прочностные характеристики магниевого сплава ВМ65 резко ухудшаются, а характеристики стали марки 40Х в диапазоне температур $20 \leq \Theta \leq 400$ °С изменяются незначительно [5]. Это приводит к существенному ослаблению сопротивления пластин из ВМ65-40Х-композиции поперечным сдвигам при высоких температурах (в частности, при $\Theta = 400$ °С). Об этом свидетельствует поведение кривых $1''-8''$ на рис. 2а, рассчитанных при $\Theta = 400$ °С и $q = 0.29$ МПа, а также линий $1''-10''$ на рис. 2б, определенных при $\Theta = 400$ °С и $q = 1.0$ МПа.

Сравнение кривых $1''-3''$ и $8''$ на рис. 2а и линий $1''-3''$ и $10''$ на рис. 2б показывает, что ни классическая теория (кривые $1''$), ни теории Рейсснера (линии $2''$) и Редди (кривые $3''$) в этих случаях не гарантируют получения надежных результатов по прогибу даже с грубой 10%-й точностью. Кроме того, сопоставление кривых $4''$, $5''$ и $8''$ на рис. 2а и линий $4''-6''$ и $10''$ на рис. 2б свидетельствует о том, что эту точность не обеспечивают даже первые уточнения теории Редди (при $K = 2, 4, 6$).

Поведение кривых $6''-8''$ на рис. 2а качественно отличается от поведения линий $1''-5''$. А именно, согласно поведению кривых $6''-8''$, в кольцевой пластине из ВМ65-40Х-композиции при $\Theta = 400$ °С в окрестности опоры ($x_1 \approx 1$ м) активно развиваются пластические деформации поперечных сдвигов, поэтому пластина как бы срезается в окрестности опоры в поперечном направлении. Качественно аналогичное поведение характерно и для кривых $5''-10''$ на рис. 2б. Таким образом, эти кривые свидетельствуют о том, что в окрестности опор слоистых пластин из ВМ65-40Х-композиции при $\Theta = 400$ °С возникают ярко выраженные краевые эффекты, которые в рамках традиционных теорий – классической, Рейсснера и Редди (см. кривые $1''-3''$) – отследить не удастся, поэтому-то указанные теории в случае $\Theta = 400$ °С дают большую ошибку при определении податливости таких конструкций.

В работе [13] показано, что при изгибе слоистой пластины регулярной структуры, выполненной из АДМ-11Н8М18К14Т-композиции, даже при температуре естественного состояния $\Theta = 20^\circ\text{C}$ классическая теория дает большую ошибку при определении прогиба по сравнению с теорией Редди. Однако точность теории Редди там не была верифицирована. В связи с этим на рис. 2в приведены зависимости $u_3^0(x_1)$, рассчитанные по разным теориям при $\Theta = 20^\circ\text{C}$ и $q = 1.3\text{МПа}$ для кольцевой пластины прежних размеров, выполненной из АДМ-11Н8М18К14Т-композиции.

Расчет, которому соответствует кривая 6' на рис. 2в, условимся называть эталонным, так как дальнейшие уточнения соответствующего решения (при $K \geq 7$, см. (1)) приводят к зависимостям $u_3^0(x_1)$, визуально не отличимым от линии 6'. Сравнение кривой 3' (теория Редди) с линией 6' показывает, что в этом случае теория Редди не приемлема для адекватного расчета механического поведения таких слоистых пластин. Более того, сопоставление кривых 4' и 6' свидетельствует о том, что даже первое уточнение теории Редди (линия 4') не обеспечивает определения прогиба пластины с традиционной 5%-й инженерной точностью (различие по прогибам в этом случае составляет 6.2 %).

Следовательно, существуют слоистые металлокомпозиции регулярной структуры такие, что даже при умеренных уровнях температур традиционные теории изгиба пластин (классическая теория, теории Рейсснера и Редди), выполненных из таких композиций, не гарантируют получения надежных результатов расчетов. В этих случаях требуется использование уточненных теорий (см. пп. 1 и 2).

Поведение кривой 6' на рис. 2в показывает, что в окрестности внутренней кромки ($x_1 \approx 1\text{ м}$) кольцевой пластины из АДМ-11Н8М18К14Т-композиции даже при температуре естественного состояния возникает краевой эффект и напряженное состояние, близкое к «срезу» пластины на опоре. С повышением температуры этот краевой эффект проявляется все более ярко (см., например, кривые 7'', 8'' на рис. 2а).

Для получения некоторого наглядного представления о деформированном состоянии в материалах фаз слоистой пластины из АДМ-11Н8М18К14Т-композиции, предсказываемых разными теориями, на рис. 3 изображены поперечные радиальные сечения кольцевой пластины и изолинии, на которых интенсивности деформаций сдвига $\Gamma_n = \text{const}$, $n = 1, 2$ (см. (5) и соотношения (4) в [12]).

В силу отсутствия нагружения пластины в радиальном направлении и отсутствия теплового воздействия ($\Theta = \Theta_0 = 20^\circ\text{C}$) имеем $F_{11} \equiv 0$. Так как материалы слоев предполагаются одинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию, то изолинии симметричны относительно срединной плоскости $x_3 = 0$, поэтому в нижних частях рис. 3 изображены кривые, соответствующие $\Gamma_1 = \text{const}$ (в АДМ-слоях, для которых принято $n = 1$), а в верхних частях $\Gamma_2 = \text{const}$ (в стальных слоях марки 11Н8М18К14Т, для которых $n = 2$). На рис. 3а изображены кривые, определенные по классической теории; на рис. 3б – по теории Рейсснера; на рис. 3в – по теории Редди; на рис. 3г – результаты эталонного расчета ($K = 6$, см. (1)). Номер i -й кривой на рис. 3 означает, что на этой изолинии $\Gamma_n = i\Gamma_1^s$, $n = 1, 2$, где, согласно (4) из [12] и [10], $\Gamma_1^s = 2(1 + \nu_1)\varepsilon_s^{(1)}/\sqrt{3}$, $\varepsilon_s^{(1)}$ – упругая деформация, соответствующая пределу текучести $\sigma_s^{(1)}$ алюминиевого сплава АДМ (см. соотношения (44) и табл. 1). Таким образом, кривые 1 в нижних частях рис. 3 определяют положение упругопластической границы в алюминиевых слоях.

Сопоставление кривых $\Gamma_n = \text{const}$, изображенных на рис. 3а и рис. 3б, с эталонным расчетом (рис. 3г) показывает, что ни классическая теория, ни теория Рейсснера не дают верного представления о действительной картине деформирования материалов АДМ-11Н8М18К14Т-пластины слоистой регулярной структуры. Поэтому-то указанные теории неверно предсказывают податливость таких пластин при их упругопластическом изгибе (ср. кривые 1' и 2' с линией б' на рис. 2в). Сравнение же изолиний $\Gamma_n = \text{const}$, изображенных на рис. 3в, с кривыми на рис. 3г свидетельствует о том, что теория Редди лишь весьма приближенно предсказывает качественно верную картину деформирования алюминиевых слоев (см. нижние части этих рисунков) рассматриваемой композиции, однако почти вчетверо занижает значения Γ_1 . Последнее обстоятельство и служит причиной значительного занижения по модулю прогиба $u_3^0(x_1)$, рассчитанного по этой теории (ср. кривые 3' и б' на рис. 2в).

Поведение изолиний $\Gamma_n = \text{const}$, изображенных на рис. 3а, в окрестности жестко закрепленной кромки $x_1 \approx r_0 = 1$ м показывает, что, согласно расчетам по классической теории, в окрестности этой кромки НДС в слоях пластины близко к пластическому шарниру. Согласно же поведению кривых $\Gamma_n = \text{const}$, $n = 1, 2$, на рис. 3б – рис. 3г, пластический шарнир в окрестности этой опорной кромки не образуется, а активно развиваются пластические деформации поперечных сдвигов (особенно в алюминиевых слоях).

Поведение кривых $\Gamma_n = \text{const}$ на рис. 3г показывает, что в окрестности внутренней, жестко закрепленной кромки картины деформирования материалов фаз слоистой АДМ-11Н8М18К14Т-композиции весьма сложны. С увеличением температуры, когда локальные эффекты в окрестности опорной кромки проявляются все ярче, эти картины становятся еще более сложными. Так, в случаях, которым соответствуют кривые δ'' на рис. 2а и $10''$ на рис. 2б, картины деформирования материалов компонентов ВМ65-40Х-композиции в окрестностях опорных кромок, где наблюдается «срез» пластин, настолько сложны, что визуально малоинформативны, поэтому они не изображены.

Выше рассматривались относительно толстые пластины ($2h/(r_1 - r_0) = 1/10$). Дополнительные расчеты показали, что для относительно тонких пластин ($2h/(r_1 - r_0) = 1/20$ и менее) теория Редди вполне приемлема для расчета податливости соответствующих конструкций при их термоупругопластическом изгибе как при умеренных, так и при высоких температурах.

Как уже отмечалось, в [2, 3] была проведена верификация теории Редди в случаях линейно-упругого поведения анизотропных пластин и оболочек (в том числе и слоистой структуры). Однако в этих работах для уточнения теории Редди использовалась одночленная аппроксимация деформаций ε_{i3} при отсутствии касательных напряжений на лицевых поверхностях тонкостенных элементов конструкций ($\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$):

$$\varepsilon_{i3}(\mathbf{r}) = f(x_3)\varepsilon_{i3}^{(0)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad i = 1, 2, \quad (45)$$

где функция $f(x_3)$ выбиралась так, чтобы граничные условия, аналогичные (17), при $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ и $\varepsilon_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ выполнялись тождественно, т.е. $f(\pm h) = 0$ (в частности, в рамках теории Редди, согласно (1), $f(x_3) = (h^2 - \beta x_3^2)/h^2$, $\beta = 1$). В работах [2, 3] функция $f(x_3)$ задавалась в виде полиномов разных

порядков, и было показано, что уточнение прогибов при этом пренебрежимо мало по сравнению с теорией Редди. При этом не выяснялся вопрос: достаточно ли использовать одночленное представление (45) или нужно использовать конечные разложения типа (1) при $K \geq 1$?

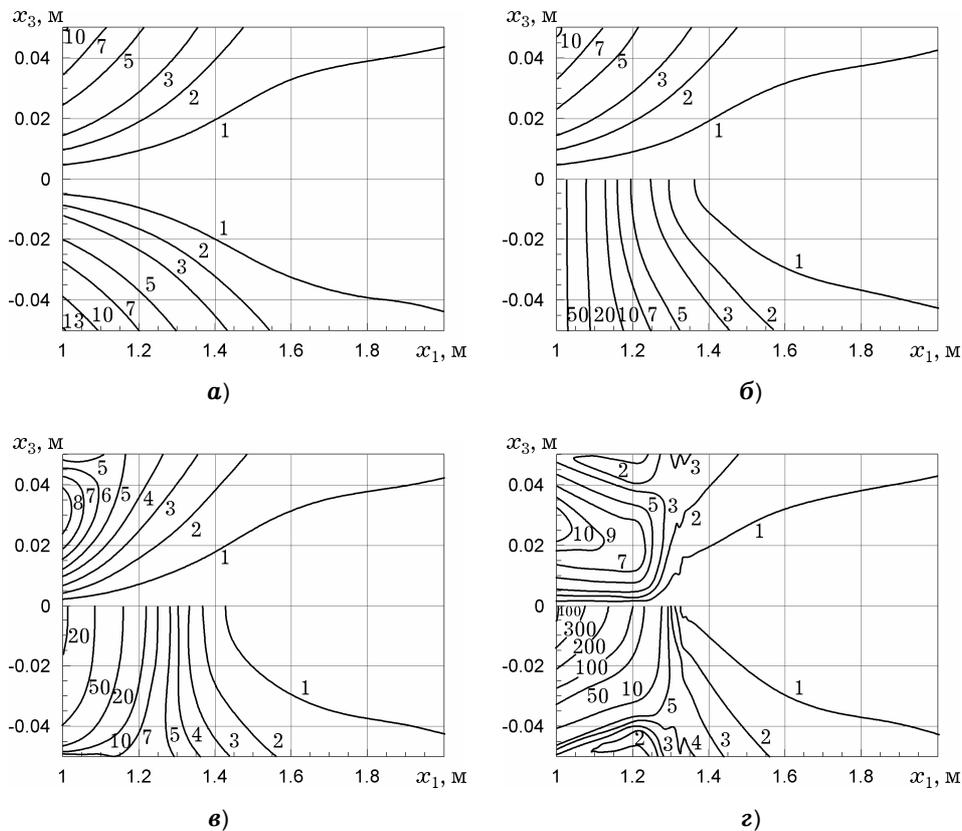


Рис. 3. Характерные зоны упругопластического деформирования в алюминиевых (нижние части рисунков) и стальных (верхние части рисунков) слоях кольцевой пластины из АДМ–11Н8М18К14Т-композиции: а) – расчет по классической теории; б) – по теории Рейсснера; в) – по теории Редди; г) – «эталонный» расчет.

Дополнительные расчеты, выполненные в рамках упрощенной уточненной теории изгиба слоистых пластин регулярной структуры (см. п. 2) показали, что при линейно-упругом деформировании таких конструкций все уточнения (см. (1) при $K \geq 1$) приводят к тем же значениям прогибов, что и в рамках теории Редди. Таким образом, действительно, при изучении линейно-упругого поведения изгибаемых анизотропных пластин вполне достаточно использовать весьма простую теорию Редди. При исследовании же термоупругопластического изгиба слоистых пластин регулярной структуры, как показывают приведенные выше примеры, эта теория может приводить к неверным результатам.

Заключение. Проведенный сравнительный анализ моделей механического поведения изгибаемых слоистых пластин регулярной структуры показывает, что из двух традиционных неклассических теорий теория Редди лучше описывает деформирование тонкостенных элементов конструкций по сравнению с теорией Рейсснера. В ряде случаев упругопластического или термоупругопластического изгиба таких пластин не только классическая теория, но и теории Рейсснера и Редди не гарантируют получения требуемой точности расчетов механического поведения тонкостенных композитных элементов конструкций. Только при расчете тонких (с относительной

толщиной 0.05 и менее) пластин теория Редди обеспечивает вполне приемлемые результаты. Эти факты свидетельствуют о том, что для получения адекватных результатов расчетов изгибного поведения термоупругопластически деформируемых относительно толстых (с относительной толщиной 0.1 и более) пластин слоистой регулярной структуры необходимо использовать уточненные теории высоких порядков (основные на кинематических соотношениях (1)–(4) при $K \geq 10$), так как при этом в окрестности опорных кромок могут возникнуть ярко выраженные краевые эффекты, определяющие «срез» таких пластин в поперечном направлении, которые не отслеживают или плохо отслеживают теории низких порядков. Следовательно, конечные элементы, разработанные на основе традиционных неклассических теорий [1, 4, 15], не позволяют проводить расчеты механического поведения соответствующих элементов тонкостенных конструкций с приемлемой инженерной точностью. В случае линейно-упругого поведения материалов слоев композиции для адекватного расчета изгибного поведения пластин вполне достаточно использовать теорию Редди и разработанные на ее базе конечные элементы [15].

1. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. – 400 с.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
3. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
4. Баженов В. А., Кривенко О. П., Соловей Н. А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – Москва: Книжный дом «Либроком», 2013. – 336 с.
5. Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И., Николаенко Н. А., Синюков А. М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. И. И. Гольденבלата. – Москва: Машиностроение, 1965. – 567 с.
6. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1988. – 334 с.
То же: Dekker K., Verwer J. G. Stability of Runge – Kutta methods for stiff nonlinear differential equations. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – ix+307 p.
7. Демидов С. П. Теория упругости. – Москва: Высш. шк., 1979. – 432 с.
8. Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. – Москва: Физматлит, 2010. – 352 с.
9. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
10. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1968. – 400 с.
11. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1979. – 312 с.
То же: Hall G., Watt J. M. Modern numerical methods for ordinary differential equations. – Oxford: Clarendon Press, 1976. – 336 p.
12. Янковский А. П. Моделирование упругопластического изгиба металлокомпозитных слоистых пластин регулярной структуры. 1. Структурная модель // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. – 2012. – № 2 (12). – С. 102–111.
13. Янковский А. П. Моделирование упругопластического изгиба металлокомпозитных слоистых пластин регулярной структуры. 2. Уточненная модель деформирования // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. – 2012. – № 3 (13). – С. 38–56.
14. Янковский А. П. Уточненная модель термоупругопластического изгиба слоистых пластин регулярной структуры. I. Постановка задачи // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 1. – С. 116–129.
15. Belkaid K., Tati A., Boumaraf R. A simple finite element with five degrees of freedom based on Reddy's third-order shear deformation theory // Mech. Compos. Mater. – 2016. – 52, No. 2. – P. 257–270.

УТОЧНЕНА МОДЕЛЬ ТЕРМОПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ЗГИНУ ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН РЕГУЛЯРНОЇ СТРУКТУРИ. II. МОДЕЛЬНІ ЗАДАЧІ

Для осесиметрично навантажених кільцевих пластин, жорстко закріплених на одній кромці і статично навантажених на іншій кромці, а також для прямокутних видовжених пластин при циліндричному згині розроблено спрощений варіант уточненої теорії (модельні задачі), складність реалізації якого зіставна зі складністю теорій Рейсснера і Редді. Проведено конкретні розрахунки термопружнопластичного згину таких пластин при різних рівнях теплової дії. Показано, що для відносно товстих пластин ні класична теорія, ні традиційні некласичні теорії Рейсснера і Редді не гарантують отримання надійних результатів щодо визначення прогину навіть у рамках грубої 10%-ї точності. Виявлено, що при згині шаруватих металокомпозитних пластин в умовах підвищених температур в околі їхніх опорних кромek виникають яскраво виражені крайові ефекти, що характеризують зріз цих конструкцій в поперечному напрямку. Традиційні ж теорії, які мають низькі порядки апроксимації поперечних зсувів, не дозволяють виявити ці локальні ефекти, що і призводить до їх вельми грубої точності. Показано, що для адекватного розрахунку термопружнопластичного згину тонких пластин, а також товстих пластин, матеріали фаз композиції яких є лінійно-пружними, цілком достатньо використовувати теорію Редді.

Ключові слова: шарувата композитна пластинка, регулярна структура, термопружнопластичність деформаційного типу, згинна пластинка, теорія Рейсснера, теорія Редді, уточнена теорія згину.

REFINED MODEL OF THERMO-ELASTIC-PLASTIC BENDING OF LAYERED PLATES OF REGULAR STRUCTURE. II. MODELING PROBLEMS

For axially loaded annular plates clamped on one contour and statically loaded on another contour, as well as for elongated rectangular plates in cylindrical bending, the simplified variant is developed for the refined theory (modeling problems), for which the complexity of realization is comparable with the complexity of the theories of Reissner and Reddy. The specific calculations of the thermo-elastic-plastic bending of concerned plates at different levels of heat action were carry out. It is shown that for relatively thick plates, classical theory and traditional non-classical theory of Reissner and Reddy do not guarantee reliable results for the determination of the deflection even within rough 10% of accuracy. It is found, that under the bending of laminated metal-composite plates in conditions of high temperatures, in the neighborhood of their supported contours the clearly expressed edge effects, characterizing the shear of these structures in transverse direction, are occurred. The traditional theories of having a low order of approximation of the transverse shifts are not sufficient to identify these local effects, and this leads to their rough accuracy. It is shown that for adequate calculation of the thermos-elastic-plastic bending of relatively thin and relatively thick plates, the materials phase composition which are linear-elastic, the Reddy theory is enough for use.

Key words: laminated composite plate, regular structure, thermo-elastic-plasticity of deformation type, bending plate, Reissner theory, Reddy theory, refined theory of bending.

Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
09.01.18