УДК 517.983

Ю. С. Лінчук[*], С. С. Лінчук

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

У просторі функцій, аналітичних у довільній зірковій і m-симетричній відносно початку координат області комплексної площини. визначається узагальнений інтегральний оператор Бесселя m-го порядку $\mathcal{I}_m$. Встановлено еквівалентність цього оператора і вольтерівського оператора інтегрування m-го степеня. Побудовано згортку для узагальненого інтегрального оператора Бесселя. Вивчено деякі комутаційні властивості оператора $\mathcal{I}_m$.

Ключові слова: *узагальнений оператор Бесселя, гіпербесселевий оператор, узагальнений інтегральний оператор Бесселя, згортка Дюамеля, комутант оператора.*

Вступ. Нехай m – фіксоване натуральне число, $m \ge 2$, і $b_1, b_2, \dots, b_m$ – деякі комплексні числа. Через B_m позначимо узагальнений оператор Бесселя, який визначається формулою

$$B_m = \frac{d^m}{dz^m} + \frac{b_1}{z}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{z^{m-1}}\frac{d}{dz} + \frac{b_m}{z^m}. \tag{1}$$

Деякі властивості оператора (1) у різних функціональних просторах вивчалися в працях [8, 10, 12–16]. У випадку $b_m = 0$ оператор B_m досліджувався в [1, 7, 18].

Оператор B_m можна подати у вигляді

$$B_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{z^k}\frac{d^{m-k}}{dz^{m-k}},$$

де $b_0 = 1$. Через p позначимо такий многочлен:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \prod_{j=0}^{m-k-1} (t-j).$$

Вважаємо, що $\prod_{j=0}^{m-k-1} (t-j) = 1$ при $k = m$. Для довільного цілого невід'ємного n маємо, що $B_m(z^n) = p(n) z^{n-m}$. Надалі вважатимемо, що $p(n) \ne 0$ при $n = m, m+1, \dots$. Через $\mathcal{I}_m$ позначимо оператор, який на степені незалежної змінної діє за правилом

$$\mathcal{I}_m(z^n) = \frac{z^{n+m}}{p(n+m)}, \qquad n = 0, 1, \dots. \tag{2}$$

Оскільки $(B_m \mathcal{I}_m)(z^n) = z^n$, $n = 0, 1, \dots$, то оператор $\mathcal{I}_m$ у просторі многочленів є правим оберненим до оператора B_m. Тому природно називати його узагальненим інтегральним оператором Бесселя. У випадку $B_m = \dfrac{d^m}{dz^m}$ маємо $\mathcal{I}_m = \mathcal{J}^m$, де $\mathcal{J}$ – оператор вольтерівського інтегрування.

Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної

[*] yustlin@gmail.com

збіжності. Через $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ позначимо простір усіх лінійних неперервних операторів на $\mathcal{H}(G)$. Надалі вважатимемо, що m − фіксоване натуральне число, $m \ge 2$, G − довільна зіркова відносно точки $z = 0$ область в $\mathbb{C}$, яка інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $\frac{2\pi}{m}$, тобто $\omega G = G$, $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$.

Нагадаємо, що область G називають зірковою відносно точки $z = 0$, якщо для довільної точки z з області G відрізок, який з'єднує точки 0 та z, міститься в G. У випадку $\omega G = G$ область G називається m-симетричною відносно початку координат.

У цій статті встановлюється, що узагальнений інтегральний оператор Бесселя $\mathcal{I}_m$, який на степенях незалежної змінної визначається формулою (2), продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Далі будується згортка для оператора $\mathcal{I}_m$ і вивчаються деякі комутаційні властивості цього оператора. За допомогою узагальненого інтегрального оператора Бесселя будується інтегральний гіпербесселевий оператор.

1. Перетворення узагальненого інтегрального оператора Бесселя до оператора кратного інтегрування. Для комплексного числа a і цілого невід'ємного числа n через $(a)_n$ позначимо символ Похгаммера:

$$(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1) \qquad \text{при} \qquad n \ge 1, \ (a)_0 = 1.$$

Через q позначимо многочлен вигляду $q(t) = \prod_{k=1}^{m}(t-k+1)$. Нехай γ_r, $r = 0,\dots,m-1$, − довільні фіксовані ненульові комплексні числа. Покладемо

$$\gamma_{mn+r} = \gamma_r \prod_{j=1}^{n} \frac{p(mj+r)}{q(mj+r)}, \tag{3}$$

де $n = 1,2,\dots$, $r = 0,\dots,m-1$.

Теорема 1. *Нехай G − довільна зіркова відносно точки $z = 0$ область в $\mathbb{C}$, яка інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $\frac{2\pi}{m}$. Оператор S, який на степенях z визначається формулами*

$$S(z^n) = \gamma_n z^n, \qquad n = 0,1,\dots, \tag{4}$$

продовжується до ізоморфізму простору $\mathcal{H}(G)$.

Д о в е д е н н я. Нехай t_k, $k = 1,\dots,m$, − всі нулі многочлена $p(t)$, причому кожен нуль враховується стільки разів, якою є його кратність. Тоді $p(t) = \prod_{k=1}^{m}(t-t_k)$. Перетворимо числа γ_{mn+r}. При $n = 1,2,\dots$ і $r = 0,\dots,m-1$ маємо

$$\gamma_{mn+r} = \gamma_r \prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} \frac{mj+r-t_k}{mj+r-(k-1)} = \gamma_r \prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} \frac{j+\frac{r-t_k}{m}}{j+\frac{r-k+1}{m}} =$$

$$= \gamma_r \prod_{k=1}^{m} \frac{\left(1+\frac{r-t_k}{m}\right)_n}{\left(1+\frac{r-k+1}{m}\right)_n}.$$

Таким чином,

$$S(z^{mn+r}) = \gamma_r \prod_{k=1}^{m} \frac{\left(1 + \frac{r - t_k}{m}\right)_n}{\left(1 + \frac{r - k + 1}{m}\right)_n} z^{mn+r}, \tag{5}$$

при $n = 1, 2, \ldots$ і $r = 0, \ldots, m-1$. Рівність (5) виконується також і при $n = 0$, $r = 0, \ldots, m-1$.

Оскільки за припущенням $p(n) \neq 0$ при $n = m, m+1, \ldots$, то $t_k \neq m(n+1) + r$ при $n = 0, 1, \ldots$ і $r = 0, \ldots, m-1$. Тому $1 + \frac{r - t_k}{m} \neq -n$ при $k = 1, \ldots, m$, $r = 0, \ldots, m-1$, $n = 0, 1, \ldots$. Також $1 + \frac{r - k + 1}{m} \neq -n$ при $k = 1, \ldots, m$, $r = 0, \ldots, m-1$, $n = 0, 1, \ldots$. Крім того, $\gamma_r \neq 0$ при $r = 0, \ldots, m-1$. Тому за теоремою 3 [17] (див. також теорему 2 з [4] і лему 1 з [3]) оператор S продовжується до ізоморфізму простору $\mathcal{H}(G)$.

Надалі через S позначатимемо ізоморфізм, який діє в просторі $\mathcal{H}(G)$ і для якого виконуються рівності (4). Через $\mathcal{J}$ позначатимемо вольтерівський оператор інтегрування, який лінійно та неперервно діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом $(\mathcal{J}f)(z) = \int\limits_0^z f(t)\,dt$, де інтегрування здійснюється по відрізку, що з'єднує точки 0 та z.

Теорема 2. *Нехай G − довільна зіркова відносно точки $z = 0$ область в $\mathbb{C}$, яка інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $\frac{2\pi}{m}$. Тоді узагальнений інтегральний оператор Бесселя $\mathcal{I}_m$, який на степенях незалежної змінної визначаєтьcя формулами (2), формулою*

$$\mathcal{I}_m = S^{-1} \mathcal{J}^m S \tag{6}$$

продовжуєтьcя до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Д о в е д е н н я. Для довільних $n = 0, 1, \ldots$ та $r = 0, \ldots, m-1$ маємо

$$(S^{-1}\mathcal{J}^m S)(z^{mn+r}) = \gamma_{mn+r} (S^{-1}\mathcal{J}^m)(z^{mn+r}) =$$

$$= \frac{\gamma_{mn+r}}{q(m(n+1)+r)} S^{-1}(z^{m(n+1)+r}) =$$

$$= \frac{\gamma_{mn+r}}{\gamma_{m(n+1)+r}\, q(m(n+1)+r)} z^{m(n+1)+r} =$$

$$= \frac{z^{m(n+1)+r}}{p(m(n+1)+r)} = \mathcal{I}_m(z^{mn+r}).$$

Таким чином,

$$\mathcal{I}_m(z^{mn+r}) = (S^{-1}\mathcal{J}^m S)(z^{mn+r}) \tag{7}$$

при $n = 0, 1, \ldots$ та $r = 0, \ldots, m-1$. Оскільки оператор $S^{-1}\mathcal{J}^m S$ належить класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і за теоремою Рунге система $(z^n)_{n=0}^{\infty}$ є повною в просторі $\mathcal{H}(G)$, то з (7) випливає, що формулою (6) оператор $\mathcal{I}_m$ однозначно продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Надалі через $\mathcal{I}_m$ позначатимемо оператор з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, який визначається формулою (6). Нагадаємо, що оператори $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ називають еквівалентними в просторі $\mathcal{H}(G)$, якщо існує ізоморфізм S простору $\mathcal{H}(G)$, для якого виконується рівність $SA = BS$.

З теореми 2 випливає правильність наступного твердження.

Наслідок 1. *При виконанні умов теореми* 2 *оператор* $\mathcal{I}_m$ *у просторі* $\mathcal{H}(G)$ *є еквівалентним до оператора* $\mathcal{J}^m$.

2. Комутант узагальненого інтегрального оператора Бесселя. Нехай G − довільна зіркова відносно точки $z = 0$ область в $\mathbb{C}$, яка інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $\dfrac{2\pi}{m}$, а B_m − деякий оператор Бесселя вигляду (1), для якого $p(n) \ne 0$ при $n \ge m$. Нехай γ_r, $r = 0,\dots,m-1$, − довільні фіксовані ненульові комплексні числа, а числа γ_{mn+r}, $n = 1,2,\dots$, $r = 0,\dots,m-1$, визначаються формулами (3). Через S позначатимемо ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G)$, побудований у теоремі 1. Нехай D та $\mathcal{J}$ − оператори диференціювання та інтегрування.

Через D_α та $\mathcal{J}_\alpha$ позначатимемо оператори з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які визначаються формулами $D_\alpha = S^{-1}DS$, $\mathcal{J}_\alpha = S^{-1}\mathcal{J}S$. Оскільки

$$D_\alpha(z^n) = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} z^{n-1}, \qquad n \ge 1, \qquad D_\alpha(1) = 0,$$

$$\mathcal{J}_\alpha(z^n) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} z^{n+1}, \qquad n \ge 0,$$

де $\alpha_n = \dfrac{1}{\gamma_n n!}$, $n = 0,1,\dots$, то D_α та $\mathcal{J}_\alpha$ є відповідно операторами узагальненого диференціювання та узагальненого інтегрування, побудовані за послідовністю $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$ [2].

Символом «$*$» позначимо згортку Дюамеля [11] у просторі $\mathcal{H}(G)$, яка визначається формулою

$$(f * g)(z) = \int_0^z f(z-t)g(t)\,dt.$$

При цьому оператор інтегрування $\mathcal{J}$ є мультиплікатором згортки Дюамеля, тобто $\mathcal{J}(f * g) = (\mathcal{J}f) * g$ для довільних функцій $f, g \in \mathcal{H}(G)$.

Формулою

$$f \circledast g = S^{-1}((Sf) * (Sg))$$

означимо деяку згортку, тобто білінійну, комутативну та асоціативну операцію на просторі $\mathcal{H}(G)$. Оператор $\mathcal{J}_\alpha$ є мультиплікатором згортки «$\circledast$», оскільки $\mathcal{J}_\alpha(f \circledast g) = (\mathcal{J}_\alpha f) \circledast g$ для довільних функцій $f, g \in \mathcal{H}(G)$. З огляду на те, що $\mathcal{I}_m = \mathcal{J}_\alpha^m$, то операція «$\circledast$» є згорткою для оператора $\mathcal{I}_m$, тобто оператор $\mathcal{I}_m$ є мультиплікатором згортки «$\circledast$». Зауважимо, що в інших функціональних просторах в іншій формі згортку для інтегрального оператора Бесселя другого порядку побудовано в [11].

Опишемо комутант узагальненого інтегрального оператора Бесселя. Через P_k позначимо проектори з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які визначаються формулами

$$(P_k f)(z) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \omega^{-kj} f(\omega^j z), \qquad \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right), \quad k = 0,\dots,m-1.$$

Теорема 3. *Нехай G − довільна зіркова відносно точки $z = 0$ область в $\mathbb{C}$, яка є інваріантною відносно повороту навколо початку координат на кут $\frac{2\pi}{m}$. Для того щоб оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ був переставним з узагальненим інтегральним оператором Бесселя $\mathcal{I}_m$, необхідно та достатньо, щоб він зображався формулою*

$$Tf = \sum_{k=0}^{m-1} D_\alpha^{k+1}(\psi_k \circledast (P_k f)),$$

де ψ_k, $k = 0,\dots,m-1$, − деякі функції з простору $\mathcal{H}(G)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки узагальнений інтегральний оператор Бесселя $\mathcal{I}_m$ є еквівалентним у просторі $\mathcal{H}(G)$ до оператора $\mathcal{J}^m$ і виконується рівність (6), то оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ буде переставним з оператором $\mathcal{I}_m$ тоді й тільки тоді, коли він зображається формулою $T = S^{-1}\tilde{T}S$, де $\tilde{T}$ − деякий оператор з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, який комутує з оператором $\mathcal{J}^m$. Загальний вигляд операторів $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які є переставними з оператором $\mathcal{J}^m$ в $\mathcal{H}(G)$ дається формулою

$$\tilde{T}f = \sum_{k=0}^{m-1} D^{k+1}(\varphi_k * (P_k f)),$$

де φ_k, $k = 0,\dots,m-1$, − деякі функції з простору $\mathcal{H}(G)$ [5, 6, 11]. Тому оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ буде переставним з оператором $\mathcal{I}_m$ тоді й тільки тоді, коли він зображається формулою

$$Tf = \sum_{k=0}^{m-1} S^{-1}D^{k+1}(\varphi_k * (P_k S f)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (S^{-1}DS)^{k+1} S^{-1}(\varphi_k * (P_k S f)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} D_\alpha^{k+1} S^{-1}((S\psi_k) * (SP_k f)) = \sum_{k=0}^{m-1} D_\alpha^{k+1}(\psi_k \circledast (P_k f)),$$

де ψ_k − деякі функції з простору $\mathcal{H}(G)$, причому $\psi_k = S^{-1}\varphi_k$, $k = 0,\dots,m-1$. Тут використано те, що діагональні оператори S та P_k, $k = 0,\dots,m-1$, є переставними.

Теорему доведено. ♦

Подібним чином одержуємо опис ізоморфізмів простору $\mathcal{H}(G)$, переставних з узагальненим інтегральним оператором Бесселя.

Теорема 4. *Нехай G − довільна зіркова відносно точки $z = 0$ область в $\mathbb{C}$, яка інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $\frac{2\pi}{m}$. Для того щоб оператор T був ізоморфізмом простору $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, переставним з узагальненим інтегральним оператором Бесселя $\mathcal{I}_m$, необхідно та достатньо, щоб він зображався формулою*

$$Tf = \sum_{k=0}^{m-1} D_\alpha^{k+1}(\psi_k \circledast (P_k f)),$$

де ψ_k, $k = 0,\ldots,m-1$, *− деякі функції з простору* $\mathcal{H}(G)$, *для яких виконується умова*

$$\det\left\|\psi_i^{(k)}(0)\right\|_{k,i=0}^{m-1} \neq 0.$$

4. Застосування до гіпербесселевих інтегральних операторів. Оператор Бесселя вигляду (1) можна подати у такій формі:

$$B_m = z^{-m}\prod_{k=1}^{m}\left(z\frac{d}{dz} + a_k\right), \tag{8}$$

де a_k, $k = 1,\ldots,m$, − деякі комплексні числа (див. [15, 18]). I. H. Dimovski визначив і вивчив [9] властивості гіпербесселевих операторів вигляду

$$\tilde{B}_m = z^{-\ell}\prod_{k=1}^{m}\left(z\frac{d}{dz} + \ell\gamma_k\right), \tag{9}$$

де ℓ − деяке натуральне число, а γ_k, $k = 1,\ldots,m$, − деякі комплексні числа.

Нехай $\alpha = \left[-\ell - \ell \min\limits_{k=1,\ldots,m}(\operatorname{Re}\gamma_k)\right] + 1$, де $[a]$ − ціла частина числа a. При виконанні умови $\alpha > 0$ у [8] вивчалися деякі властивості гіпербесселевих операторів у спеціальних просторах аналітичних функцій.

У роботі [8] до гіпербесселевого оператора $\tilde{B}_m$ визначається правий обернений оператор у вигляді

$$(Lf)(z) = \frac{z^\ell}{\ell^m}\int_0^1\ldots\int_0^1 f(z(t_1 t_2 \ldots t_m)^{1/\ell})\prod_{k=1}^{m} t_k^{\gamma_k}\, dt_1 \ldots dt_m. \tag{10}$$

Для збіжності інтеграла в правій частині формули (10) достатньо, щоб для функції $f(z)$ точка $z = 0$ була нулем, причому кратність цього нуля повинна бути не меншою від α. Тому у [8] властивості оператора (10), який природно називати гіпербесселевим інтегральним оператором, вивчалися в просторі $\mathcal{H}_\alpha(G) = z^\alpha \mathcal{H}(G)$, який є підпростором простору $\mathcal{H}(G)$.

Зобразимо оператор $\tilde{B}_m$ у вигляді

$$\tilde{B}_m = z^{m-\ell} B_m, \tag{11}$$

де $B_m = z^{-m}\prod\limits_{k=1}^{m}\left(z\dfrac{d}{dz} + \ell\gamma_k\right)$ − узагальнений інтегральний оператор Бесселя.

Нехай G − зіркова та інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $\dfrac{2\pi}{m}$ область комплексної площини. Вважатимемо, що

$$n + \ell\gamma_k \neq 0 \qquad \text{при} \qquad n \geq m, \qquad k = 1,\ldots,m, \tag{12}$$

а також, що виконується умова $\ell \geq m$. Покажемо, що в цьому випадку в просторі $\mathcal{H}(G)$ існує правий обернений оператор до оператора $\tilde{B}_m$. Оскільки виконується умова (12), то, за теоремою 2, існує узагальнений інтегральний оператор Бесселя $\mathcal{I}_m$, який належить до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Нехай U_z – оператор множення на незалежну змінну. Тоді оператор $L = \mathcal{I}_m U_z^{\ell-m}$ належить до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і є правим оберненим до оператора $\tilde{B}_m$. Отже, в цьому випадку формулою $L = \mathcal{I}_m U_z^{\ell-m}$ визначається гіпербесселевий інтегральний оператор, який належить до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

1. *Ключанцев М. И.* Сингулярные дифференциальные операторы с $r-1$ параметром и функции Бесселя векторного индекса // Сиб. мат. журн. – 1983. – **24**, № 3. – С. 47–62.
2. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. – Москва: Наука, 1981. – 320 с.
3. *Лінчук Ю. С.* Узагальнений оператор Бесселя – Струве та деякі його властивості // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 2. – С. 58–66.
   Те саме: *Linchuk Yu. S.* Generalized Bessel–Struve operator and its properties // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, No. 4. – P. 547–557.
   – DOI 10.1007/s10958-018-3833-x.
4. *Лінчук Ю. С.* Узагальнений оператор Данкла – Опдама та його властивості у просторах функцій, аналітичних в областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57,** № 4. – С. 7–17.
   Те саме: *Linchuk Yu. S.* Generalized Dunkl–Opdam operator and its properties in the spaces of functions analytic in domains // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 1. – P. 1–14.
5. *Нагнибида Н. И.* Об операторах, коммутирующих с кратным интегрированием в пространстве аналитических функций // Сиб. мат. журн. – 1986. – **27**, № 2. – С. 139–148.
   Те саме: *Nagnibida N. I.* Operators commuting with the multiple integration in the space of analytic functions // Sib. Math. J. – 1986. – **27**, No. 2. – P. 255–262.
   – https://doi.org/10.1007/BF00969393.
6. *Райчинов И.* Линейни оператори, действуващи в пространства от аналитични функции и комутиращи с фиксирана степен на оператора на интегрирането // Годишник на висшите технически учебни заведения. Математика. – София: Техника, 1970. – **6**, Кн. 2. – С. 23–32.
7. *Ben Hammouda M. S., Bennasr L., Fitouhi A.* On harmonic analysis associated with the hyper-Bessel operator on the complex plane. – 2014.
   – arXiv:1406.0137 [math.FA].
8. *Dimovski I.* Commutants of initial right inverses of hyper-Bessel differential operators // In: Complex Analysis and Generalized Functions: Proc. 5th Int. Conf., Varna, 1991. – Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci, 1993. – P. 56–62.
9. *Dimovski I.* Operational calculus for a class of differential operators // C. R. Acad. Bulg. Sci. – 1966. – **19**, No. 12. – P. 1111–1114.
10. *Dimovski I. H.* A convolutional method in operational calculus: Dr. Sci. Thesis. – 1976 [In Bulgarian].
11. *Dimovski I. H.* Convolutional calculus. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1990. – xi+184 p.
12. *Dimovski I. H.* Foundations of operational calculi for the Bessel-type differential operators // Serdica. Bulgariacae mathematicae publicationes. – 1975. – **1**, No. 1. – P. 51–63.
13. *Dimovski I. H., Kiryakova V. S.* Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer's G-function // In: Complex Analysis and Applications: Proc. 5th Int. Conf., Varna, 1983. – Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci,, 1985. – P. 45–66.
14. *Dimovski I., Kiryakova V.* The Obrechkoff integral transform: Properties and relation to a generalized fractional calculus // Numer. Funct. Anal. Optim. – 2000. – **21**, No. 1-2. – P. 121–144.
15. *Kiryakova V.* Generalized fractional calculus and applications. – Harlow: Longman Sci. & Technical, 1994. – 388 p.
16. *Kiryakova V.* From the hyper-Bessel operators of Dimovski to the generalized fractional calculus // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2014. – **17**, No. 4. – P. 977–1000.
   – https://doi.org/10.1007/s00009-017-0920-z.
17. *Linchuk S., Linchuk Yu.* On a class of differential-difference operators in spaces of analytic functions // Operat. Matrices. – 2017. – **11**, No. 4. – P. 1033–1046.
18. *Linchuk Yu. S.* On transmutation operators of the generalized Bessel operator in spaces of analytic functions // Mediterr. J. Math. – 2017. – **14**, No. 3. – 14: 121.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

В пространстве функций, аналитических в произвольной звёздной и m *-симметричной относительно начала координат области комплексной плоскости, определяется обобщённый интегральный оператор Бесселя* m *-го порядка* $\mathcal{I}_m$ *. Установлена эквивалентность этого оператора и вольтеровского оператора интегрирования* m *-й степени. Построена свёртка для обобщённого интегрального оператора Бесселя. Изучены некоторые коммутационные свойства оператора* $\mathcal{I}_m$ *.*

Ключевые слова*: обобщённый оператор Бесселя, гипербесселевый оператор, обобщённый интегральный оператор Бесселя, свёртка Дюамеля, коммутант оператора.*

SOME PROPERTIES OF THE GENERALIZED BESSEL INTEGRATION OPERATOR

In the space of functions analytic in an arbitrary starlike and m *-symmetric in the domain of the complex plane with respect to the origin, the generalized Bessel integration operator* $\mathcal{I}_m$ *of* m *-th order is defined. The equivalence of this operator and the Volterra integration operator of* m *-fold is established. A convolution for the generalized Bessel integration operator is constructed. Some commutative properties of the operator* $\mathcal{I}_m$ *are studied.*

Key words*: generalized Bessel operator, hyper-Bessel operator, generalized Bessel integration operator, Duhamel convolution, commutant of an operator.*

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
21.04.18