

## РІВНОВАГА ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ З ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ, ЯКА ПОСЛАБЛЕНА ПОХИЛИМ РОЗРІЗОМ

*Розглянуто нову задачу про рівновагу пружної півплощини з жорстко закріпленою межею, всередині якої виконано прямокутний розріз, що виходить під кутом до межі. Побудовано точний аналітичний розв'язок задачі та розроблено ефективний алгоритм матричної факторизації для розв'язання систем рівнянь Вінера – Гопфа. Задачу зведено до системи двох функціональних рівнянь Вінера – Гопфа, розв'язок якої побудовано в замкненому вигляді. В результаті отримано явні вирази для зміщень та напружень, які дають можливість охарактеризувати та кількісно оцінити напружено-деформований стан у півплощині залежно від геометричних параметрів розрізу та фізичних характеристик матеріалу півплощини.*

**Ключові слова:** пружна півплощина, похилий розріз, система Вінера – Гопфа.

**Вступ.** Розв'язання задач для пружних тіл з внутрішніми та поверхневими дефектами (тріщинами тощо) має як суто теоретичне, так і практичне значення. Щоб правильно кількісно оцінити розподіл напружень у таких тілах, потрібно знати особливості їх поведінки поблизу дефектів. У більшості випадків для цього слід будувати точні аналітичні розв'язки модельної задачі. Саме до таких можна віднести задачу про рівновагу пружної півплощини з жорстко закріпленою межею, яка послаблена похилим прямокутним розрізом, що виходить на її поверхню та перебуває під дією внутрішнього тиску. Основна мета дослідження – побудувати точний аналітичний розв'язок задачі та розробити ефективний алгоритм матричної факторизації, яка дасть можливість розв'язувати системи рівнянь Вінера – Гопфа.

Розглянута задача є мішаною крайовою задачею плоскої теорії пружності. Використовуючи метод інтегральних перетворень [8], такі задачі можна звести до функціонального рівняння Вінера – Гопфа або до системи таких рівнянь [4] залежно від кількості мішаних крайових умов. За таким підходом вдається побудувати точні розв'язки досить широкого класу статичних задач плоскої [1, 5–7, 14] та просторової [3] теорії пружності, а також динамічних задач [10, 16].

Основним кроком під час розв'язання рівнянь Вінера – Гопфа є факторизація коефіцієнтів. У скалярному випадку коефіцієнтами є мероморфні функції комплексної змінної, для яких розроблено досить потужний апарат факторизації. Якщо ж маємо справу із системою (векторним рівнянням), то її коефіцієнти – це матриці, елементами яких є мероморфні функції. На сьогодні відомі підходи для факторизації лише окремого класу матриць, які називають матрицями Храпкова (Khrapkov-type matrix). Вперше про їх факторизацію йшлося в праці А. О. Храпкова [9]. У подальшому намагались [11, 12, 13, 15] розвинути методи факторизації матриць, що є узагальненням матриць Храпкова.

Загалом, слід зазначити, що побудова розв'язків мішаних крайових задач теорії пружності з використанням методу Вінера – Гопфа та суміжні питання, пов'язані із самим методом, викликають значний інтерес.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо пружну півплощину, яка в декартових координатах  $Ox$  займає область  $y > 0$  (див. рис. 1). Її межа  $y = 0$  жорстко закріплена, а всередині вздовж променя, що виходить із початку координат під кутом  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq \rho/2$ , виконано розріз одиничної

✉ anlov1974@gmail.com

довжини, один кінець якого лежить на межі півплощини (приповерхневий розріз). Стінки розрізу перебувають під дією внутрішнього рівномірно розподіленого тиску.

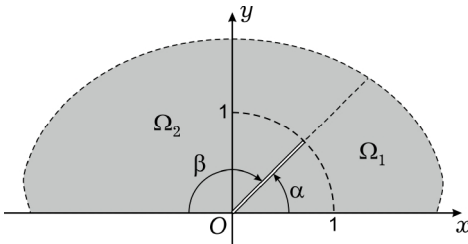


Рис. 1

Задачу розв'язуватимемо у полярних координатах  $r, j$ . Розіб'ємо півплощину на дві плоскі клиноподібні підобласті (рис. 1)  $W_1 = \{r > 0, 0 < j < a\}$  та  $W_2 = \{r > 0, a < j < p\}$ , сторони яких утворюють кути  $a$  та  $b = p - a$  відповідно. В результаті приходимо до побудови розв'язків рівнянь Ламе в областях  $W_1$  та  $W_2$ ,

які задовольняють умови жорсткого закріплення межі півплощини

$$u_r^{(1)}|_{j=0} = u_j^{(1)}|_{j=0} = 0, \quad u_r^{(2)}|_{j=p} = u_j^{(2)}|_{j=p} = 0, \quad r > 0, \quad (1)$$

умови на стінках розрізу

$$\begin{aligned} s_j^{(1)}|_{j=a-0} &= -P_0, & t_{rj}^{(1)}|_{j=a-0} &= 0, \\ s_j^{(2)}|_{j=a+0} &= -P_0, & t_{rj}^{(2)}|_{j=a+0} &= 0, \end{aligned} \quad 0 < r < 1, \quad (2)$$

де  $P_0$  – тиск, що діє на стінки розрізу, та умови зшивання на продовженні розрізу:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)}|_{j=a-0} &= u_r^{(2)}|_{j=a+0}, & u_j^{(1)}|_{j=a-0} &= u_j^{(2)}|_{j=a+0}, \\ s_j^{(1)}|_{j=a-0} &= s_j^{(2)}|_{j=a+0}, & t_{rj}^{(1)}|_{j=a-0} &= t_{rj}^{(2)}|_{j=a+0}, \end{aligned} \quad r > 1. \quad (3)$$

У формулах (1)–(3)  $u_r^{(1,2)}$ ,  $u_j^{(1,2)}$ ,  $s_j^{(1,2)}$ ,  $t_{rj}^{(1,2)}$  – компоненти вектора пружних зміщень та тензора напружень, віднесені до полярних координат  $r, j$ , в областях  $W_1$  і  $W_2$  (верхній індекс) відповідно.

Умови, задані на промені  $j = a$ , належать до мішаних (на одній частині променя задані напруження (2), а на іншій – умови зшивання (3)). Тому задачу відносять до мішаних крайових задач теорії пружності.

**2. Побудова розв'язку задачі.** Для розв'язання задачі подамо вектор пружних зміщень в областях  $W_1$  та  $W_2$  у вигляді зображення Папковича – Нейбера [8], яке у полярних координатах матиме вигляд

$$\begin{aligned} 2Gu_r^{(1,2)} &= (3 - 4n)F^{(1,2)} - r \frac{\mathbb{F}F^{(1,2)}}{\mathbb{F}r} - \frac{\mathbb{F}F_0^{(1,2)}}{\mathbb{F}r}, \\ 2Gu_j^{(1,2)} &= 4(1 - n)(F_2^{(1,2)} \cos j - F_1^{(1,2)} \sin j) - \frac{\mathbb{F}F^{(1,2)}}{\mathbb{F}j} - \frac{1}{r} \frac{\mathbb{F}F_0^{(1,2)}}{\mathbb{F}j}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $F^{(1,2)} = F_1^{(1,2)} \cos j + F_2^{(1,2)} \sin j$ ,  $F_{0,1,2}^{(1,2)}$  – гармонічні в областях  $W_1$  та  $W_2$  (верхній індекс) функції;  $n, G$  – число Пуассона і модуль зсуву пружного матеріалу.

Для повного визначення всіх гармонічних функцій  $F_{0,1,2}^{(1,2)}$  умов (1)–(3) недостатньо. Тому між ними має бути додатковий зв'язок, який під час

розв'язання мішаних задач у клиноподібних областях пропонують вибрати у вигляді умов Коші – Рімана для пар функцій  $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}$  та  $F_1^{(2)}, F_2^{(2)}$  [8]:

$$\frac{\mathbb{F}F_1^{(1,2)}}{\mathbb{F}r} = \frac{1}{r} \frac{\mathbb{F}F_2^{(1,2)}}{\mathbb{F}j}, \quad \frac{1}{r} \frac{\mathbb{F}F_1^{(1,2)}}{\mathbb{F}j} = - \frac{\mathbb{F}F_2^{(1,2)}}{\mathbb{F}r}. \quad (5)$$

З урахуванням (5) для компонент тензора напружень у кожній з областей  $W_1$  та  $W_2$  можемо записати [8]:

$$\begin{aligned} s_j^{(1,2)} &= \frac{\mathbb{F}^2 F_0^{(1,2)}}{\mathbb{F}r^2} + \frac{\mathbb{F}F_1^{(1,2)}}{\mathbb{F}r} \cos j + \frac{\mathbb{F}F_2^{(1,2)}}{\mathbb{F}r} \sin j - \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\mathbb{F}^2 F_1^{(1,2)}}{e} \frac{\mathbb{F}^2}{\mathbb{F}j^2} \cos j + \frac{\mathbb{F}^2 F_2^{(1,2)}}{\mathbb{F}j^2} \sin j \frac{\mathbb{F}}{\mathbb{F}}, \\ t_{rj}^{(1,2)} &= - \frac{\mathbb{F}}{\mathbb{F}r} \frac{\mathbb{F}^2}{e} \frac{\mathbb{F}F_0^{(1,2)}}{r} \frac{\mathbb{F}}{\mathbb{F}j} \frac{\mathbb{F}}{\mathbb{F}} + \frac{\mathbb{F}F_1^{(1,2)}}{\mathbb{F}r} \sin j - \frac{\mathbb{F}F_2^{(1,2)}}{\mathbb{F}r} \cos j - \\ &\quad - \frac{\mathbb{F}}{\mathbb{F}r} \frac{\mathbb{F}^2}{e} \frac{\mathbb{F}F_1^{(1,2)}}{\mathbb{F}j} \cos j + \frac{\mathbb{F}F_2^{(1,2)}}{\mathbb{F}j} \sin j \frac{\mathbb{F}}{\mathbb{F}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Невідомі гармонічні функції подамо у вигляді інтегралів Мелліна за координатою  $r$  [8]:

$$\begin{aligned} F_0^{(1)} &= \frac{1}{2pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbb{F} r^{1-p} \mathbb{F} a_0^{(1)}(p) \cos((p-1)j) + b_0^{(1)}(p) \sin((p-1)j) \mathbb{F} dp, \\ F_1^{(1)} &= \frac{1}{2pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbb{F} r^{-p} \mathbb{F} a_1^{(1)}(p) \cos(pj) + b_1^{(1)}(p) \sin(pj) \mathbb{F} dp, \\ F_2^{(1)} &= \frac{1}{2pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbb{F} r^{-p} \mathbb{F} b_1^{(1)}(p) \cos(pj) - a_1^{(1)}(p) \sin(pj) \mathbb{F} dp, \\ &\quad r > 0, \quad 0 \leq j \leq a; \\ F_0^{(2)} &= \frac{1}{2pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbb{F} r^{1-p} \mathbb{F} a_0^{(2)}(p) \cos((p-1)(p-j)) + \\ &\quad + b_0^{(2)}(p) \sin((p-1)(p-j)) \mathbb{F} dp, \\ F_1^{(2)} &= \frac{1}{2pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbb{F} r^{-p} \mathbb{F} a_1^{(2)}(p) \cos(p(p-j)) + \\ &\quad + b_1^{(2)}(p) \sin(p(p-j)) \mathbb{F} dp, \\ F_2^{(2)} &= \frac{1}{2pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbb{F} r^{-p} \mathbb{F} b_1^{(2)}(p) \cos(p(p-j)) + \\ &\quad + a_1^{(2)}(p) \sin(p(p-j)) \mathbb{F} dp, \quad r > 0, \quad a \leq j \leq p, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $a_{0,1}^{(1,2)}, b_{0,1}^{(1,2)}$  – невідомі коефіцієнти,  $i$  – уявна одиниця,  $i^2 = -1$ . У виразах (7) інтегруємо вздовж вертикальної прямої комплексної площини  $p$ , на якій  $\text{Re } p = c$ .

Припустимо, що при  $r \in 0+$  поведінка пружних зміщень така ж, як  $O(r^\epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ , а при  $r \in +\infty$ , – як  $O(1)$ . Тоді в інтегральних зображеннях (7) підінтегральні вирази як функції комплексного аргумента  $\rho$ , аналітичні в смузі  $-\epsilon < \operatorname{Re} \rho < 0$ , і вертикальну пряму інтегрування слід вибрати саме з цієї смуги, тобто  $-\epsilon < c < 0$ . Також зауважимо, що умови Коші – Рімана (5) в рівностях (7) вже враховані.

Якщо підставити (4) в крайові умови (1), а потім в отримані рівності – (7), то в результаті матимемо:

$$\begin{aligned} (\alpha + \rho)a_1^{(1)}(\rho) &= (1 - \rho)a_0^{(1)}(\rho), & (\alpha - \rho)b_1^{(1)}(\rho) &= (\rho - 1)b_0^{(1)}(\rho), \\ (\alpha + \rho)a_1^{(2)}(\rho) &= (\rho - 1)a_0^{(2)}(\rho), & (\alpha - \rho)b_1^{(2)}(\rho) &= (1 - \rho)b_0^{(2)}(\rho), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\alpha = 3 - 4n$ .

Далі переходимо до виконання мішаних умов (2), (3). Перепишемо їх в іншому вигляді, доповнивши до повного проміжку  $0 < r < +\infty$  невідомими функціями

$$u_{r,j}^{(1)} \Big|_{j=a-0} - u_{r,j}^{(2)} \Big|_{j=a+0} = \begin{cases} \mathcal{U}_{1,2}(r), & 0 < r < 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases} \quad (9)$$

$$s_j^{(1)} \Big|_{j=a-0} = s_j^{(2)} \Big|_{j=a+0} = \begin{cases} -P_0, & 0 < r < 1, \\ \mathcal{S}(r), & r > 1, \end{cases}$$

$$t_{rj}^{(1)} \Big|_{j=a-0} = t_{rj}^{(2)} \Big|_{j=a+0} = \begin{cases} -P_0, & 0 < r < 1, \\ \mathcal{T}(r), & r > 1, \end{cases} \quad (10)$$

де невідомі функції  $\mathcal{U}_{1,2}$  визначають стрибки дотичних та нормальних пружних зміщень на розрізі, а  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T}$  – нормальні та дотичні напруження на промені, що продовжує розріз. При цьому виконуються рівності

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{1,2}(r) &= O(r^\epsilon), & r \in 0+ \\ \mathcal{U}_{1,2}(r) &= \operatorname{Const}(1 - r)^{1/2} + O(1 - r), & r \in 1- \\ \mathcal{S}, \mathcal{T}(r) &= O(r^{-1}), & r \in +\infty \\ \mathcal{S}, \mathcal{T}(r) &= \operatorname{Const}(r - 1)^{-1/2} + O(1), & r \in 1+ \end{aligned} \quad (11)$$

Підставляючи (4) та (7) у (9) і застосовуючи формули прямого інтегрального перетворення Мелліна [8], з урахуванням (8) отримаємо:

$$\begin{aligned} (\alpha + \rho) \int_0^1 b_1^{(1)}(\rho) \cos a - a_1^{(1)}(\rho) \sin a \sin(a\rho) + \\ + (b_1^{(2)}(\rho) \cos b - a_1^{(2)}(\rho) \sin b) \sin(b\rho) \dot{\rho} - \\ - \rho \int_0^1 b_1^{(1)}(\rho) \sin(a(\rho - 1)) + b_1^{(2)}(\rho) \sin(b(\rho - 1)) \dot{\rho} = \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^{p-1} \mathcal{U}_1(r) dr =: X_1^{(+)}(\rho), \end{aligned}$$

$$(\alpha - \rho) \int_0^1 a_1^{(2)}(\rho) \cos b + b_1^{(2)}(\rho) \sin b \sin(b\rho) -$$

$$\begin{aligned}
& - (a_1^{(1)}(p) \cos a + b_1^{(1)}(p) \sin a) \sin(ap) \dot{y}_p - \\
& - p \dot{y}_p a_1^{(1)}(p) \sin(a(p-1)) - a_1^{(2)}(p) \sin(b(p-1)) \dot{y}_p = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{y}_p r^{p-1} \mathcal{L}_2(r) dr =: X_2^{(+)}(p), \quad -e < \operatorname{Re} p < 0, \quad (12)
\end{aligned}$$

де невідомі функції  $X_{1,2}^{(+)}(p)$ , якщо врахувати перші дві рівності (11), будуть аналітичними при  $\operatorname{Re} p > -e$  та будуть поводити себе на нескінченності як  $\operatorname{const} p^{-3/2}$ .

Аналогічно з рівностей (10), якщо туди підставити (6) та (7), застосувати пряме інтегральне перетворення Мелліна [8] і використати (8), матимемо:

$$\begin{aligned}
& p \int_1^{\infty} -(\alpha + p) a_1^{(1)}(p) \cos(a(p-1)) + (\alpha - p) b_1^{(1)}(p) \sin(a(p-1)) + \\
& + (p-1) \dot{y}_p a_1^{(1)}(p) \cos(a(p+1)) + b_1^{(1)}(p) \sin(a(p+1)) \dot{y}_p \dot{y}_p = \\
& = -\frac{P_0}{p+1} + \int_1^{\infty} \dot{y}_p r^p \mathcal{S}(r) dr =: Y_1^{(-)}(p), \\
& p \int_1^{\infty} (\alpha + p) a_1^{(2)}(p) \cos(b(p-1)) - (\alpha - p) b_1^{(2)}(p) \sin(b(p-1)) - \\
& - (p-1) \dot{y}_p a_1^{(2)}(p) \cos(b(p+1)) + b_1^{(2)}(p) \sin(b(p+1)) \dot{y}_p \dot{y}_p = \\
& = -\frac{P_0}{p+1} + \int_1^{\infty} \dot{y}_p r^p \mathcal{S}(r) dr = Y_1^{(-)}(p), \\
& p \int_1^{\infty} (\alpha + p) a_1^{(1)}(p) \sin(a(p-1)) + (\alpha - p) b_1^{(1)}(p) \cos(a(p-1)) + \\
& + (p+1) \dot{y}_p b_1^{(1)}(p) \cos(a(p+1)) - a_1^{(1)}(p) \sin(a(p+1)) \dot{y}_p \dot{y}_p = \\
& = \int_1^{\infty} \dot{y}_p r^p \mathcal{R}(r) dr =: Y_2^{(-)}(p), \\
& p \int_1^{\infty} (\alpha + p) a_1^{(2)}(p) \sin(b(p-1)) + (\alpha - p) b_1^{(2)}(p) \cos(b(p-1)) + \\
& + (p+1) \dot{y}_p b_1^{(2)}(p) \cos(b(p+1)) - a_1^{(2)}(p) \cos(b(p+1)) \dot{y}_p \dot{y}_p = \\
& = \int_1^{\infty} \dot{y}_p r^p \mathcal{R}(r) dr = Y_2^{(-)}(p), \quad -e_1 < \operatorname{Re} p < 0, \quad (13)
\end{aligned}$$

де невідома функція  $Y_1^{(-)}(p)$ , враховуючи властивості функції  $\mathcal{S}(r)$  (див. (11)), буде аналітичною при  $\operatorname{Re} p < 0$ , за винятком простого полюса в точці  $p = -1$  (перший доданок), і буде поводити себе на нескінченності як  $\operatorname{const} p^{-3/2}$ , функція  $Y_2^{(-)}(p)$  володітиме аналогічними властивостями, але без особливих точок у півплощині  $\operatorname{Re} p < 0$ . У виразах (13)  $e_1 = \min\{1, e\} > 0$ .

Вилучаємо в рівностях (12), (13) з розгляду невідомі  $a_1^{(1,2)}, b_1^{(1,2)}$ . В результаті приходимо до системи двох функціональних рівнянь Вінера – Гопфа для невідомих функцій  $X_{1,2}^{(+)}$  та  $Y_{1,2}^{(-)}$ , яку можна подати у векторно-матричній формі:

$$G(p) \begin{pmatrix} \hat{e} Y_1^{(-)}(p) \\ \hat{e} Y_2^{(-)}(p) \end{pmatrix} \hat{u} = - \frac{p d_1(p) d_2(p)}{(1-n) \mathfrak{a} \sin(p\rho)} \begin{pmatrix} \hat{e} X_2^{(+)}(p) \\ \hat{e} X_1^{(+)}(p) \end{pmatrix} \hat{u}, \quad -d < \operatorname{Re} p < 0. \quad (14)$$

У системі (14) використано такі позначення:

$$G(p) = f(p) E + g(p) A(p), \quad (15)$$

$$f(p) = (p^2 \sin^2 a - 4(1-n)^2) \cos((b-a)p) + \mathfrak{a} \sin(ap) \sin(bp),$$

$$g(p) = \sin((b-a)p),$$

$E$  – одинична матриця розміру  $2 \times 2$ ,

$$A(p) = \begin{pmatrix} \hat{e} \mathbf{1}(p) & m(p) \\ \hat{e} n(p) & \mathbf{1}(p) \end{pmatrix} \hat{u}$$

$$\mathbf{1}(p) = 1/2 p \sin(2a), \quad m(p) = p(p-1) \sin^2 a - 2(1-n)(1-2n),$$

$$n(p) = -p(p+1) \sin^2 a + 2(1-n)(1-2n),$$

$$d_1(p) = 4(1-n)^2 - p^2 \sin^2 a - \mathfrak{a} \sin^2(ap),$$

$$d_2(p) = 4(1-n)^2 - p^2 \sin^2 b - \mathfrak{a} \sin^2(bp).$$

Аналізуючи коефіцієнти системи (14), можемо зробити висновок, що елементи матриці  $G(p)$  є цілими функціями комплексного аргументу  $p$  і при цьому  $\det G(p) = d_1(p) d_2(p)$ ,  $p \in \mathbb{C}$ . Саму систему слід розглядати у смузі, де матриця  $G(p)$  є невинороженою ( $\det G(p) \neq 0$ ), а коефіцієнт у правій частині не має особливих точок та не обертається в нуль. Очевидно, що вибір смуги (параметра  $d$ ) у системі (14), як і подальше її розв'язання, суттєво залежить від розташування нулів функцій  $d_{1,2}$ .

Функція  $d_1$  є цілою парною, що має в комплексній площині зліченну кількість нулів, розташованих симетрично відносно дійсної та уявної осей. Розташування нулів залежить від параметрів  $a \in (0, \rho/2]$  та  $n \in (0, 1/2]$  функції  $d_1$ , але характер розташування та порядок залишаються однаковими незалежно від  $a$  та  $n$ . Зокрема, за всіх вказаних значень параметрів функція  $d_1(p)$  має в комплексній площині два дійсних нулі в точках  $p = \pm x_0$ ,  $x_0 > 0$ , решта нулів є комплексними і розташовані в симетричних точках  $p = \pm p_k^{(1)}, \pm \bar{p}_k^{(1)}$ ,  $k \geq 1$ ,  $\operatorname{Re} p_k^{(1)} > x_0$ ,  $\operatorname{Im} p_k^{(1)} > 0$ , а також виконується асимптотична формула

$$p_k^{(1)} = \frac{1}{a} \mathfrak{a} p k - \frac{\ln(pk)}{pk} + i \ln \frac{2apk}{\sqrt{k}} + O(k^{-1}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

де  $a = (\sin a)/a$ . На практиці відшукування нулів функції  $d_1$  можливе лише з використанням числових методів, зокрема, методу Ньютона. Таким чином, функція  $d_1(p)$  буде відмінною від нуля в симетричній смузі  $|\operatorname{Re} p| < x_0^{(1)}$ .

Незважаючи на те, що явний вигляд функції  $d_2$  практично повторює явний вигляд функції  $d_1$ , ситуація з розташуванням нулів функції  $d_2$  дещо складніша, оскільки параметр  $b = \rho - a$  функції  $d_2$ , на відміну від па-

раметра  $a$  функції  $d_1$ , змінюється на проміжку  $[p/2, p)$ . При  $b = a = p/2$ , коли  $d_1 = d_2$ , та  $b$ , близьких до  $p/2$ , характер розташування та порядок нулів функції  $d_2$  такий самий, як і функції  $d_1$ . Але з подальшим збільшенням  $b$  ситуація міняється. Якщо об'єднати всі можливі випадки, то можна записати, що функція  $d_2$  має в комплексній площині зліченну кількість нулів, які симетрично розташовані відносно дійсної та уявної осей, в точках:  $p = \pm x_1, 1/4, \pm x_5$  та  $p = \pm p_k^{(2)}, \pm \bar{p}_k^{(2)}, k = 3, 0 < \text{Re } x_1 \leq 1/4 \leq \text{Re } x_5, \text{Re } p_k^{(2)} > \text{Re } x_5, \text{Im } p_k^{(2)} > 0$ . Усі комплексні нулі  $p = \pm p_k^{(2)}, \pm \bar{p}_k^{(2)}, k = 3$ , є простими і мають асимптотичну поведінку, аналогічну (16) (слід тільки поміняти  $a$  на  $b$  та  $a$  на  $b = (\sin b)/b$ ). Серед нулів  $x_1, 1/4, x_5$  можуть бути як дійсні, так і комплексно-спряжені. За окремих значень  $b$  та  $n$  деякі пари цих нулів накладаються, утворюючи нулі другого порядку (ці випадки оминатимемо), решта залишаються простими.

Отже, як і функція  $d_1(p)$ , функція  $d_2(p)$  не обертається в нуль у симетричній смузі  $|\text{Re } p| < \text{Re } x_1$ .

Таким чином, враховуючи наведені міркування, в системі (14) слід вибрати  $d$  так, щоб  $0 < d \leq \min\{1, x_0, \text{Re } x_1\}$ .

**3. Розв'язання системи рівнянь Вінера – Гопфа.** Основним кроком при розв'язанні системи (14) є факторизація матричного коефіцієнта  $G$  у лівій частині, який має вигляд (15).

Матриця  $G$  належить до матриць Храпкова [10, 12, 13]. При цьому виконується рівність

$$\begin{aligned} A^2(p) &= -D(p)E, \quad p \in \mathbb{C}, \\ D(p) &= \sin^4 a (c_1^2 - p^2)(c_2^2 - p^2), \\ c_1 &= (1 - 2n)/\sin a, \quad c_2 = (1 - n)/\sin a, \end{aligned}$$

враховуючи яку, перепишемо (14) у вигляді

$$G(p) = f(p)E + g(p)\sqrt{D(p)}J(p), \quad (17)$$

де

$$J(p) = \frac{1}{\sqrt{D(p)}}A(p), \quad J^2(p) = -E. \quad (18)$$

Функція  $\sqrt{D(p)}$  є багатозначною функцією комплексного аргументу  $p$ , яка має чотири точки розгалуження:  $p = \pm c_1, \pm c_2$  (нулі  $D(p)$ ). Якщо  $0 < n < 1/2$ , то  $0 < c_1 < c_2$ . При цьому  $D(p) > 0$ , якщо  $p$  лежить на уявній осі або на проміжку дійсної осі  $(-c_1, c_1)$ . Зафіксуємо однозначну гілку функції  $\sqrt{D}$  так, щоб  $\sqrt{D(p)} > 0$  за вказаних значень  $p$ . Якщо  $n = 1/2$ , то  $c_1 = 0$  і функція  $\sqrt{D(p)}$  міняє вигляд. Вона в цьому випадку матиме лише дві точки розгалуження  $p = \pm c_2$  і технічно цей випадок слід розглядати окремо. Надалі обмежимося лише ситуацією, коли  $0 < n < 1/2$ .

Щоб обґрунтувати подальші міркування, вимагатимемо, щоб точки розгалуження функції  $\sqrt{D}$  не попадали в смугу  $-d < \text{Re } p < 0$ , де розглядаємо систему (14), тобто слід вимагати, щоб  $0 < d < c_1$ . Таким чином, остаточно в системі (14) слід вибрати

$$d = \min\{1, x_0, \operatorname{Re} x_1, c_1\} > 0.$$

Враховуючи властивість  $J^2 = -E$ , можна стверджувати, що матриця  $J$  в зображенні (17) відіграє ту саму роль, що і уявна одиниця в алгебричному записі комплексних чисел, які можна подати у тригонометричній формі. Спробуємо аналогічно записати матрицю  $G$ , що має вигляд (17):

$$G(p) = \sqrt{\det G(p)} (f_1(p)E + g_1(p)J(p)), \quad |\operatorname{Re} p| < d. \quad (19)$$

Тут використано такі рівності та позначення:

$$f^2(p) + g^2(p)D(p) = \det G(p) = d_1(p)d_2(p),$$

$$f_1(p) = \frac{f(p)}{\sqrt{f^2(p) + g^2(p)D(p)}} = \frac{f(p)}{\sqrt{\det G(p)}},$$

$$g_1(p) = \frac{g(p)\sqrt{D(p)}}{\sqrt{f^2(p) + g^2(p)D(p)}} = \frac{g(p)\sqrt{D(p)}}{\sqrt{\det G(p)}}.$$

Оскільки всередині смуги  $|\operatorname{Re} p| < d$  функції  $d_{1,2}(p)$  відмінні від нуля, то точки розгалуження багатозначної функції  $\sqrt{\det G}$  лежать за її межами. Крім цього, коли  $p$  лежить на уявній осі або на проміжку  $(-d, d)$  дійсної осі, то  $d_{1,2}(p) > 0$ . Тому зафіксуємо однозначну гілку  $\sqrt{\det G}$  так, щоб  $\sqrt{\det G(p)} > 0$  за вказаних  $p$ . Таким чином,  $\sqrt{\det G(p)}$  буде аналітичною функцією і не обертається в нуль, якщо  $|\operatorname{Re} p| < d$ . Звідси, зокрема, також випливає, що функції  $f_1(p)$  та  $g_1(p)$  будуть аналітичними в смугі  $|\operatorname{Re} p| < d$ . Незавжди пересвідчитись, що існує рівність  $f_1^2(p) + g_1^2(p) = 1$ ,  $|\operatorname{Re} p| < d$ , за якою функції  $f_1$  та  $g_1$  можна подати у вигляді

$$f_1(p) = \cos q(p), \quad g_1(p) = \sin q(p), \quad |\operatorname{Re} p| < d, \quad (20)$$

де

$$q(p) = \frac{1}{2i} \ln \frac{f(p) + ig(p)\sqrt{D(p)}}{f(p) - ig(p)\sqrt{D(p)}}. \quad (21)$$

Зауважимо, що чисельник та знаменник виразу під логарифмом у (21) не обертаються в нуль всередині смуги  $|\operatorname{Re} p| < d$ , тому можна зафіксувати однозначну гілку так, що  $q(p)$  буде аналітичною, якщо  $|\operatorname{Re} p| < d$ . Крім цього, якщо  $p$  є суто уявним, то дріб, що стоїть під логарифмом, набуває додатні значення. Виберемо однозначну гілку так, щоб за уявних  $p$  логарифм був дійсним числом. Також зауважимо, що функція  $q(p)$  буде непарною.

Підставимо рівності (20) у (19) і отримаємо «тригонометричну» форму запису матриці  $G$

$$G(p) = \sqrt{\det G(p)} (\cos q(p)E + \sin q(p)J(p)), \quad |\operatorname{Re} p| < d,$$

або, використовуючи (18) та рівність  $\det G = d_1 d_2$ ,

$$G(p) = \sqrt{d_1(p)d_2(p)} \mathcal{G}(p), \quad |\operatorname{Re} p| < d, \quad (22)$$

де

$$\mathcal{G}(p) = \cos q(p)E + \frac{\sin q(p)}{\sqrt{D(p)}} A(p). \quad (23)$$



Підставимо (22) у систему (14) та перепишемо її у вигляді

$$\mathfrak{G}(p) \begin{pmatrix} \dot{e}Y_1^{(-)}(p) \\ \dot{e}Y_2^{(-)}(p) \end{pmatrix} = - \frac{p\sqrt{d_1(p)d_2(p)}}{(1-n)\mathfrak{a}\sin(\rho p)} \begin{pmatrix} \dot{e}X_2^{(+)}(p) \\ \dot{e}X_1^{(+)}(p) \end{pmatrix}, \quad -d < \operatorname{Re} p < 0. \quad (24)$$

Використовуючи зображення синуса через  $G$ -функцію [2] та розкладаючи функції  $d_{1,2}$  у нескінченні добутки за їх нулями [4], для скалярного коефіцієнта, що стоїть у правій частині (24), можемо записати факторизацію

$$\frac{p\sqrt{d_1(p)d_2(p)}}{\sin(\rho p)} = K_+(p)K_+(-p), \quad |\operatorname{Re} p| < d, \quad (25)$$

де

$$K_+(p) = \frac{2(1-n)(a^a b^b)^p \Gamma(1+p) \sqrt{P_1^{(+)}(p)P_2^{(+)}(p)}}{\sqrt{p} \left( G_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{a}} + \frac{ap}{p} \frac{\ddot{e}}{\mathfrak{e}} G_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{a}} + \frac{bp}{p} \frac{\ddot{e}}{\mathfrak{e}} \right)},$$

$$P_1^{(+)}(p) = \frac{\mathfrak{a}_1 + \frac{p}{p_k^{(1)}} \frac{\ddot{e}}{\mathfrak{e}} \mathfrak{a}_1 + \frac{p}{\bar{p}_k^{(1)}} \frac{\ddot{e}}{\mathfrak{e}}}{\mathfrak{a}_1 + \frac{ap}{pk} \frac{\ddot{e}}{\mathfrak{e}}},$$

$$P_2^{(+)}(p) = \frac{\prod_{j=1}^5 \left( \mathfrak{a}_1 + \frac{p}{x_j} \frac{\ddot{e}}{\mathfrak{e}} \right)}{\left( \mathfrak{a}_1 + \frac{bp}{p} \frac{\ddot{e}}{\mathfrak{e}} \right) \prod_{k=3}^{\infty} \left( \mathfrak{a}_1 + \frac{bp}{pk} \frac{\ddot{e}}{\mathfrak{e}} \right)}.$$

Додаткові множники під час визначення функції  $K_+$  вибрали так, щоб гарантувати збіжність нескінченних добутків  $P_{1,2}^{(+)}$  та отримати степеневу поведінку  $K_+(p)$  на нескінченності. Враховуючи розташування нулів функцій  $d_{1,2}$  та їх асимптотичну поведінку, можемо стверджувати, що функція  $K_+(p)$  є аналітичною при  $\operatorname{Re} p > -d$  та не обертається в нуль у жодній точці вказаної півплощини. Якщо при цьому використати асимптотичні властивості  $G$ -функції [2] та нескінченних добутків [4], то можна показати, що

$$K_+(p) : \text{const } p^{1/2}, \quad p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (26)$$

Для факторизації матричний коефіцієнт подамо так:

$$\mathfrak{G}(p) = G_+(p)G_-(p), \quad |\operatorname{Re} p| < d, \quad (27)$$

де матриці  $G_{\pm}(p)$  запишемо у вигляді, аналогічному до (23):

$$G_{\pm}(p) = \cos(q_{\pm}(p)\sqrt{D(p)})E + \frac{\sin(q_{\pm}(p)\sqrt{D(p)})}{\sqrt{D(p)}}A(p). \quad (28)$$

Функції  $q_{\pm}(p)$  аналітичні у півплощинах  $\operatorname{Re} p > -d$  (індекс «+») та  $\operatorname{Re} p < d$  (індекс «-») відповідно. Незважаючи на те, що функція  $\sqrt{D}$  має чотири точки розгалуження, які попадають у півплощини аналітичності функцій  $q_{\pm}$ , через парність косинуса та непарність синуса ці точки не

будуть точками розгалуження для функцій  $\cos(q_{\pm}\sqrt{D})$  та  $\sin(q_{\pm}\sqrt{D})/\sqrt{D}$  і залишатимуться аналітичними у тих самих півплощинах, що і  $q_{\pm}$ .

Підставляючи (28) у (27) та використовуючи рівність  $A^2(p) = -D(p)E$  під час обчислення добутку матриць і формули для тригонометричних функцій суми аргументів, отримуємо, що для факторизації (27) має виконуватись рівність

$$\frac{q(p)}{\sqrt{D(p)}} = q_+(p) + q_-(p), \quad |\operatorname{Re} p| < d. \quad (29)$$

Функція  $q(p)/\sqrt{D(p)}$ , яка стоїть у лівій частині (29), є аналітичною в смугі  $|\operatorname{Re} p| < d$  і має там таку оцінку на нескінченності

$$\left| \frac{q(p)}{\sqrt{D(p)}} \right| \leq \operatorname{const} e^{-2a|\operatorname{Im} p|}, \quad \operatorname{Im} p \in \pm\mathbb{R}, \quad (30)$$

яка буде рівномірною по  $\operatorname{Re} p$ ,  $|\operatorname{Re} p| \leq d$ . Тоді, використовуючи інтеграл Коші для функції  $q(p)/\sqrt{D(p)}$  всередині смуги  $|\operatorname{Re} p| < d$  з урахуванням оцінки (30), функції  $q_{\pm}(p)$ , які входять у (29), можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} q_+(p) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-d-i\infty}^{-d+i\infty} \frac{q(t)}{\sqrt{D(t)}} \frac{dt}{t-p}, \quad \operatorname{Re} p > -d, \\ q_-(p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{q(t)}{\sqrt{D(t)}} \frac{dt}{t-p}, \quad \operatorname{Re} p < d. \end{aligned} \quad (31)$$

Із властивостей інтеграла типу Коші та оцінки (30) випливає, що функції (31) аналітичні у відповідних півплощинах, а на нескінченності

$$\begin{aligned} q_+(p) &= -\frac{T_0}{p^2} + O(p^{-4}), \quad p \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re} p \geq 0, \\ q_-(p) &= \frac{T_0}{p^2} + O(p^{-4}), \quad p \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re} p \leq 0, \end{aligned} \quad (32)$$

де  $T_0 = \operatorname{const}$ .

Матриці  $G_{\pm}(p)$  матимуть елементи, які будуть аналітичними у півплощинах  $\operatorname{Re} p > -d$  (матриця  $G_+(p)$ ) і  $\operatorname{Re} p < d$  (матриця  $G_-(p)$ ) функціями, крім цього,  $\det G_{\pm}(p) = 1$ , тобто  $G_{\pm}(p)$  будуть невідродженими матрицями.

Факторизації (25) та (26) підставляємо у систему (24) та збираємо у лівій частині аналітичні при  $\operatorname{Re} p < 0$  функції, а у правій – при  $\operatorname{Re} p > -d$ . В результаті запишемо:

$$\begin{aligned} &\frac{G_-(p)}{K_+(-p)} \begin{pmatrix} \dot{e}Y_1^{(-)}(p) \\ \dot{e}Y_2^{(-)}(p) \end{pmatrix} + \frac{1}{p+1} \frac{G_-(p)}{K_+(1)} \begin{pmatrix} \dot{e}P_0 \\ \dot{e}0 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{K_+(p)}{(1-n)\alpha} G_+^{-1}(p) \begin{pmatrix} \dot{e}X_2^{(+)}(p) \\ \dot{e}X_1^{(+)}(p) \end{pmatrix} + \frac{1}{p+1} \frac{G_-(p)}{K_+(1)} \begin{pmatrix} \dot{e}P_0 \\ \dot{e}0 \end{pmatrix}, \\ &-d < \operatorname{Re} p < 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Поява додаткових доданків у (33) пов'язана з тим, що функція  $Y_1^{(-)}(p)$  є аналітичною при  $\operatorname{Re} p < 0$ , за винятком простого полюса в точці  $p = -1$ , в околі якого поводить себе, як  $Y_1^{(-)}(p) = -P_0/(p+1) + O(1)$  (див. (13)).

Таким чином, ліва частина (33) визначає вектор, який складається з двох аналітичних при  $\operatorname{Re} p < 0$  функцій, а права – вектор, який складається з двох аналітичних при  $\operatorname{Re} p > -d$  функцій. При цьому з асимптотик (26), (32), явного вигляду функції  $D(p)$ , матриць  $G_{\pm}(p)$ , матриці  $A(p)$  і поведінки функцій  $Y_{1,2}^{(-)}(p)$  та  $X_{1,2}^{(+)}(p)$  на нескінченності можна зробити висновок, що ліва та права частини (33) у півплощинах  $\operatorname{Re} p < 0$  та  $\operatorname{Re} p > -d$  прямують до нуля при  $p \rightarrow \infty$ , як  $O(p^{-1})$ . Тоді, використовуючи аналітичне продовження через смугу  $-d < \operatorname{Re} p < 0$  [4], отримаємо, що ліва та права частини (33) визначають дві аналітичні в комплексній площині функції, які на нескінченності обертаються в нуль. За теоремою Ліувілля [4] такі функції є тотожно нульовими. В результаті з (33) отримаємо рівності, що визначають розв'язок системи Вінера – Гопфа (14):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e} Y_1^{(-)}(p) \\ \dot{e} Y_2^{(-)}(p) \end{pmatrix} \dot{u} &= - \frac{1}{p+1} \frac{K_+(-p)}{K_+(1)} G_-^{-1}(p) G_-(-1) \begin{pmatrix} \dot{e} P_0 \\ \dot{e} 0 \end{pmatrix} \dot{u}, & \operatorname{Re} p < 0; \\ \begin{pmatrix} \dot{e} X_2^{(+)}(p) \\ \dot{e} X_1^{(+)}(p) \end{pmatrix} \dot{u} &= \frac{(1-n)\alpha}{p+1} \frac{K_+(p)}{K_+(1)} G_+(p) G_-(-1) \begin{pmatrix} \dot{e} P_0 \\ \dot{e} 0 \end{pmatrix} \dot{u}, & \operatorname{Re} p > -d. \end{aligned} \quad (34)$$

Враховуючи виконані факторизації, слід зазначити, що права частина першої векторної рівності (34) є аналітичною при  $\operatorname{Re} p < d$ , тобто функції  $Y_{1,2}^{(-)}(p)$  аналітично продовжуються на ширшу півплощину, ніж цього вимагає розв'язання вихідної системи рівнянь Вінера – Гопфа (14).

**4. Аналіз напружено-деформованого стану.** За отриманими виразами для аналітичних функцій  $X_{1,2}^{(+)}$  та  $Y_{1,2}^{(-)}$ , використовуючи формули (8), (12), (13), можна знайти коефіцієнти  $a_{0,1}^{(1,2)}$ ,  $b_{0,1}^{(1,2)}$ , які визначають гармонічні функції  $F_{0,1,2}^{(1,2)}$  через рівності (7). З огляду на аналітичні властивості функцій  $X_{1,2}^{(+)}$ ,  $Y_{1,2}^{(-)}$ , очевидно, що в (7) слід покласти  $e = d$  і вибирати пряму інтегрування зі смуги  $-d < \operatorname{Re} p < 0$  (тобто  $-d < c < 0$ ).

Підставляючи отримані вирази для  $F_{0,1,2}^{(1,2)}$  у рівності (5), (6), можемо записати інтегральні зображення для компонент вектора пружних зміщень та тензора напружень у  $\bar{W}_{1,2}$ . Зокрема, для нормальних зміщень стінок розрізу та нормальних напружень на закріпленій межі півплощини отримаємо:

$$\begin{aligned} 2Gu_j^{(1)} \Big|_{j=a-0} &= - \frac{1}{2pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \dot{e} \dot{e} (1-n) Y_1^{(-)}(p) (\sin(2a) - \frac{\alpha}{p} \sin(2pa)) + \\ &+ Y_2^{(-)}(p) \frac{\alpha \alpha (1-2n)}{p} \sin^2(pa) - (p - 2(1-n)) \sin^2 a \frac{\dot{e} \dot{e}}{\dot{e}} \cdot \\ &\cdot \frac{r^{-p}}{d_1(p)} dp, \\ 2Gu_j^{(2)} \Big|_{j=a+0} &= \frac{1}{2pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \dot{e} \dot{e} (1-n) Y_1^{(-)}(p) \frac{\alpha}{p} \sin(2b) - \frac{\alpha}{p} \sin(2pb) \frac{\dot{e} \dot{e}}{\dot{e}} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - Y_2^{(-)}(p) \frac{a(1-2n)}{p} \sin^2(pb) - (p-2(1-n)) \sin^2 b \frac{\dot{u}}{u}, \\
& \cdot \frac{r^{-p}}{d_2(p)} dp, \\
& 0 < r < 1; \tag{35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_j^{(1)} \Big|_{j=0} &= \frac{1-n}{2pi} \oint_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y_1^{(-)}(p) \{ (a-p) \cos((p-1)a) + \\
& + (p+1) \cos((p+1)a) \} - \\
& - Y_2^{(-)}(p) \{ (a-p) \sin((p-1)a) + (p-1) \sin((p+1)a) \} \frac{\dot{u}}{u} \\
& \cdot \frac{r^{-p-1}}{d_1(p)} dp,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_j^{(2)} \Big|_{j=p} &= \frac{1-n}{2pi} \oint_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y_1^{(-)}(p) \{ (a-p) \cos((p-1)b) + \\
& + (p+1) \cos((p+1)b) \} + \\
& + Y_2^{(-)}(p) \{ (a-p) \sin((p-1)b) + (p-1) \sin((p+1)b) \} \frac{\dot{u}}{u} \\
& \cdot \frac{r^{-p-1}}{d_2(p)} dp,
\end{aligned}$$

$$r > 0. \tag{36}$$

Аналогічні до (35), (36) зображення можна одержати для всіх компонент вектора пружних зміщень та тензора напружень, причому за всіх значень  $j \in [0, p/2]$ .

При  $0 < r < 1$  інтеграли, що входять у (35) та (36), можна обчислити за допомогою теорії лишків, замикаючи контур інтегрування у півплощині  $\text{Re } p < c$ , де підінтегральні вирази мають полюси, що збігаються із нулями функцій  $d_{1,2}(p)$ , та полюси в точці  $p = -1$  (полюс  $Y_1^{(-)}(p)$ ).

Аналізуючи розташування нулів функції  $d_1$  у півплощині  $\text{Re } p < c$ , можна сказати, що найближчими до уявної осі особливими точками підінтегральних виразів у першому інтегралі (35) та першому інтегралі (36) є прості полюси  $p = -x_0$  та  $p = -1$ . Тоді при  $r \rightarrow 0+$  (з наближенням до точки виходу розрізу на межу півплощини), залишаючи лише лишки в цих полюсах, для нормальних відхилень стінки розрізу та нормальних напружень частини межі півплощини, які примикають до  $W_1$  (див. рис. 1), отримаємо:

$$\begin{aligned}
2Gu_j^{(1)} \Big|_{j=a-0} &= U_0^{(1)} r^{x_0} + U_1^{(1)} r + \mathbf{K}, \\
s_j^{(1)} \Big|_{j=0} &= (1-n) \frac{\dot{u}}{u} r^{x_0-1} + F_1^{(1)} + \mathbf{K} \frac{\dot{u}}{u}, \\
& r \rightarrow 0+, \tag{37}
\end{aligned}$$

де константи  $U_{0,1}^{(1)}$  та  $F_{0,1}^{(1)}$  визначають власне лишки підінтегральних виразів у вказаних точках; вони мають досить громіздкий явний вигляд, через що їх не наводимо.

Оскільки за всіх  $a \in (0, p/2]$  значення  $x_0 > 0$ , то з (37) випливає, що в підобласті  $W_1$  осциляцій відхилень та напружень нема. Тільки слід зазначити, що за кожного значення  $n$  існує таке  $a_0$ , що  $x_0 > 1$  при  $0 < a < a_0$ ,  $0 < x_0 < 1$  при  $a_0 < a \leq p/2$  і  $x_0 = 1$  при  $a = a_0$ . У першому випадку напруження в підобласті  $W_1$  не матимуть особливості, якщо  $r \in 0+$ , в другому – володітимуть локальною степеневу особливістю, а в третьому – матимемо справу з полюсами другого порядку в точці  $p = -1$ , внаслідок чого напруження характеризуватимуться логарифмічною особливістю (в асимптотичних рівностях (37) замість  $r^{x_0}$  стоятиме  $r \ln r$ , а замість  $r^{x_0-1}$  – просто  $\ln r$ ).

У підобласті  $W_2$  (див. рис. 1) ситуація складніша. Якщо міркувати аналогічно та врахувати, що найближчими до уявної осі нулями функції  $d_2$  будуть  $p = -x_1, \mathbf{K}, -x_5$ , то залишаючи в другому інтегралі (35) та другому інтегралі (36) лишки в цих полюсах та полюсі  $p = -1$ , аналогічно до (37) запишемо:

$$2Gu_j^{(2)}|_{j=a+0} = \mathring{a} \sum_{j=1}^5 U_j^{(2)} r^{x_j} + U_1^{(2)} r + \mathbf{K},$$

$$s_j^{(2)}|_{j=p} = (1-n) \mathring{a} \sum_{j=1}^5 U_j^{(2)} r^{x_j-1} + F_1^{(2)} + \mathbf{K} \frac{\dot{u}}{u},$$

$$r \in 0+. \quad (38)$$

Аналіз розташування нулів функції  $d_2$  засвідчив, що за кожного значення  $n$  можна виділити критичне значення кута  $b = b^*$ , а отже, виділити два якісно різних випадки. При  $p/2 \leq b < b^*$  найближчим до уявної осі нулем функції  $d_2$ , який лежить у півплощині  $\text{Re } p < c$ , буде  $p = -x_1$ , причому  $0 < x_1 < 1$ . У цьому випадку з наближенням до точки виходу розрізу на межу півплощини в підобласті  $W_2$  так само, як і в підобласті  $W_1$ , не виявили осциляцій відхилень та напружень, при цьому напруження мають локальну степеневу особливість. Якщо ж  $b^* < b < p$ , то найближчими до уявної осі нулями функції  $d_2$  стають  $p = -x_1; -x_2$ , які будуть комплексно-спряженими ( $x_2 = \bar{x}_1$ ), і при цьому  $0 < \text{Re } x_1 < 1$ . Тоді головні члени в асимптотиках (38) міститимуть осцилювальні доданки, тобто за досить великих  $b$  (або достатньо малих  $a$ ) пружні зміщення та напруження в підобласті  $W_2$  в околі точки виходу розрізу на межу півплощини будуть осцилювальні, що може означати відлипання межі півплощини від жорсткої підоснови з боку підобласті  $W_2$  (див. рис. 1).

Наближені значення критичного кута  $b = b^*$  та відповідні значення кута  $a = a^*$  за різних  $n$  наведено в таблиці.

Таблиця 1

n	0.17	0.25	0.32	0.47
$b^*/p$	0.6728	0.7422	0.8062	0.9631
$a^*/p$	0.3272	0.2578	0.1938	0.0369

**Висновки.** Отримано точний розв'язок задачі про рівновагу пружної півплощини з жорстко закріпленою межею, яка послаблена примежовим похилим прямолінійним розрізом. Розв'язок побудовано за допомогою інтегрального перетворення Мелліна разом із методом Вінера – Гопфа, який застосовують до розв'язання системи функціональних рівнянь. Розроблено ефективний підхід до факторизації матриць таких систем, яких базуються на спеціальному зображенні матриці системи. Він дасть можливість розв'язувати аналогічні плоскі мішані задачі теорії пружності, а також просторові. Крім цього, за отриманим розв'язком проаналізовано характер розподілу пружних зміщень та напружень в околі виходу розрізу на межу півплощини. Встановлено, що за достатньо малих кутів нахилу розрізу  $\alpha$  в околі цієї точки виникають осциляції пружних зміщень та напружень.

1. *Клімчук Т. В., Острик В. І.* Гладкий контакт напівнескінченного штампа із заокругленим краєм і пружної смуги // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – 59, № 2. – С. 132–141.  
Te same: *Klimchuk T. V., Ostryk V. I.* Smooth contact of a semiinfinite punch with rounded edge and an elastic strip // *J. Math. Sci.* – 2018. – 231, No. 5. – P. 650–664. – <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3842-9>
2. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 358 с.
3. *Ловейкин А. В.* Особливості поведінки напружень у нестисливому півпросторі із внутрішньою V-подібною тріщиною, що лежить у площині, перпендикулярній поверхні півпростору, а її вершина виходить на поверхню // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – 55, № 2. – С. 93–106.  
Te same: *Loveikin A. V.* Specific features of the stress behavior in an incompressible half-space with internal V-shaped crack lying in a plane perpendicular to the surface of the half-space with a tip reaching the surface // *J. Math. Sci.* – 2013. – 192, No. 5. – P. 593–607.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1419-1>
4. *Нобл В.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
5. *Острик В. И.* Вдавливание штампа в упругую полосу при наличии трения и сцепления // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2011. – № 5. – С. 118–129.  
Te same: *Ostryk V. I.* Indentation of a punch into an elastic strip with friction and adhesion // *Mechanics of Solids.* – 2011. – 46, No. 5. – P. 755–765.  
– <https://doi.org/10.3103/S0025654411050098>
6. *Острик В. И.* Раскрытие краевой трещины в упругой плоскости с клиновидным вырезом в условиях контакта со штампом // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2014. – № 2. – С. 73–86.  
Te same: *Ostryk V. I.* Edge crack opening in an elastic plane with a wedge-like cut in contact with a punch // *Mechanics of Solids.* – 2014. – 49, No. 2. – P. 175–186. – <https://doi.org/10.3103/S0025654414020071>
7. *Острик В. И., Улитко А. Ф.* Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
9. *Храпков А. А.* Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил // *Прикладная математика и механика.* – 1971. – № 35, № 4. – С. 677–689.  
Te same: *Khrapkov A. A.* Certain cases of the elastic equilibrium of an infinite wedge with a nonsymmetric notch at the vertex, subjected to concentrated forces // *J. Appl. Math. Mech.* – 1971. – 35, No. 4. – P. 625–637.  
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(71\)90056-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(71)90056-6)
10. *Abrahams I. D.* On the application of the Wiener – Hopf technique to problems in dynamic elasticity // *Wave Motion.* – 2002. – 36, No. 4. – P. 311–333.  
– [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(02\)00027-6](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(02)00027-6)
11. *Abrahams I. D.* On the non-commutative of factorization of Wiener – Hopf kernels of Khrapkov type // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1998. – 454, No. 1974. – P. 1719–1743. – <https://doi.org/10.1098/rspa.1998.0229>

12. Jones D. S. Commutative Wiener – Hopf factorization of a matrix // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1984. – 393, No. 1804. – P. 185–192. – <https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0053>
13. Jones D. S. Wiener – Hopf splitting of a  $2 \times 2$  matrix // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1991. – 434, No. 1891. – P. 419–433. – <https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0101>
14. Khrapkov A. A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. – St. Petersburg: VNIIG, 2001. – 144 p.
15. Veitch B. H., Abrahams I. D. On the commutative factorization of  $n \times n$  matrix Wiener – Hopf kernels with distinct eigenvalues // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2007. – 463, No. 2078. – P. 613–639. – <https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1780>
16. Wickham G. R. Mode conversion, corner singularities and matrix Wiener – Hopf factorization in diffraction theory // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1995. – 451, No. 1942. – P. 399–423. – <https://doi.org/10.1098/rspa.1995.0134>

#### **РАВНОВЕСИЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ, ОСЛАБЛЕННОЙ НАКЛОННЫМ РАЗРЕЗОМ**

*Рассмотрена новая задача о равновесии упругой полуплоскости с жестко закрепленной границей, внутри которой выполнен прямолинейный разрез, выходящий под углом к границе. Построено точное аналитическое решение задачи и разработан эффективный алгоритм матричной факторизации для решения систем уравнений Винера – Хопфа. Задача сведена к системе двух функциональных уравнений Винера – Хопфа, решение которой построено в замкнутом виде. В результате получены явные выражения для смещений и напряжений, которые позволяют охарактеризовать и количественно оценить напряженно-деформированное состояние в полуплоскости в зависимости от геометрических параметров разреза и физических характеристик материала полуплоскости.*

**Ключевые слова:** упругая полуплоскость, наклонный разрез, система Винера – Хопфа.

#### **EQUILIBRIUM OF THE ELASTIC HALF-PLANE WITH RIGIDLY FIXED BOUNDARY, WHICH IS WEAKENED BY A SLANTED CUT**

*The problem of the equilibrium of the elastic half-plane with rigidly fixed boundary, which is weakened by a slanted rectilinear cut, is considered. The exact analytical solution of the problem is constructed and the effective algorithm of the matrix factorization is developed for the solution of the Wiener – Hopf systems of equations. The problem is reduced to the system of two Wiener – Hopf functional equations. The solution of the Wiener – Hopf system is built in closed form. As a result, the formulas for elastic displacements and stresses are found which make it possible to describe and numerically calculate the stress-strain state in the half-plane depending on the cut geometrical parameters and the physical characteristics of the material of the half-plane.*

**Key words:** elastic half-plane, slanted cut, Wiener – Hopf system.