

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ВІЛЬНОЮ, ЖОРСТКО, ГЛАДКО АБО ГНУЧКО ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ЗА ТЕПЛОІЗОЛЯЦІЇ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ДО НЕЇ СТРІЧКОВІЙ ОБЛАСТІ

За дії теплового диполя побудовано функції Гріна задач стаціонарної теплопровідності й термопружності за плоскої деформації півбезмежного тіла з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій підтримується нульова температура. Для розв'язання задачі теплопровідності використано логарифмічний потенціал подвійного шару, а для задачі термопружності – термопружний потенціал переміщень у безмежному тілі із дзеркально розташованими відносно межі півпростору диполями тепла. Для виконання крайових умов на межі тіла побудовано функції Буссінеска. Наведено явні вирази для температури, переміщень і напружень, за допомогою яких можна визначити термонапружений стан півпростору, зумовлений збуренням заданого теплового потоку паралельним до межі теплоізоляційним стрічковим включенням.

Ключові слова: півпростір, плоска деформація, теплоізольоване стрічкове включення, термопружність, тепловий диполь, функції Гріна.

На сьогодні математична теорія тріщин, пов'язана з розв'язуванням плоских задач теорії пружності, стаціонарної теплопровідності і термопружності для півбезмежних тіл з теплоізольованими тріщинами, достатньо повно опрацьована [3, 7, 11–13]. Виклад методики розв'язування таких задач за допомогою теорії функцій комплексної змінної (що дає можливість зводити задачі до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші та регулярним ядром, яке враховує взаємодію включення з межею півплощини) наведено у працях [3, 11, 12].

За своєю математичною постановкою і методом досліджень задачі теорії пружності для тіл з тріщинами подібні до задач теорії потенціалу, які добре вивчені в математичній фізиці. Тому застосування теорії потенціалу до розв'язання крайових задач в теорії термопружності є досить ефективними, коли наявність симетрії, безмежного чи півбезмежного простору призводить до спрощення в основних рівняннях чи граничних умовах [14, 15]. Зокрема, у [14] визначено термопружний стан у півпросторі, зумовлений внутрішнім джерелом тепла, за допомогою термопружних потенціалів і функцій Буссінеска, коли на межі тіла підтримується стала температура.

Тому при розв'язуванні двовимірних задач термопружності для півпростору зі стрічковими теплоактивними (теплоізольованими) включеннями доцільно використовувати логарифмічний потенціал простого (подвійного) шару, який є уявною (дійсною) частиною інтеграла типу Коші. При цьому густини потенціалів мають простий фізичний сенс: для задач теплопровідності – це потужність джерел або диполів тепла на місці розташування включень, а для задачі термопружності – це стрибки переміщень протилежних поверхонь тріщин. Цим методом у три етапи розв'язано задачі для півбезмежного тіла з перпендикулярним або паралельним до його межі теплоактивним включенням (тріщиною) [1, 2, 5, 6]: визначено температурне поле; встановлено зумовлений цим полем напружений стан в суцільному тілі, а за допомогою функцій Ері та Буссінеска виконуються крайові умови на межі півпростору; обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень в околі тріщини [2].

У пропонованій роботі визначено двовимірне стаціонарне температурне

* natalya_ivasko@ukr.net

поле і зумовлену ним плоску деформацію тіла з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за теплоізоляції у паралельній до неї стрічкової області. При цьому використано логарифмічний потенціал подвійного шару для визначення температури, термopружний потенціал переміщень і функцію Буссінеска (яка подана у вигляді суми двох гармонічних функцій). В результаті задачу термopружності зведено до розв'язування крайових задач для гармонічних функцій у півпросторі. За допомогою отриманих виразів для напружень і відомих формул [11] можна визначити коефіцієнти інтенсивності напружень в околі теплоізольованої тріщини.

1. Задача теплопровідності. Розглянемо півбезмежне ізотропне тіло з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею. Введемо декартову систему координат xOy з початком на межі півпростору $y = 0$ (рис. 1), паралельно до якої на віддалі h знаходиться стрічкове теплоізольоване включення L ширини 2ℓ .

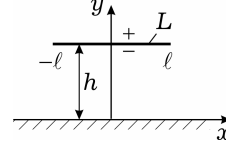


Рис. 1

Температурне поле у тілі з включенням подамо у вигляді

$$T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y), \quad (1)$$

де $t_0(x, y)$ – температурне поле у тілі без включення, $t(x, y)$ – температурне поле від збурення включенням температури $t_0(x, y)$.

Температуру $t(x, y)$ шукаємо у вигляді логарифмічного потенціалу подвійного шару з густиною диполів тепла $\gamma(x)$. Для цього в точках $x = \xi$, $y = h$ та $x = \xi$, $y = -h$ помістимо диполі тепла сталої інтенсивності γ (на межі тіла підтримується нульова температура). Тоді

$$t(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} (\ln r_1 + \ln r_2) = \frac{\gamma}{2\pi} \left(\frac{y-h}{r_1^2} + \frac{y+h}{r_2^2} \right), \quad (2)$$

де

$$r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-h)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+h)^2}.$$

Співвідношення (2) є функцією Гріна і її можна використати для визначення температурного поля, зумовленого диполями тепла, розподіленими в паралельній до межі області L з інтенсивністю $\gamma(\xi)$. Тоді в системі координат з початком у центрі області L температуру визначимо за формулою

$$t(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \gamma(\xi) \left[\frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} + \frac{y+2h}{(x-\xi)^2 + (y+2h)^2} \right] d\xi. \quad (3)$$

За властивістю потенціалу подвійного шару при $y = 0$

$$t^{\pm}(x) = \pm \frac{\gamma(x)}{2} + \frac{h}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\gamma(\xi)}{(x-\xi)^2 + 4h^2} d\xi. \quad (4)$$

Із формули (4) видно, що $t^+(x) > |t^-(x)|$ при $h < \infty$.

Граничну умову теплоізоляції на включенні запишемо так:

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{або} \quad \left. \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = - \left. \frac{\partial t_0(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad x \in L. \quad (5)$$

Для визначення потужності теплових диполів $\gamma(\xi)$ знайдемо похідну по нормалі до області L (тобто по y) від $t(x, y)$ з (3) і підставимо в граничну умову теплоізоляції (5). Тоді при $y = 0$, врахувавши, що

$$q(x) = -\lambda \left. \frac{\partial t_0(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2},$$

де $q(x, y)$ – тепловий потік температурного поля $t_0(x, y)$, маємо гіперсингулярне інтегральне рівняння в безрозмірних величинах (віднесених до ℓ):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 \gamma(\xi) \ln \frac{1}{|x - \xi|} d\xi - \int_{-1}^1 \gamma(\xi) Q(x, \xi) d\xi = 2\pi \frac{\ell}{\lambda} q(x), \quad |x| \leq 1. \quad (6)$$

Тут

$$Q(x, \xi) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln((x - \xi)^2 + 4d^2), \quad d = \frac{h}{\ell}.$$

Для побудови розв'язку рівняння (6) подамо потужність теплових диполів і тепловий потік у вигляді розвинення за поліномами Чебишова 2-го роду $U_k(x)$:

$$\gamma(x) = \sqrt{1 - x^2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k U_k(x), \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k U_k(x). \quad (7)$$

Підставивши (7) у (6) і використавши спектральне співвідношення [10]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} U_k(\xi) \ln \frac{1}{|x - \xi|} d\xi = -\pi(k + 1) U_k(x), \quad |x| \leq 1,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[(k + 1) U_k(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q(x, \xi) \sqrt{1 - \xi^2} U_k(\xi) d\xi \right] = \\ = -\frac{2\ell}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} q_k U_k(x), \quad |x| \leq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Рівність (8) помножимо на $\sqrt{1 - x^2} U_n(x)$, проінтегруємо за змінною x на інтервалі $(-1, 1)$ і використаємо співвідношення ортогональності поліномів Чебишова. В результаті отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$b_n(n + 1) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k B_{kn} = -\frac{2\ell}{\lambda} q_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

де

$$B_{kn} = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q(x, \xi) \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - x^2} U_k(\xi) U_n(x) d\xi dx.$$

Після розв'язання системи (9) чисельним методом знайдемо коефіцієнти b_k .

Інтегральне рівняння (6) можна розв'язати наближено, якщо різницеве регулярне ядро $Q(x, \xi)$ замінити виродженим. Для цього розкладемо $Q(x, \xi)$ при $|x - \xi| < 2d$ в ряд Тейлора і подамо у вигляді ряду

$$Q(x, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x) U_m(\xi). \quad (6)$$

З (6) отримаємо інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 \gamma(\xi) \ln \frac{1}{|x-\xi|} d\xi = f(x), \quad |x| < 1, \quad (10)$$

де

$$f(x) = \frac{2\ell}{\lambda} q(x) + \sum_{m=0}^{\infty} C_m Q_m(x), \quad C_m = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \gamma(\xi) U_m(\xi) d\xi.$$

Розв'язок інтегрального рівняння (10) має вигляд (7), де

$$b_k = -\frac{1}{k+1} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) U_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

Якщо у розвиненні ядра $Q(x, \xi)$ обмежитися трьома членами ряду, тоді

$$Q(x, \xi) = \frac{1}{4d^2} \left[1 - 3 \left(\frac{x-\xi}{2d} \right)^2 + 5 \left(\frac{x-\xi}{2d} \right)^4 \right] = \sum_{m=0}^4 Q_m(x) U_m(\xi),$$

де

$$Q_0(x) = D \left[\left(5x^2 - 12d^2 + \frac{15}{2} \right) x^2 + (16d^2 - 3)d^2 + \frac{5}{8} \right],$$

$$Q_1(x) = -Dx(10x^2 - 12d^2 + 5), \quad Q_2(x) = \frac{3}{16} D(40x^2 - 16d^2 + 5),$$

$$Q_3(x) = -\frac{5}{2} Dx, \quad Q_4(x) = \frac{5}{16} D, \quad D = \frac{1}{64d^6}.$$

2. Задача термопружності. Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді суми:

$$u(x, y) = \bar{u}(x, y) + \bar{\bar{u}}(x, y),$$

$$\sigma(x, y) = \bar{\sigma}(x, y) + \bar{\bar{\sigma}}(x, y),$$

де доданки $\bar{u}(x, y)$, $\bar{\sigma}(x, y)$ характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, зумовлений дзеркально розташованими відносно осі Ox тепловими диполями, а доданки $\bar{\bar{u}}(x, y)$, $\bar{\bar{\sigma}}(x, y)$ – переміщення і напруження у півплощині $y \geq 0$, які забезпечують виконання умов на межі, яка

– *вільна*:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{xy}(x, 0) = 0, \quad (11)$$

– *жорстко закріплена*:

$$u_x(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad (12)$$

– *гладко закріплена*:

$$u_y(x, 0) = 0, \quad \sigma_{xy}(x, 0) = 0, \quad (13)$$

– *гнучко закріплена*:

$$u_x(x, 0) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = 0. \quad (14)$$

2.1. Напружено-деформований стан безмежного тіла. Для визначення напружено-деформованого стану безмежного тіла, зумовленого тепловими диполями, використаємо термопружний потенціал переміщень, який задовольняє рівняння Пуассона [8]

$$\Delta \Psi(x, y) = mt(x, y). \quad (15)$$

Тут $m = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha$, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного тепло-

вого розширення. Тоді напруження і переміщення визначаємо за формулами

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx} &= -2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, & \bar{\sigma}_{yy} &= -2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, & \bar{\sigma}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \\ \bar{u}_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}, & \bar{u}_y &= \frac{\partial \Psi}{\partial y},\end{aligned}\quad (16)$$

де G – модуль зсуву.

Розв'язок рівняння (15) з урахуванням виразу для температури (2) має вигляд

$$\Psi(x, y) = \frac{m\gamma}{4\pi} [(y-h)\ln r_1 + (y+h)\ln r_2 - y]. \quad (17)$$

З (16) і (17) знаходимо

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx}(x, y) &= -Gm \left[t(x, y) + \frac{\gamma}{\pi} (x-\xi)^2 \left(\frac{y-h}{r_1^4} + \frac{y+h}{r_2^4} \right) \right], \\ \bar{\sigma}_{yy}(x, y) &= -Gm \left[t(x, y) - \frac{\gamma}{\pi} (x-\xi)^2 \left(\frac{y-h}{r_1^4} + \frac{y+h}{r_2^4} \right) \right], \\ \bar{\sigma}_{xy}(x, y) &= \frac{Gm\gamma}{2\pi} (x-\xi) \left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - 2 \left(\frac{(y-h)^2}{r_1^4} + \frac{(y+h)^2}{r_2^4} \right) \right], \\ \bar{u}_x(x, y) &= \frac{m\gamma}{4\pi} (x-\xi) \left(\frac{y-h}{r_1^2} + \frac{y+h}{r_2^2} \right), \\ \bar{u}_y(x, y) &= \frac{m\gamma}{2} \left[\ln r_2 r_1 - 1 + \frac{(y-h)^2}{r_1^2} + \frac{(y+h)^2}{r_2^2} \right].\end{aligned}\quad (18)$$

В результаті з (18) на межі при $y = 0$ ($h \neq 0$) маємо

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx}(x, 0) &= 0, & \bar{\sigma}_{yy}(x, 0) &= 0, \\ \bar{\sigma}_{xy}(x, 0) &= \frac{Gm\gamma}{\pi} (x-\xi) \left(\frac{1}{(x-\xi)^2 + h^2} - \frac{2h^2}{((x-\xi)^2 + h^2)^2} \right), \\ \bar{u}_x(x, 0) &= 0, \\ \bar{u}_y(x, 0) &= \frac{m\gamma}{4\pi} \left(\ln((x-\xi)^2 + h^2) - 1 + \frac{2h^2}{(x-\xi)^2 + h^2} \right).\end{aligned}\quad (19)$$

З аналізу формул (18) і (19) бачимо, що крайові умови (14) повністю задовольняються. Отже, одержано розв'язок задачі термопружності для півбезмежного тіла, межа якого закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою ($u_x = 0$, $\sigma_{yy} = 0$) за нульової температури на ній.

2.2. Визначення переміщень і напружень через функцію Буссінеска. Для виконання крайових умов на межі використаємо функцію Буссінеска $\Phi(x, y)$, яку подамо у вигляді суми двох гармонічних функцій $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$:

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) + y\psi(x, y).$$

Тоді [9]

$$\bar{u}_x(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_y(x, y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} - 4(1 - \nu)\psi, \\
\bar{\sigma}_{xx}(x, y) &= 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \\
\bar{\sigma}_{yy}(x, y) &= 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2(2 - \nu) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \\
\bar{\sigma}_{xy}(x, y) &= 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Згідно з результатами праць [1, 5] і [14], врахувавши крайові умови (11)–(13), побудуємо функції Буссінеска та знайдемо переміщення і напруження для вільної, жорстко і гладко закріпленої межі.

– *Вільна межа:*

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= -\frac{m\gamma}{\pi}(1 - \nu) \left((y + 2h)(\ln r_2 - 1) + h - (x - \xi) \operatorname{arctg} \frac{x - \xi}{y + h} \right), \\
\psi(x, y) &= -\frac{m\gamma}{2\pi} \left[\ln r_2 + h \frac{y + h}{r_2^2} \right].
\end{aligned} \tag{21}$$

Підставивши (21) у (20), знайдемо напруження і переміщення

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x(x, y) &= -\frac{m\gamma}{2\pi} \left[(x - \xi)yH_1(x, y) + 2(1 - \nu) \left(h \frac{x - \xi}{r_2^2} - \operatorname{arctg} \frac{x - \xi}{y + h} \right) \right], \\
\bar{u}_y(x, y) &= \frac{m\gamma}{2\pi} \left[(1 - 2\nu) \left(\ln r_2 + h \frac{y + h}{r_2^2} \right) - yH_2(x, y) \right], \\
\bar{\sigma}_{xx}(x, y) &= \frac{Gm\gamma}{\pi} [2H_2(x, y) + yH_3(x, y)], \\
\bar{\sigma}_{yy}(x, y) &= -\frac{Gm\gamma}{\pi} yH_3(x, y), \\
\bar{\sigma}_{xy}(x, y) &= -\frac{Gm\gamma}{\pi} (x - \xi) [H_1(x, y) - 2yH_4(x, y)],
\end{aligned} \tag{22}$$

де

$$\begin{aligned}
H_1(x, y) &= \frac{r_2^2 - 2h(y + h)}{r_2^4}, \\
H_2(x, y) &= \frac{(y + 2h)r_2^2 - 2h(y + h)^2}{r_2^4}, \\
H_3(x, y) &= \frac{r_2^2 - 2(y + h)(y + 4h)}{r_2^4} + \frac{8h(y + h)^3}{r_2^6}, \\
H_4(x, y) &= \frac{(y + 2h)r_2^2 - 4h(y + h)^2}{r_2^6}.
\end{aligned}$$

Як бачимо з (19) і (22), крайові умови (11) виконуються.

Оскільки межа тіла вільна від навантаження, то для зняття дотичних напружень можемо використати функцію напружень Ері [8], яка у цьому випадку має вигляд

$$F(x, y) = \frac{Gm\gamma}{\pi} y \left(\ln r_2 + h \frac{y+h}{r_2^2} \right),$$

за допомогою якої знаходимо напруження за формулами

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

які збігаються з (22).

Через функцію напружень Ері не визначаються безпосередньо переміщення, тому вигідніше використовувати функцію Буссінеска.

– Жорстко закріплена межа:

$$\varphi(x, y) = 0,$$

$$\psi(x, y) = \frac{M\gamma}{2\pi} \left[\ln r_2 + h \frac{y+h}{r_2^2} - \frac{1}{2} \right], \quad M = \frac{m}{3-4\nu}. \quad (23)$$

Підставивши (23) у (20), знайдемо напруження і переміщення

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}}_x(x, y) &= \frac{M\gamma}{2\pi} (x - \xi) y H_1(x, y), \\ \bar{\bar{u}}_y(x, y) &= \frac{M\gamma}{2\pi} \left[y H_2(x, y) - (3-4\nu) \left(\ln r_2 + h \frac{y+h}{r_2^2} - \frac{1}{2} \right) \right], \\ \bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x, y) &= -\frac{GM\gamma}{\pi} [y H_3(x, y) + 2\nu H_2(x, y)], \\ \bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x, y) &= \frac{GM\gamma}{\pi} [y H_3(x, y) - 2(1-\nu) H_2(x, y)], \\ \bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x, y) &= -\frac{GM\gamma}{\pi} (x - \xi) [(1-2\nu) H_1(x, y) + 2y H_1(x, y)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Як впливає з (19) і (24), крайові умови (12) виконуються.

– Гладко закріплена межа:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -\frac{m\gamma}{2\pi} \left[(y+2h) \ln r_2 - \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} (y+h) - (x-\xi) \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{y+h} \right], \\ \psi(x, y) &= -\frac{m\gamma}{8\pi(1-\nu)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Підставивши (25) у (20), знайдемо переміщення і напруження:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}}_x(x, y) &= -\frac{m\gamma}{2\pi} \left[h \frac{x-\xi}{r_2^2} - \operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{y+h} \right], \\ \bar{\bar{u}}_y(x, y) &= -\frac{m\gamma}{2\pi} \left(\ln r_2 + h \frac{y+h}{r_2^2} - \frac{1}{2} \right), \\ \bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x, y) &= -\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x, y) = \frac{Gm\gamma}{\pi} H_2(x, y), \\ \bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x, y) &= -\frac{Gm\gamma}{\pi} (x - \xi) H_1(x, y). \end{aligned} \quad (26)$$

Як видно з (19) і (26), крайові умови (13) виконуються.

Співвідношення (18), (22), (24) і (26) є відповідними функціями Гріна, які можна використати для визначення термопружного стану, зумовленого нагрівом тіла диполями тепла, розподіленими по певній області.

Якщо в області теплоізоляції L задано диполі тепла інтенсивності $\gamma(\xi)$, то у системі координат з початком у центрі області L переміщення і напруження знайдемо за формулами

$$u_i^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \gamma(\xi) u_i(x, h, \xi) d\xi,$$

$$\sigma_{ij}^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \gamma(\xi) \sigma_{ij}(x, h, \xi) d\xi.$$

Приклад. Задамо у півпросторі температурне поле $t_0(x, y) = q_0 y$, $q_0 = q/\lambda$, що відповідає однорідному тепловому потоку q на безмежності, спрямованому перпендикулярно до межі. Така температура не викликає напружень у півпросторі без включення, тому будемо визначати тільки напруження, зумовлені збуреним температурним полем $t(x, y)$.

Тоді із (10), врахувавши (7), знаходимо потужність теплових диполів:

$$\gamma(x) = b_0 \sqrt{1-x^2} \left[1 - \frac{D(15-16d^2)}{2(16+5D)} U_2(x) - \frac{D}{32} U_4(x) \right],$$

де

$$b_0 = -\ell q_0 \left[\frac{16+5D}{8+D(15+64d^4-24d^2)} \right].$$

На рис. 2-7 наведено зміну температури $t^*(x) = t(x)/(\ell q_0)$ і напружень $\sigma_{ij}^*(x) = \sigma_{ij}(x)/(mG\ell q_0)$ для різних значень віддалі області теплоізоляції L від межі тіла: $d = h/\ell = 1, 3, 10$. Суцільними лініями зображено графіки, які відповідають $t^{*+}(x)$, штриховими – $t^{*-}(x)$.

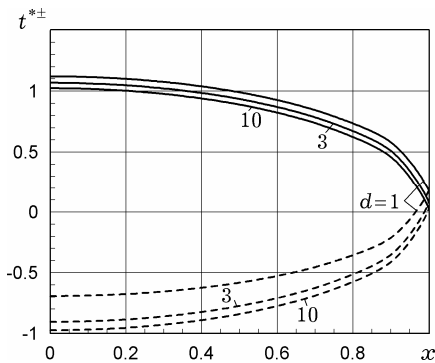


Рис. 2

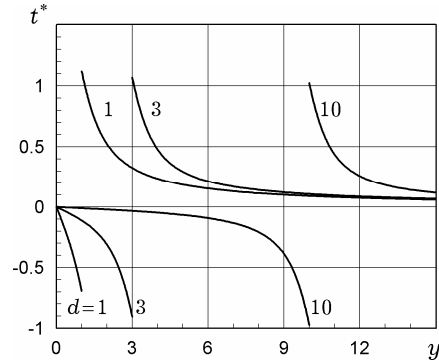


Рис. 3

Розподіл температури подано на рис. 2 в області L , а на рис. 3 – вздовж осі Oy ($x = 0$). При цьому температура зазнає розриву.

На рис. 4, рис. 5 наведено розподіл нормальних напружень в області теплоізоляції L ($0 \leq x \leq 1$), коли межа тіла жорстко закріплена. Як бачимо, нормальні напруження також мають розриви, а напруження $\sigma_{yy}^*(x, y)$ при віддаленні від межі ($d = 1, 3, 10$) прямують до температури тіла.

Отже, на основі числового аналізу можна зробити висновок, що при віддаленні від межі тіла (незалежно від умов закріплення межі) напруження $\sigma_{yy}^{*\pm}$ пропорційні до температури $t^{*\mp}(x)$ з протилежним знаком.

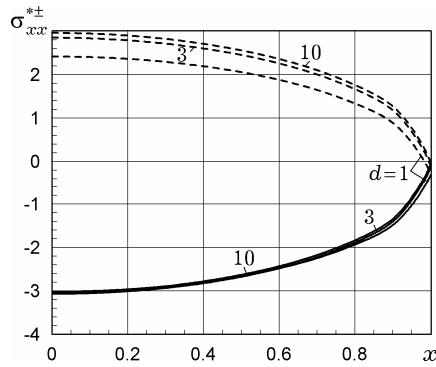


Рис. 4

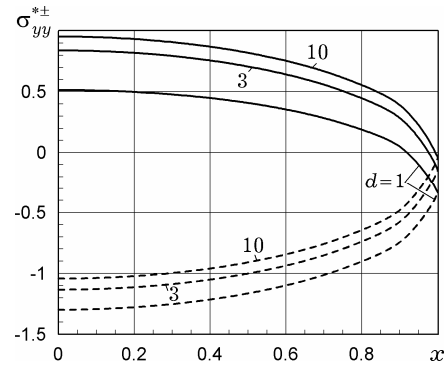


Рис. 5

На рис. 6 наведено розподіл нормальних напружень $\sigma_{xx}^*(x)$ на межі тіла ($y = 0$), коли вона вільна від навантажень. Коли межа гнучко закріплена, $\sigma_{xx}^*(x) = 0$, для гладко закріпленої межі напруження $\sigma_{xx}^*(x)$ у два рази менші ($\sigma_{yy}^*(x) = -\sigma_{xx}^*(x)$), а для жорстко закріпленої межі напруження $\sigma_{xx}^*(x)$ відрізняються на $-\frac{\nu}{3-4\nu}$ ($\sigma_{yy}^*(x) = \frac{1-\nu}{\nu}\sigma_{xx}^*(x)$) від тих, що зображені на рис. 6, тому графіки для них не наводимо.

Розподіл дотичних напружень $\sigma_{xy}^*(x)$ на межі тіла подано на рис. 7, коли вона гнучко закріплена. Для жорстко закріпленої межі дотичні напруження відрізняються на $-\frac{1-2\nu}{3-4\nu}$ від тих, що наведені на рис. 7.

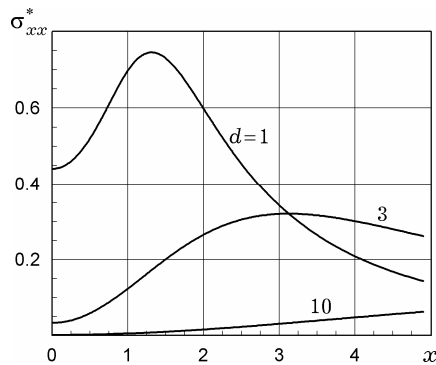


Рис. 6

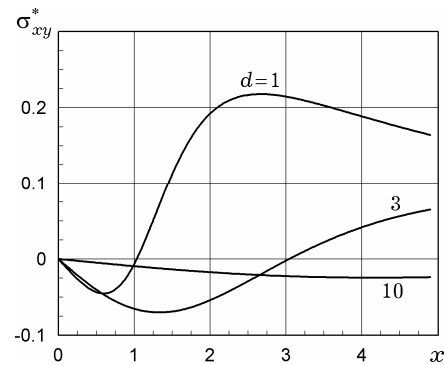


Рис. 7

Висновки. Отримано замкнутий розв'язок двовимірної задачі термопружності для півбезмежного тіла за дії диполя тепла із вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за нульової температури на ній. При формулюванні задачі теплопровідності постулюється наявність диполів тепла на місці включення, потужність яких за заданого теплового потоку визначається з інтегрального рівняння, яке розв'язано чисельно та наближено шляхом заміни регулярного ядра виродженим з використанням поліномів Чебишова другого роду.

Для розв'язання задачі термопружності використано термопружний потенціал переміщень $\Psi(x, y)$ і функції Буссінеска, які дають змогу задовольнити крайові умови на межі. Отримані співвідношення для переміщень і напружень, які є відповідними функціями Гріна, використано для визначення термопружного стану півпростору, зумовленого теплонепроникним стрічковим включенням. При цьому використано логарифмічний потенціал

подвійного шару, який при переході через поверхню змінюється стрибкоподібно, тому температура і нормальні напруження в теплоізолюваній області також є розривними.

Поздовжній зсув тіла є еквівалентним до двовимірної задачі стаціонарної теплопровідності [4]. Тому розв'язок наведеної тут задачі теплопровідності можна використати при дослідженні напруженого стану півпростору з паралельною до межі тріщиною за поздовжнього зсуву, якщо температурі $t(x, y)$ поставити у відповідність переміщення $u_z(x, y)$, тепловим потокам – дотичні напруження, а коефіцієнту теплопровідності – модуль зсуву.

1. Івасько Н. М. Двовимірна задача термопружності для півпростору з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за тепловиділення у паралельній до неї стрічковій області // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 144–151.
2. Кит Г. С., Івасько Н. М. Плоская деформация полубесконечного тела с перпендикулярной к его границе теплоактивной трещиной // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 30–37.
3. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 280 с.
4. Кит Г. С. Про аналогію між поздовжнім зсувом і стаціонарною теплопровідністю тіл з включеннями та тріщинами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1977. – № 4. – С. 334–338.
5. Кит Г. С., Івасько Н. М. Двовимірна задача термопружності для півпростору за тепловиділення у паралельній до його межі стрічковій області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 3. – С. 147–155.
Te same: Kit H. S., Ivas'ko N. M. Two-dimensional problem of thermoelasticity for a half space in the presence of heat release in a ribbon-shaped domain parallel to its boundary // J. Math. Sci. – 2019. – **236**, No. 2. – P. 172–184.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4104-6>.
6. Кит Г. С., Івасько Н. М. Двовимірна задача термопружності для півпростору з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за тепловиділення у перпендикулярній до неї стрічковій області // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – № 3. – С. 83–86.
7. Мартиняк Р. М., Середницька Х. І. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
8. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – Москва: Физматгиз, 1958. – 168 с.
Te same: Melan E., Parkus H. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. – Wien: Springer, 1953. – 114 S.
9. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
То же: Nowacki W. Thermoelasticity. – London: Pergamon Press, 1962. – xii+628 p.
10. Попов Г. Я., Реут В. В., Моисеев М. Г., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів: Навч. посібник. – Одеса: Астропринт, 2010. – 116 с.
11. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
12. Саврук М. П., Зеленьяк В. М. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: Растр-7, 2009. – 212 с.
13. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
14. Min-zhóng W., Ke-fu H. Thermoelastic problems in the half space – An application of the general solution in elasticity // Appl. Math. Mech. – 1991. – **12**, No. 9. – P. 849–862.
– <https://doi.org/10.1007/BF02458250>.
15. Wang M., Xu B., Gao C. Recent general solutions in linear elasticity and their applications // Appl. Mech. Rev. – 2008. – **61**, No. 9. – P. 1–20.
– DOI: 10.1115/1.2909607.

**ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА
СО СВОБОДНОЙ, ЖЕСТКО, ГЛАДКО ИЛИ ГИБКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ
ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ К НЕЙ ЛЕНТОЧНОЙ ОБЛАСТИ**

При действии теплового диполя построены функции Грина задач стационарной теплопроводности и термоупругости при плоской деформации полубесконечного тела со свободной, жестко, гладко или гибко закрепленной границей, на которой поддерживается нулевая температура. При этом использован гармонический потенциал двойного слоя для решения задачи теплопроводности, а для задачи термоупругости – термоупругий потенциал перемещений в бесконечном теле с зеркально расположенными относительно границы полупространства диполями тепла. Для удовлетворения краевых условий на границе тела построены функции Буссинеска. Приведены явные выражения для температуры, перемещений и напряжений, с помощью которых можно определить термоупругое состояние полупространства, вызванное возмущением заданного теплового потока параллельным к границе теплонепроницаемым ленточным включением.

Ключевые слова: полупространство, плоская деформация, теплоизолированное ленточное включение, термоупругость, тепловой диполь, функции Грина.

**TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A HALF-SPACE
WITH A FREE, RIGIDLY, SMOOTHLY OR FLEXIBLY CLAMPED BOUNDARY WITH
HEAT-INSULATION IN A PARALLEL TO IT RIBBON-LIKE DOMAIN**

Under the action of a thermal dipole, the Green's functions of the problems of stationary heat conductivity and thermoelasticity are constructed for plane deformation of a semi-infinite body with a free, rigidly, smoothly or flexibly clamped boundary on which zero temperature is maintained. In this case, the harmonic potential of double layer is used to solve the heat conduction problem, and the thermoelastic displacement potential in an infinite body with a heat dipoles that are mirror-like relative to the boundary of the half-space is used to solve the thermoelasticity problem. To satisfy the boundary conditions on the boundary of the body the Boussinesq's functions are constructed. Explicit expressions are given for temperature, displacements and stresses, with the help of which it is possible to determine the half-space thermoelastic state caused by a perturbation of a given heat flux in a parallel to the boundary by heat-proof ribbon-like domain.

Key words: half-space, plane strain, thermally insulated ribbon-like inclusion, thermoelasticity, thermal dipole, Green's functions.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів