

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТІЙКОСТІ ШАРУВАТИХ ПЛАСТИН З ОТВОРАМИ  
ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ  $R$ -ФУНКЦІЙ**

Запропоновано методикку визначення критичного навантаження шаруватих пластин з отворами, які можуть мати різну геометричну форму і способи їх закріплення. Вважається, що у серединній площині пластина стискується статичними зусиллями. Математична постановка задачі формулюється в рамках уточненої теорії першого порядку, яка ґрунтується на гіпотезі прямої лінії (теорії типу Тимошенка). Для розв'язання задачі використовується метод Рітца і теорія  $R$ -функцій. Розв'язок задачі теорії пружності враховує неоднорідний докритичний стан шаруватої пластини. Достовірність запропонованого підходу підтверджується добрим узгодженням одержаних числових результатів з відомими, а його ефективність проілюстровано на прикладі дослідження стійкості шаруватих пластин з одним і двома чотирикутними отворами. Вивчено вплив розміщення отворів, їхніх розмірів і способу закріплення на критичне навантаження і власні частоти.

**Ключові слова:** стійкість шаруватих пластин, теорія  $R$ -функцій, метод Рітца, координатні функції, критичне навантаження, частоти і форми коливань.

Визначення критичного навантаження для багатошарових пластин, що стиснуті в серединній площині, є однією із головних задач, які виникають при проектуванні та розрахунку на міцність композитних елементів тонкостінних конструкцій. Тому вивченню цієї проблеми присвячена значна кількість досліджень. Огляд розвитку сучасних тенденцій дослідження шаруватих пластин наведено, наприклад, в роботі [11]. Враховуючи широке застосування багатошарових пластин з отворами, в численних роботах [2, 7–10, 12–14, 16] досліджували на стійкість саме такі пластини. При цьому для розв'язання задач стійкості багатошарових пластин використано як класичну теорію [2, 7, 12], так і уточнені теорії [8, 9, 13, 14, 16]. Треба звернути увагу на те, що в значній частині відомих публікацій автори використовують числові методи дослідження, у більшості випадків – метод скінченних елементів. Це пояснюється складністю математичної постановки задач стійкості багатошарових пластин з отворами, для яких аналітичний розв'язок практично неможливо знайти.

З огляду літератури можна зробити висновок, що переважно вивчено стійкість і коливання вільно опертих або жорстко закріплених багатошарових пластин випуклої прямокутної, чотирикутної або круглої форми. При дослідженні пластин з отворами автори зазвичай розглядають випадки, коли отвір вільний і має круглу або прямокутну форму, при цьому в більшості робіт не враховується неоднорідний докритичний стан пластини. Обмеженою є кількість робіт, у яких розглядаються закріплені отвори та змішані крайові умови. Застосування теорії  $R$ -функцій дозволяє розв'язувати подібні задачі для пластин різної геометричної форми. Для розв'язання задач стійкості та параметричних коливань багатошарових пластин, математичні моделі яких базуються на класичній теорії, у роботах [2, 7, 12] застосовано теорію  $R$ -функцій і варіаційні методи ( $RFM$ ) [5].

У цій роботі використано уточнену теорію першого порядку, яка враховує деформації зсуву та базується на гіпотезі прямої лінії. Головну увагу приділено дослідженню багатошарових пластин з одним і двома прямокутними отворами, які розташовані симетрично відносно осей  $Ox$  або  $Oy$  та

---

\*viktoryatkachenko@gmail.com

можуть бути як закріпленими, так і вільними. Вивчено вплив умов закріплення отворів і їх розмірів на критичне навантаження, власні частоти та форми коливань.

**1. Математична постановка задачі.** Будемо досліджувати шаруваті пластини із симетричним розташуванням шарів відносно серединної поверхні. Для математичного формулювання задачі будемо враховувати такі умови:

– пластина навантажена у своїй серединній площині статичними зусиллями, поперечні навантаження відсутні;

– докритичний напружений стан описується співвідношеннями лінійної теорії пружності, при цьому зміною розмірів пластини до втрати стійкості нехтуємо;

– всі зовнішні навантаження змінюються пропорційно до деякого параметра  $\lambda$ .

Використовуючи уточнену теорію шаруватих пластин першого порядку, що ґрунтується на гіпотезі прямої лінії та враховує деформації зсуву, запишемо систему рівнянь руху у вигляді [15]:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v &= 0, \\ L_{21}u + L_{22}v &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} L_{33}w + L_{34}\Psi_x + L_{35}\Psi_y &= m_1w_{,tt} - \\ &- \lambda \left( N_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\ L_{43}w + (L_{44} - C_{55})\Psi_x + (L_{45} - C_{54})\Psi_y &= m_2\Psi_{x,tt}, \\ L_{53}w + (L_{54} - C_{45})\Psi_x + (L_{55} - C_{44})\Psi_y &= m_2\Psi_{y,tt}. \end{aligned} \quad (2)$$

Невідомі функції  $u$ ,  $v$ ,  $w$  співпадають з переміщеннями точок серединної поверхні в напрямках осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  відповідно, а функції  $\Psi_x$ ,  $\Psi_y$  визначають кути повороту нормалі до серединної поверхні відносно осей  $Ox$  та  $Oy$ . Лінійні оператори  $L_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, 5$ , мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{22} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{12} = L_{21} &= C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{33} &= C_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{45} + C_{54}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{34} = -L_{43} &= C_{55} \frac{\partial}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial}{\partial y}, \\ L_{35} = -L_{53} &= C_{54} \frac{\partial}{\partial x} + C_{44} \frac{\partial}{\partial y}, \\ L_{44} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

$$L_{45} = L_{54} = D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{55} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Коефіцієнти  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $ij = 11, 22, 12, 16, 26, 66$ , – зведені характеристики жорсткості, які визначаються як [1, 3]

$$(C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s(1, z^2) dz, \quad (3)$$

де  $B_{ij}^s$  – пружні сталі матеріалу  $s$ -го шару пластини. Аналогічно визначаємо величини  $m_1$ ,  $m_2$ , які входять у систему рівнянь руху (1), (2):

$$m_{1,2} = \sum_{s=1}^n \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_0^{(s)}(1, z^2) dz,$$

де  $\rho_0^{(s)}$  – густина матеріалу  $s$ -го шару.

Систему рівнянь (1), (2) доповнюємо відповідними граничними умовами, які залежать від способу закріплення краю пластини. Зусилля  $N_{11}^0$ ,  $N_{22}^0$ ,  $N_{12}^0$  у рівняннях (2) відповідають значенню параметра  $\lambda = 1$  і в загальному випадку визначаються як розв'язки системи (1), доповненої відповідними неоднорідними граничними умовами.

**2. Метод розв'язування.** Алгоритм розрахунку критичного навантаження і власних частот стиснутої багатошарової пластини зусиллями в серединній площині зводиться до послідовного розв'язання двох крайових задач:

1) задачі теорії пружності (1), внаслідок розв'язання якої визначається неоднорідний докритичний стан пластини, тобто визначаються зусилля  $N_{11}^0$ ,  $N_{22}^0$ ,  $N_{12}^0$ ;

2) власне задачі стійкості пластини, яка моделюється рівняннями (2) системи рівнянь руху.

Кожна з наведених задач розв'язується варіаційним методом Рітца, а відповідні системи координатних функцій будуються за допомогою теорії  $R$ -функцій [5].

Варіаційна постановка крайової задачі (1), доповненої відповідними граничними умовами, зводиться до знаходження мінімуму функціонала

$$I(u^0, v^0) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}^L \varepsilon_{11}^L + N_{22}^L \varepsilon_{22}^L + N_{12}^L \varepsilon_{12}^L) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} P_{\text{load}} (u_1 \cos \alpha + v_1 \sin \alpha) ds, \quad (4)$$

де  $\alpha$  – кут між зовнішньою нормаллю до границі області та віссю  $Ox$ ;  $P_{\text{load}}$  – інтенсивність зусиль, що діють на границі області. Зусилля  $\{N\}^L = \{N_{11}^L, N_{22}^L, N_{12}^L\}$  в рамках уточненої теорії першого порядку для випадку симетричного розташування шарів пластини визначаються як

$$\{N\}^L = [C]\{\varepsilon\}^L. \quad (5)$$

Деформації  $\{\varepsilon\}^L = \{\varepsilon_{11}^L, \varepsilon_{22}^L, \varepsilon_{12}^L\}$  в рівностях (4) і (5) визначаємо за формулами

$$\varepsilon_{11}^L = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22}^L = \frac{\partial v^0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{12}^L = \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial u^0}{\partial y},$$

де  $u^0$ ,  $v^0$  – переміщення точок серединної площини в напрямках осей  $Ox$  та  $Oy$  відповідно. Матриця  $[\mathbf{C}]$ , елементи якої визначаються за формулами (3), має вигляд

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}.$$

Мінімізацію функціонала (4) виконуємо на множині функцій, які задовольняють головні граничні умови, що залежать від способу закріплення границі пластини. При розв'язанні конкретних задач (див. п. 3) сформулюємо граничні умови та побудуємо відповідні послідовності базисних функцій. За знайденими функціями  $u^0$ ,  $v^0$  зусилля  $\mathbf{N}^0 = (N_{11}^0, N_{22}^0, N_{12}^0)^\top$  визначаємо за формулами (5).

Для визначення критичного навантаження застосуємо динамічний підхід [4], згідно з яким розв'язання цієї задачі зводимо до розв'язування послідовності задач на власні значення при варіюванні параметра  $P_B$  у функціоналі

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} & \left[ M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12} + Q_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi_x \right) + Q_2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \Psi_y \right) + \right. \\ & + P_{\text{load}} \left( N_{11}^0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{22}^0 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\ & \left. - \Lambda^2 \left( m_1 w^2 + m_2 \left( \Psi_x^2 + \Psi_y^2 \right) \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Деформації  $\{\chi\} = \{\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}\}$  у (6) обчислюємо таким чином [3, 15]:

$$\chi_{11} = \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}, \quad \chi_{22} = \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}, \quad \chi_{12} = \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x},$$

а моменти  $\{M\} = \{M_{11}, M_{22}, M_{12}\}$  визначаємо з рівності  $\{M\} = [\mathbf{D}]\{\chi\}$ , де матриця  $[\mathbf{D}]$ , елементи якої обчислюємо за формулами (3), має вигляд

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Перерізуючі сили у функціоналі (6) визначаємо як

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} C_{ij} &= K^2 \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s dz, \quad i, j = 4, 5, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi_x, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial w}{\partial y} + \Psi_y. \end{aligned}$$

Величину корегуючого множника зсуву  $K^2$  приймаємо в цій роботі рівною 5/6 [1]. Змінюючи значення параметра  $P_{\text{load}}$ , отримаємо сукупність власних частот, що відповідають різним стискувальним навантаженням. Значення параметра  $P_{\text{load}}$ , яке відповідає найменшому невід'ємному значенню власної частоти, і буде критичним.

### 3. Числові результати.

**3.1. Розв'язання тестових задач.** Як тестовий приклад розглянемо задачу, яка була розв'язана в роботі [10]: будемо досліджувати чотиришарову пластину з квадратним отвором та укладкою шарів  $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$  (див. рис. 1). Припустимо, що пластину навантажено уздовж країв, паралельних осі  $Oy$ .

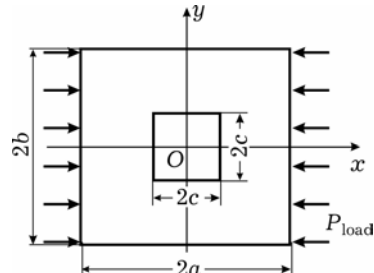


Рис. 1. Форма плану пластини.

Граничні умови для досліджуваної пластини приймаємо такими:

$$w = 0, \quad \psi_y = 0, \quad u = 0,$$

$$N_x = -p, \quad N_{xy} = 0,$$

$$\forall (x, y) \in \partial\Omega_1, \partial\Omega_1 : \quad x = \pm a/2, \quad -b/2 \leq y \leq b/2, \quad (7)$$

$$w = 0, \quad \psi_x = 0, \quad v = 0, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = 0,$$

$$\forall (x, y) \in \partial\Omega_2, \partial\Omega_2 : \quad y = \pm b/2, \quad -a/2 \leq x \leq a/2, \quad (8)$$

а на границі отвору задаємо такі умови:

$$M_n = 0, \quad M_{n\tau} = 0, \quad Q_n = 0, \quad N_n = 0, \quad T_n = 0. \quad (9)$$

Вирази для  $M_n$ ,  $M_{n\tau}$ ,  $Q_n$ ,  $N_n$ ,  $T_n$  наведено в роботі [3]. При застосуванні методу Рітца граничні умови (9) можна не задовольняти, оскільки вони є природними і виконуються автоматично в інтегральному сенсі.

Обчислення виконано для матеріалу з такими значеннями механічних характеристик:

$$\begin{aligned} E_{11} &= 141.0 \text{ ГПа}, & E_{22} &= 9.23 \text{ ГПа}, \\ G_{12} &= G_{13} = 5.95 \text{ ГПа}, & G_{23} &= 2.96 \text{ ГПа}, & \nu_1 &= 0.313. \end{aligned}$$

Геометричні параметри вибрали такими:  $a = b = 0.5$  м,  $h = 0.005$  м.

Порівняння залежності обчисленого за допомогою *RFM* безрозмірного параметра критичного навантаження

$$N_{cr} = \frac{N_x b^2}{E_2 h^3}$$

від розмірів отвору  $c/b$  з

результатами, наведеними в роботі [10], представлено на рис. 2.

Відхилення результатів не перевищує 3%, що свідчить про достовірність запропонованого підходу та створеного програмного забезпечення. Зауважимо, що в роботі [10] не враховується неоднорідний докритичний стан пластини, і задачу розв'язано методом скінченних елементів.

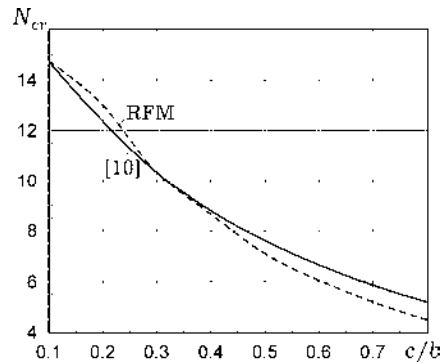
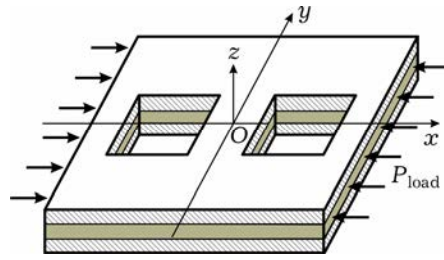
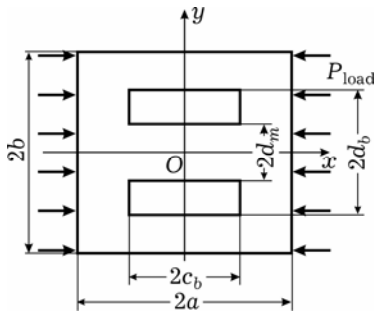


Рис. 2. Вплив розмірів отвору на критичне навантаження.

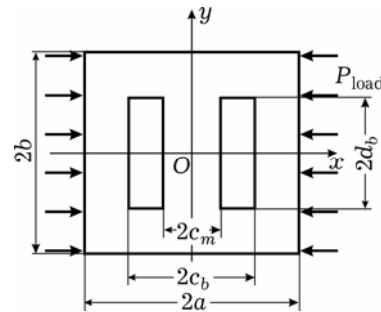
**3.2. Дослідження пластин при наявності двох отворів.** Для того щоб проілюструвати можливості теорії *R*-функцій і створеного програмного забезпечення у рамках системи *POLE-RL* [6], розглянемо тришарові ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) пластини (рис. 3а) з двома отворами, розташованими симетрично відносно осей  $Ox$  або  $Oy$ , як показано на рис. 3б та рис. 3в відповідно. Загальна товщина пластини дорівнює  $h/2b = 0.1$ . Товщини шарів приймаємо однаковими.



а)



б)



в)

Рис. 3. Форми плану пластин з двома отворами.

Дослідимо вплив на критичне навантаження крайових умов і геометричних параметрів пластини.

При обчисленнях значення механічних характеристик шарів приймемо такими:

$$E_1/E_2 = 10, \quad G/E_2 = 0.6, \quad \nu_1 = 0.25.$$

Відношення розмірів сторін зовнішнього прямокутника  $a/b$  варіюються в інтервалі  $[1, 1.5]$ . Варіанти розмірів отворів, їх розташування та закріплення представлені нижче.

*I.* Отвори розташовані симетрично відносно осі абсцис  $Ox$  (рис. 3б) на відстані один від одного  $d_m/b = 0.2$ . Варіанти розмірів отворів:

*I-i:* квадратні отвори  $c_b/b = 0.05, \quad d_b/b = 0.2,$

*I-ii:* прямокутні отвори  $c_b/b = 0.2, \quad d_b/b = 0.2,$

*I-iii:* прямокутні отвори  $c_b/b = 0.2, \quad d_b/b = 0.25.$

*II.* Отвори розташовані симетрично відносно осі ординат  $Oy$  (рис. 3в) на відстані один від одного  $c_m/b = 0.2$ . Варіанти розмірів отворів:

*II-i:* квадратні отвори  $c_b/b = 0.2, \quad d_b/b = 0.05,$

*II-ii:* прямокутні отвори  $c_b/b = 0.2, \quad d_b/b = 0.2,$

*II-iii:* прямокутні отвори  $c_b/b = 0.25, \quad d_b/b = 0.2.$

Розглянемо два типи *граничних умов* для досліджуваної пластини.

**1-й тип:** пластина вільно оперта по зовнішньому прямокутнику та є вільною на отворах.

У цьому випадку повинні виконуватися граничні умови (7)–(9).

**2-й тип:** пластина жорстко закріплена по всьому контуру (рухоме закріплення).

У цьому випадку граничні умови будуть наступними:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \psi_x = 0, \quad \psi_y = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \\ N_{xy} = 0, \quad N_x = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega^{(y)}, \\ N_y = 0, \quad N_{xy} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega^{(x)}, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $\partial\Omega^{(y)}$ ,  $\partial\Omega^{(x)}$  – частини границі, паралельні відповідно до осей  $Oy$ ,  $Ox$ .

Відповідно до методу  $R$ -функцій [5], побудуємо структури розв'язків для всіх випадків закріплення пластини:

$$\mathbf{1\text{-й тип:}} \quad w = \omega_{\text{ext}} \Phi_1, \quad u = \Phi_2, \quad v = \Phi_3, \quad \psi_1 = \Phi_4, \quad \psi_2 = \Phi_5, \quad (11)$$

$$\mathbf{2\text{-й тип:}} \quad w = \omega \Phi_1, \quad u = \Phi_2, \quad v = \Phi_3, \quad \psi_1 = \omega \Phi_4, \quad \psi_2 = \omega \Phi_5. \quad (12)$$

Тут  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , – невизначені компоненти структур розв'язку,  $\omega(x, y) = 0$  – рівняння границі всієї області, яке в розглядуваному випадку можемо побудувати як

$$\omega(x, y) = \omega_{\text{ext}} \wedge_0 \overline{\omega_{\text{hol}}}, \quad \omega_{\text{ext}}(x, y) = (F_1 \wedge_0 F_2),$$

де  $\omega_{\text{hol}}$  – функція, за допомогою якої задаємо рівняння границі отвору.

Якщо отвори розташовані симетрично відносно осі  $Ox$ , то  $\omega_{\text{hol}}$  визначаємо таким чином:

$$\omega_{\text{hol}}(x, y) = (F_3 \vee_0 F_5) \vee_0 F_6. \quad (13)$$

Для пластин з отворами, розташованими симетрично відносно осі  $Oy$ , функція  $\omega_{\text{hol}}$  має вигляд

$$\omega_{\text{hol}}(x, y) = (F_4 \vee_0 F_6) \vee_0 F_5. \quad (14)$$

де  $\wedge_0$ ,  $\vee_0$ ,  $\bar{\phantom{x}}$  – символи  $R$ -операцій, які визначаються відповідно до [5]:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \bar{x} = -x. \quad (15)$$

Функції  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , у формулах (13)–(15) визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \geq 0, & F_2 &= \frac{1}{2b}(b^2 - y^2) \geq 0, \\ F_3 &= \frac{1}{2c_m}(c_m^2 - x^2) \geq 0, & F_4 &= \frac{1}{2d_m}(d_m^2 - y^2) \geq 0, \\ F_5 &= \frac{1}{2c_b}(x^2 - c_b^2) \geq 0, & F_6 &= \frac{1}{2d_b}(y^2 - d_b^2) \geq 0. \end{aligned}$$

На рис. 4 представлено графіки обчислених залежностей критичного навантаження  $N_{\text{cr}} = \lambda_{\text{cr}} \frac{E_2 h^3}{4b^2}$ , де  $\lambda_{\text{cr}}$  – безрозмірний параметр, від співвідношення сторін  $a/b$  для випадку пластин з отворами, симетричними відносно осі  $Ox$  (рис. 3б), для різних варіантів розмірів отворів (крива **1** відповідає варіанту  $I\text{-}i$ , крива **2** – варіанту  $I\text{-}ii$ , крива **3** – варіанту  $I\text{-}iii$ ) при граничних умовах **1-го типу**. Обчислення виконано при  $d_m/b = 0.2$ .

Аналогічні графіки для пластин у випадку граничних умов **2-го типу** наведено на рис. 5.

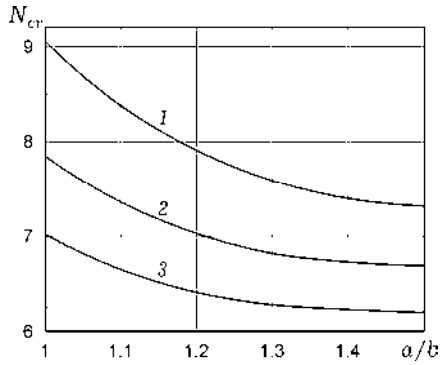


Рис. 4

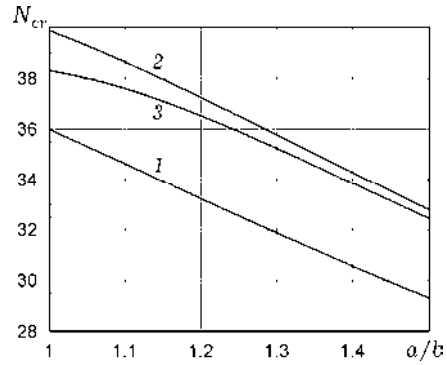


Рис. 5

На рисунках бачимо, що значення критичного навантаження  $N_{cr}$  монотонно спадає при зростанні відношення довжин сторін  $a/b$  для **1-го** і **2-го типу** граничних умов і для усіх трьох розглянутих варіантів розмірів отворів.

Поведінка кривих критичного навантаження  $N_{cr}$  у випадку пластини з вільними отворами, симетричними відносно осі  $Oy$  (рис. 3в), є подібною до розглянутого вище випадку симетрії отворів відносно осі  $Ox$ .

Числові значення критичного навантаження  $N_{cr}$  для пластин з вільними отворами, симетричними відносно осі  $Ox$  (рис. 3б), у випадку граничних умов **1-го типу** для усіх трьох варіантів розмірів отворів наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Варіант розмірів отвору	$N_{cr}$						
	$a/b$	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
<b>I-i</b>		9.08	8.39	7.91	7.59	7.40	7.31
<b>I-ii</b>		7.76	7.35	6.99	6.85	6.75	6.72
<b>I-iii</b>		6.65	6.54	6.43	6.35	6.32	6.30

Числові значення критичного навантаження  $N_{cr}$  для пластин з отворами, симетричними відносно осі  $Ox$  (рис. 3б), у випадку граничних умов **2-го типу** для усіх трьох варіантів розмірів отворів наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Варіант розмірів отвору	$N_{cr}$						
	$a/b$	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
<b>I-i</b>		36.99	36.20	35.19	34.02	32.79	31.54
<b>I-ii</b>		33.05	33.51	33.72	33.82	33.58	32.80
<b>I-iii</b>		26.29	29.09	30.60	30.83	31.03	31.23

Аналіз одержаних результатів показує, що при граничних умовах **2-го типу** значення критичного навантаження значно перевищує відповідні значення для випадку граничних умов **1-го типу**. Таким чином, пластини з граничними умовами **2-го типу** є більш стійкими порівняно з пластинами з граничними умовами **1-го типу**.



На рис. 6 наведено перші чотири форми коливань жорстко закріпленої квадратної пластини  $a/b = 1$  з граничними умовами **2-го типу** з двома отворами, симетричними відносно осі  $Oy$  (рис. 3в), при  $c_m/b = 0.2$  для варіанту розмірів отворів **I-iii**:  $c_b/b = 0.25$ ,  $d_b/b = 0.2$ . Безрозмірні власні частоти визначали за формулою  $\Lambda_i = \Omega_i(2b)^2 \sqrt{\frac{12(1-\nu_1\nu_2)}{E_2 h^2}}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

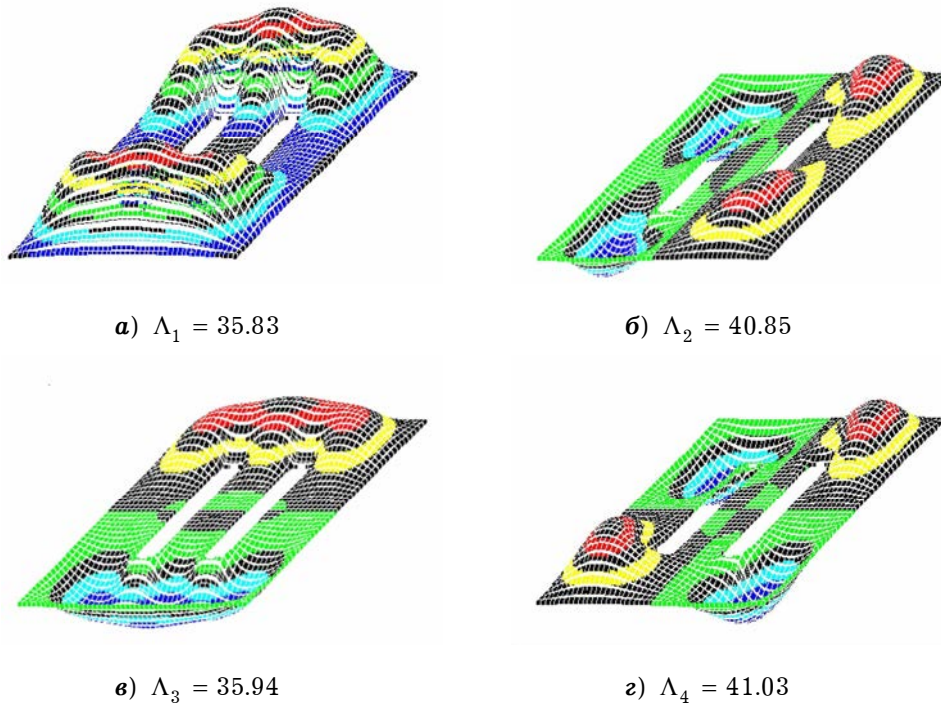


Рис. 6

У табл. 3 наведено значення власних частот  $\Lambda_1$  для різних значень навантаження  $P_{\text{load}}/N_{\text{cr}}$  для жорстко закріплених квадратної,  $a/b = 1$ , і прямокутної,  $a/b = 1.5$ , пластин з двома отворами при граничних умовах **2-го типу** для декількох варіантів розмірів отворів.

Таблиця 3

		$\Lambda_1$					
$a/b$	$P_{\text{load}}/N_{\text{cr}}$	0	0.25	0.5	0.75	0.95	0.99
1	<b>I-i</b>	16.66	13.17	9.32	5.05	1.14	0.03
	<b>I-ii</b>	28.75	26.77	20.41	10.92	2.39	0.05
	<b>II-i</b>	10.14	9.12	8.02	6.51	1.80	0.04
	<b>II-ii</b>	26.40	24.99	22.73	14.09	3.90	0.01
1.5	<b>I-i</b>	6.36	4.94	3.45	1.85	0.40	0.01
	<b>I-ii</b>	10.68	8.21	5.65	2.97	0.64	0.01
	<b>II-i</b>	7.24	6.43	5.04	2.84	0.62	0.01
	<b>II-ii</b>	11.72	9.02	6.20	3.26	0.72	0.01

Для пластин з отворами, розташованими симетрично відносно осі  $Ox$  (рис. 3б), значення власних частот більші, ніж відповідні значення для пластин з отворами, симетричними відносно осі  $Oy$  (рис. 3в). Зі зростанням навантаження власні частоти зменшуються, що відповідає фізичному сенсу.

**Висновки.** Проілюстровано застосування теорії  $R$ -функцій і варіаційного методу Рітца для дослідження стійкості шаруватих пластин з отворами в рамках уточненої теорії першого порядку типу Тимошенка. На основі запропонованої методики, яка враховує докритичний стан пластини, розроблено програмне забезпечення для системи *POLE-RL*, яке було протестоване на прикладі шаруватої пластини з одним вільним отвором. Порівняння одержаних результатів з відомими показало добре їх узгодження. З використанням розробленого програмного комплексу розв'язано задачі стійкості тришарових прямокутних пластин з двома прямокутними отворами при різних умовах їх закріплення і розташування. За допомогою теорії  $R$ -функцій побудовано відповідні системи координатних функцій. Встановлено, що більш стійкими є пластини з жорстко закріпленими отворами, які розташовані симетрично відносно осі, паралельно до якої діє стискувальне навантаження.

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
2. Курпа Л. В., Мазур О. С., Ткаченко В. В. Параметричні коливання багатошарових пластин складної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 2. – С. 136–150.  
Те саме: Kurpa L. V., Mazur O. S., Tkachenko V. V. Parametric vibration of multilayer plates of complex shape // J. Math. Sci. – 2014. – **203**, No. 2. – P. 165–184.
3. Курпа Л. В., Мазур О. С., Шматко Т. В. Применение теории  $R$ -функций к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2016. – 491 с.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – Москва: Гостехиздат, 1957. – 464 с.  
Те саме: Lekhnitskii S. G. Anisotropic plates. – New York etc.: Gordon and Breach Sci. Pub., 1968. – 534 p.
5. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые её приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
6. Рвачев В. Л., Шевченко А. Н. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. – Киев: Техніка, 1988. – 197 с.
7. Ткаченко В. В. Исследование динамической устойчивости многослойных пластин с отверстиями // Вісн. Нац. техн. ун-ту «ХПИ». Сер. Мат. моделювання в техніці і технологіях. – 2018. – № 3(1279). – С. 131–139.
8. Al Qablan H., Katkhuda H., Dwairi H. Assessment of the buckling behavior of square composite plates with circular cutout subjected to in-plane shear // Jordan J. Civil Eng. – 2009. – **3**, No. 2. – P. 184–195.
9. Aydin Komur M., Faruk Sen, Akın Ataş, Nurettin Arslan. Buckling analysis of laminated composite plates with an elliptical/circular cutout using FEM // Adv. Eng. Softw. – 2010. – **41**, No. 2. – P. 161–164.
10. Dash S., Asha A. V., Sahu S. K. Stability of laminated composite curved panels with cutout using finite element method // In: Proc. 3rd Int. Conf. Theor., Appl. Comput. & Exper. Mech. (ICTACEM-2004), Dec. 28–31, 2004, IIT Kharagpur, India. – <http://hdl.handle.net/2080/316>.
11. Kulkarni P., Dhoble A., Padole P. A review of research and recent trends in analysis of composite plates // Sādhanā. – 2018. – **43**. – Article 96. – <https://doi.org/10.1007/s12046-018-0867-1>.
12. Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V. Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2013. – **10**, No. 1. – P. 175–188.
13. Nagendra Singh Gaira, Nagendra Kumar Maurya Rakesh Kumar Yadav. Linear buckling analysis of laminar composite plates // Int. J. Eng. Sci. & Adv. Technol. [IJESAT]. – 2012. – **2**, No. 4. – P. 886–891.

14. Ravinder Reddy P., Surendar Reddy P., Shashikanth Reddy P. Buckling analysis of orthotropic laminated composite plate with rectangular cut-outs by using FEA // Int. J. Emerging Technol. Comput. & Appl. Sci. [IJETCAS] – 2014. – **10**, No. 1. – P. 75–81.
15. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 856 p.
16. Topal U., Uzman Ü. Maximization of buckling load of laminated composite plates with central circular holes using MFD method // Struct. Multidisc. Optim. – 2008. – **35**, No. 2. – P. 131–139.

#### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЯМИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ

*Предложена методика определения критического нагружения слоистых пластин с отверстиями, которые могут иметь различную геометрическую форму и способы их закрепления. Считается, что пластина сжимается статическими усилиями в срединной плоскости. Математическая постановка задачи формулируется в рамках уточненной теории первого порядка, основанной на гипотезе прямой линии (теории типа Тимошенко). Для решения задач используется метод Ритца и теория R-функций. Решение задачи теории упругости учитывает неоднородное докритическое состояние слоистой пластины. Достоверность предложенного подхода подтверждена сравнением полученных числовых результатов с известными. Эффективность предложенного подхода проиллюстрирована на примере исследования устойчивости слоистых пластин с одним и двумя четырехугольными отверстиями. Изучено влияние расположения отверстий, их размеров и способа закрепления на критическую нагрузку и собственные частоты.*

**Ключевые слова:** устойчивость слоистых пластин, теория R-функций, метод Ритца, координатные функции, максимальная нагрузка, частоты и формы колебаний.

#### SOLVING THE STABILITY PROBLEMS OF LAYERED PLATES WITH HOLES USING THE R-FUNCTIONS METHOD

*The method of determining the critical load of laminated plates with holes is proposed. Plates and holes in them can have different geometric shapes and conditions of their fixing. It is assumed that the plate is compressed by static load in the middle plane. The mathematical statement of the problem is formulated in the framework of the first order refined theory, which is based on the hypothesis of a straight line (the theory of the Timoshenko type). To solve problems the Ritz method and the theory of R-functions are used. The solution of the elasticity theory problem takes into account the inhomogeneous subcritical state of a layered plate. The probability of the proposed approach is confirmed by comparing the obtained numerical results with the known ones. The effectiveness of the proposed approach is illustrated by the example of the study of the stability of layered plates with one and two quadrangular holes. The influence of location of holes, their sizes and method of fastening on critical load and natural frequencies are studied.*

**Key words:** stability of layered plates, theory of R-functions, Ritz method, coordinate functions, critical loading, frequency and form of oscillations.

Нац. техн. ун-т  
«Харків. політехн. ін-т», Харків

Одержано  
21.03.18