

**СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ, СКЛАДЕНИХ ІЗ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ  
ЗМІННОЇ ҐАУССОВОЇ КРИВИНИ**

*Досліджується стійкість пружних систем з оболонок обертання змінної кривини та складної структури, що знаходяться в полі консервативних осесиметричних навантажень різної природи. У рамках класичної та уточненої теорій оболонок визначаються граничні та біфуркаційні критичні значення діючого навантаження на основі геометрично нелінійної постановки задачі та динамічного критерію стійкості. Для розв'язання відповідних нелінійних задач і задач на власні значення запропоновано чисельно-аналітичну методика, що базується на раціональному їх зведенні до одновимірних лінійних меридіональною координатою крайових задач за і чисельним розв'язанням цих задач методом дискретної ортогоналізації. Наведено тестові приклади, що підтверджують правомірність використання методики в розглянутому класі задач. Проведено аналіз граничних і біфуркаційних значень критичних навантажень оболонкової системи залежно від зміни її геометричних параметрів.*

**Ключові слова:** складена оболонка обертання, осесиметричні навантаження, біфуркаційні та граничні критичні значення, чисельно-аналітична методика, аналіз.

Ця стаття є узагальненням робіт [2, 25, 26] з дослідження стійкості оболонкових елементів в плані розширення класу задач, ускладнення об'єктів дослідження і вдосконалення відповідних розрахункових методик.

Предметом розгляду, як і в роботах [1–3, 25, 26], є пружні неоднорідні анізотропні системи з оболонок обертання різної форми і структури, якими моделюються багато конструкцій сучасної техніки (апарати космічного призначення та підводного занурення, захисні споруди ядерних реакторів, резервуари різного застосування тощо). Дослідження стійкості таких систем є важливим фактором оцінки їх міцності та надійності, а також функціональної придатності в реальних умовах експлуатації.

Цій області механіки деформівного твердого тіла присвячені численні фундаментальні монографії та окремі статті, де викладено основи теорії статичної стійкості та особливості її дослідження, представлені різні моделі деформування оболонок, теоретичні та експериментальні результати з визначення критичних навантажень, проведено аналіз впливу структури матеріалу, наявності недосконалостей, різного виду включень і т. п. на стійкість оболонкових елементів [4, 9, 20, 22, 28, 37]. До недавнього часу основна увага дослідників була зосереджена здебільшого на оболонках простої форми – пластинах, циліндрах, конусах, сферичних сегментах при дії різних видів силового, температурного, аеродинамічного характеру і різних властивостях композитних матеріалів [16, 19, 23, 24, 30, 32–35]. Так, стаття [16] присвячена аналізу випинання вільно опертої прямокутної пластини з ребрами жорсткості. У [19] розглянута стійкість циліндричних і конічних оболонок, що взаємодіють з текучою рідиною. У роботі [35] проведено експериментальне і теоретичне дослідження критичних навантажень композитних трубопроводів під рівномірним зовнішнім гідростатичним тиском. Вплив навантаження вітру і температурного поля на стійкість циліндрів розглядалась у [23, 24], а в [34] такі дослідження проведено для функціонально-градієнтних п'єзоелектричних матеріалів. Детальний аналіз докритичного і закритичного стану переважно циліндричних оболонок (відкритих, замкну-

---

\* nataliya.petrivna@ukr.net

тих, еліптичного поперечного перерізу) при неосесиметричному, циклічно симетричному, локалізованому навантаженні і різних умовах закріплення граничного контуру представлено в [30], для сферичних оболонок такі дослідження проведено в [32].

Особливої уваги заслуговують актуальні в наш час роботи з аналізу стійкості оболонок, виготовлених з наноматеріалів, і їх використанні в сучасних конструкціях [10, 15, 40].

Окрему, досить незначну, область в наукових дослідженнях цього напрямку займають роботи з аналізу стійкості пружних систем зі спряжених оболонок різної форми. Додаткові труднощі пов'язані тут з формулюванням і раціональним урахуванням умов спряження окремих складових елементів при розв'язанні відповідних задач. До того ж, у місцях з'єднання оболонок здебільшого виникають додаткові напруження, що можуть непередбачено вплинути на стійкість системи в цілому. Для пластин і оболонок питання формулювання і реалізації умов спряження на основі методу скінченних елементів розглянуто в статтях [29, 42]. В обширній праці [31] наведено огляд робіт з нелінійного (лінійного) деформування і стійкості систем із циліндрів, конусів і сферичних сегментів (співвісних і неспіввісних), тобто систем нульової або сталої гауссової кривини. Так, складені системи з елементами циліндричної і конічної форми були розглянуті, зокрема, в [36] і [38], з елементами сферичного типу при різних видах статичних полів і співвідношеннях матеріалу – в [27, 41]. Слід зауважити, що для систем зі спряжених оболонок, що мають змінну кривину, такі розробки практично відсутні, хоча в практиці будівництва (куполи культових споруд, урядові будівлі), космічної техніки (корпуси ракет-носіїв), конструювання ємностей різного призначення (балони високого тиску) вказані об'єкти зустрічаються досить часто.

Основою дослідження статичної стійкості оболонок є аналіз діаграми їх рівноважних станів з визначенням характерних точок – біфуркаційних і граничних критичних значень діючого навантаження. Визначення граничних критичних навантажень базується на застосуванні нелінійної постановки відповідних задач, а для знаходження біфуркаційних значень, зазвичай, використовують енергетичний і статичний критерії, значно рідше – динамічний. Два останні критерії в консервативних системах є ідентичними з позиції механіки деформівних систем [5], хоча відрізняються в плані їх обчислювальної реалізації, що може слугувати додатковим фактором підвищення вірогідності одержаних результатів. Застосування цих критеріїв щодо оболонок пов'язано зі знаходженням нетривіального розв'язку однорідної двовимірної лінеаризованої крайової задачі, що зводиться відомими методами прикладної математики до проблеми власних значень для алгебраїчних або звичайних диференціальних рівнянь. При цьому традиційно використовують різні варіанти методу скінченних елементів, скінченних різниць, варіаційно-різницевої і проекційної підходи, методи зниження розмірності і т.д. [8, 9, 12, 16, 17, 21, 29, 30, 42].

У цій роботі для пружних систем зі складених оболонок обертання, що включають елементи змінної кривини та складної структури (за товщиною, досліджуються граничні (нелінійна постановка) і біфуркаційні (динамічний критерій стійкості) критичні значення діючих консервативних осесиметричних навантажень у рамках класичної і уточненої теорій оболонок. Для розв'язання відповідних нелінійних крайових задач і задач на власні значення використано чисельно-аналітичну методикку, що базується на раціональному зведенні (аналітичними способами) вихідної задачі до одновимірних лінійних крайових задач за меридіаном-твірною і практично точним їх розв'язанням чисельним методом ортогональної прогонки [7, 18]. У цьому координатному напрямку, таким чином, змінність геометричних і жорсткісних характеристик оболонок враховується в континуальному вигляді, що є важливим особливо при з'єднанні різнорідних елементів в єдину систему.

**1. Постановка задачі та загальна характеристика методика її розв'язання.** Об'єкт дослідження є традиційним для багатьох робіт авторів [1–3, 25, 26] і представлений пружною системою із співвісних спряжених оболонок обертання, поверхня відліку яких за товщиною  $\gamma = 0$  віднесена до ортогональної криволінійної системи координат  $\alpha, \theta$ . Тут  $\alpha$  – координата, що змінюється за меридіаном-твірною системи, при цьому окрема  $j$ -та її оболонка може бути задана в локальній системі координат  $\alpha_j \in [\alpha_{0j}, \alpha_{1j}]$ ,  $j = 1, \dots, J$ , де  $J$  – кількість складових оболонок системи;  $\theta$  – центральний кут у площині поперечного перерізу  $z = \text{const}$ ;  $\gamma$  – координата, що змінюється за нормаллю до вибраної вихідної поверхні;  $Oz$  – вісь обертання твірної;  $\varphi$  – кут між нормаллю до твірної і віссю  $Oz$  (рис. 1). Уздовж товщини матеріали оболонки за фізичними властивостями можуть бути однорідними, неоднорідними (функціонально-градієнтними) або дискретно неоднорідними (шаруватими). Для шаруватих оболонок приймаємо, що суміжні шари контактують без відриву та проковзування. Щодо умов закріплення торців системи  $\alpha = \alpha_{01}$ ,  $\alpha = \alpha_{1J}$  ніяких обмежень немає, окрім, хіба що, їх фізичної несумісності. На лініях контакту суміжних оболонок  $\alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1}$ ,  $j = 1, \dots, J-1$ , приймаємо умови рівноваги статичних і умови нерозривності кінематичних характеристик напружено-деформованого стану (НДС) у спільній системі координат  $rOz$ .

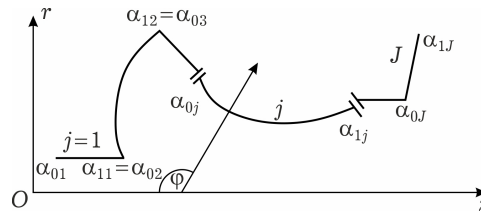


Рис. 1

Оболонки знаходяться в полі консервативних осесиметричних силових і/або температурних навантажень різного виду: розподілених за меридіаном, зосереджених на торцевих контурах або в окремих перерізах  $z = \text{const}$ .

У роботі критичні значення діючих полів визначаємо при втраті стійкості описаних оболонкових систем за осесиметричною (граничні критичні значення) та неосесиметричною (біфуркаційні критичні значення) формами. Дослідження проводимо при таких припущеннях:

- основний (докритичний) НДС визначається пружною стадією деформування у діапазоні діючих осесиметричних навантажень аж до їх граничних значень;
- біфуркаційні критичні навантаження визначаються за динамічним критерієм стійкості, коли за їх критичне значення приймається таке, при якому мінімальна частота власних коливань попередньо навантаженої оболонкової системи дорівнює нулеві, тобто коли колильний рух відносно основного стану переходить в лімітаційний;
- коливання оболонок розглядаються як малі збурення відносно основного попередньо навантаженого стану;
- математична модель стійкості будується на основі геометрично нелінійної теорії в квадратичному наближенні в рамках припущень класичної теорії Кірхгофа – Лява та уточненої теорії Тимошенка для всього пакету шарів в цілому і з урахуванням температурних навантажень за гіпотезою Дюгамеля – Неймана [7, 13, 14].

Таким чином, рівноважні стани спряжених оболонкових систем і шукають характерні точки їх діаграм (граничні та біфуркаційні критичні значення)

ня) при використанні динамічного критерію стійкості визначаються з нелінійної двовимірної задачі, яку можна подати умовно в такому векторно-матричному вигляді:

– система нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними

$$\frac{\partial \bar{N}}{A \partial \alpha} = \sum_{q=0}^{qq} A_q \frac{\partial^q \bar{N}}{\partial \theta^q} + \bar{G} + \bar{q}^0 + C \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial t^2}, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\},$$

$$j = 1, \dots, J, \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (1)$$

– умови спряження на лініях контакту

$$S_{1j} \bar{N} = S_{0j+1} \bar{N} + \bar{F}_j^0, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1}, \quad j = 1, \dots, J-1; \quad (2)$$

– граничні умови на торцях системи

$$B_{01} \bar{N} = \bar{b}_{01}^0, \quad \alpha = \alpha_{01}, \quad (3)$$

$$B_{1J} \bar{N} = \bar{b}_{1J}^0, \quad \alpha = \alpha_{1J}; \quad (4)$$

– умови періодичності в коловому напрямку

$$\bar{N}(\alpha, \theta + 2\pi, t) = \bar{N}(\alpha, \theta, t). \quad (5)$$

Тут  $\bar{N} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\}$  – шукана вектор-функція, компонентами якої є такі статичні і кінематичні характеристики НДС відповідно до прийнятої оболонкової теорії:

$$\bar{N} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\} =$$

$$= \begin{cases} \{N_\alpha, \hat{S}_\alpha, \hat{Q}_\alpha, M_\alpha, u, v, w, \vartheta_\alpha\}, & qq = 4, \\ \{N_\alpha, N_{\alpha\theta}, Q_\alpha, M_\alpha, H, u, v, w, \psi_\alpha, \psi_\theta\}, & qq = 2, \end{cases} \quad (6)$$

де  $N_\alpha$ ,  $Q_\alpha$ ,  $M_\alpha$  – тангенціальне і перерізує зусилля і згинний момент у перерізі  $\alpha = \text{const}$ ;  $N_{\alpha\theta}$  – зсувне тангенціальне зусилля;  $H$  – крутний момент;  $\hat{S}_\alpha = N_{\alpha\theta} + k_\theta H$ ,  $\hat{Q}_\alpha = Q_\alpha + \frac{\partial H}{r \partial \theta}$  – зведені зсувне і поперечне зусилля;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – меридіональне, колове і нормальне переміщення;  $\vartheta_\alpha$  – кут повороту нормалі в площині  $\theta = \text{const}$ ;  $\psi_\alpha$ ,  $\psi_\theta$  – повні кути повороту прямолінійного елемента;  $r = r(\alpha)$  – відстань точки координатної поверхні від осі обертання  $Oz$ ,  $k_\theta = k_\theta(\alpha)$  – кривина координатної лінії  $\alpha = \text{const}$ ;

$\sum_{q=0}^{qq} A_q \frac{\partial^q \bar{N}}{\partial \theta^q} = L$  – матричний диференціальний оператор порядку  $qq$  за змінною  $\theta$ , побудований за основними співвідношеннями класичної ( $qq = 4$ ) і уточненої ( $qq = 2$ ) теорій [7];  $A$  – коефіцієнт Ляме за координатою  $\alpha$ ; компонентами вектора  $\bar{G} = \{g_n(\alpha)\}$  є квадратичні функції компонент вектора  $\bar{N}$ , що відповідають геометрично нелінійній теорії оболонок у квадратичному наближенні;  $C$  – матриця, яка характеризує інерційні властивості системи;  $S_{1j} = \{s_{ni}^{1j}\}$ ,  $S_{0j+1} = \{s_{ni}^{0j+1}\}$  – матриці, які формують умови спряження у перерізах  $\alpha = \alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, J-1$ ;  $B_{01} = \{b_{ni}^{01}\}$ ,  $B_{1J} = \{b_{ni}^{1J}\}$  – матриці граничних умов на контурах  $\alpha = \alpha_{01}$  і  $\alpha = \alpha_{1J}$  відповідно;  $\bar{q}^0 = \{q_n^0\}$ ,  $\bar{F}_j^0 = \{f_{nj}^0\}$  і  $\bar{b}_{01}^0 = \{b_{01n}^0\}$ ,  $\bar{b}_{1J}^0 = \{b_{1Jn}^0\}$  – вектори, що характеризують осесимет-

ричні розподілені навантаження і температурні поля, зосереджені зусилля-моменти в перерізі  $\alpha = \alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, J-1$ , і контурні навантаження на торцях  $\alpha = \alpha_{01}$ ,  $\alpha = \alpha_{1J}$ ;  $t$  – час. Вирази для елементів матриць  $A_q = \{a_{ik}^q\}$ ,  $i, k = 1, \dots, n$ , і компонент вектора  $\bar{G} = \{g_n(\alpha)\}$  наведено в [7].

При дослідженні стійкості таких систем розглядаємо дію одного або декількох компонент заданих полів  $\bar{q}^0 = \{q_n^0\}$ ,  $\bar{F}_j^0 = \bar{F}_j^0 = \{f_{nj}^0\}$ ,  $\bar{b}_{01}^0 = \{b_{01n}^0\}$ ,  $\bar{b}_{1J}^0 = \{b_{1Jn}^0\}$ , що змінюються пропорційно до одного й того ж параметра  $\delta$ . Тоді задача зводиться до знаходження такого значення цього параметра, при якому втрата стійкості реалізується за осесиметричною (граничне критичне значення  $\delta^{\text{lim}}$ ) або за неосесиметричною (біфуркаційне критичне значення  $\delta^{\text{bif}}$ ) формою. При цьому  $\delta^{\text{bif}}$  згідно з динамічним критерієм визначаємо з умови  $\omega_{\min}(\delta) = 0$ , де  $\omega_{\min}$  – найменша частота власних коливань оболонкової системи з урахуванням попередньої дії заданого навантаження з параметром  $\delta$ .

Розв'язання задачі (1)–(5) при зроблених припущеннях допускає фізично обґрунтовану декомпозицію шуканого розв'язку  $\bar{N}$  на дві складові: основну  $\bar{N}^0$ , яка визначає докритичний стан, і динамічну  $\bar{N}^d$ , що відповідає коливанням оболонкової системи відносно основного стану:

$$\bar{N} \approx \bar{N}^0 + \bar{N}^d, \quad \bar{N}^0 \gg \bar{N}^d.$$

Відповідно до цього і задачу (1)–(5) можна наближено звести до таких двох задач:

- – задача про основний стан спряжених оболонок при заданих осесиметричних навантаженнях, яка є одновимірною нелінійною крайовою задачею і формулюється відносно вектор-функції  $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha)\}$ :

$$\frac{1}{A} \frac{d\bar{N}^0}{d\alpha} = L^0 \bar{N}^0 + \bar{G}(\alpha, \bar{N}^0, \dots) + \bar{q}^0, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (7)$$

$$S_{1j} \bar{N}^0 = S_{0j+1} \bar{N}^0 + \bar{F}_j^0, \quad \alpha = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, J-1, \quad (8)$$

$$B_{01} \bar{N}^0 = \bar{b}_{01}^0, \quad \alpha = \alpha_{01}, \quad (9)$$

$$B_{1J} \bar{N}^0 = \bar{b}_{1J}^0, \quad \alpha = \alpha_{1J}, \quad (10)$$

(тут  $L^0$  – алгебраїчний оператор);

- – задача про малі незатухаючі коливання оболонок відносно основного стану, одержана внаслідок лінеаризації вихідної задачі (1)–(5) відносно вектор-функції  $\bar{N}^d = \{N_n^d(\alpha, \theta, t)\}$ :

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \bar{N}^d}{\partial \alpha} = \tilde{L} \bar{N}^d + C \frac{\partial^2 \bar{N}^d}{\partial t^2}, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\},$$

$$j = 1, \dots, J, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (11)$$

$$S_{1j} \bar{N}^d = S_{0j+1} \bar{N}^d, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1}, \quad j = 1, \dots, J-1, \quad (12)$$

$$B_{01} \bar{N}^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{01}, \quad (13)$$

$$B_{1J} \bar{N}^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}, \quad (14)$$

$$\bar{N}^d(\alpha, \theta + 2\pi, t) = \bar{N}^d(\alpha, \theta, t) \quad (15)$$

(тут  $\tilde{L} = L + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{N}^0}$  – диференціальний матричний оператор, що містить як параметричні члени компоненти вектор-функції основного напруженого стану  $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha, \delta)\}$ , залежні від параметра навантаження  $\delta$ ).

Для розв'язання одновимірної нелінійної крайової задачі (7)–(10) використовуємо процедуру лінеаризації у формі Ньютона – Канторовича – Рафсона (метод квазілінеаризації) у поєднанні з методом ортогональної прогонки, алгоритм якого викладено в [3, 7, 18]. Процес лінеаризації ( $j = 1, 2, \dots$ ) є збіжним в області опуклості оператора  $L^0$  задачі, що в цьому класі оболонок співпадає з областю докритичних навантажень, а поза нею є розбіжним [6]. Цей факт слугує обчислювальним критерієм визначення граничного критичного значення параметра  $\delta^{\text{lim}}$ :  $\delta^- \leq \delta^{\text{lim}} \leq \delta^+$ , де  $\delta^-$  – найбільше значення навантаження, при якому процес квазілінеаризації монотонно збігається, а  $\delta^+$  – найменше значення  $\delta$ , при якому цей процес є розбіжним або порушується його монотонна збіжність.

Двовимірна крайова задача (11)–(15) про малі незатухаючі коливання попередньо навантаженої оболонкової системи після відокремлення часового множника  $e^{i\omega t}$  у компонентах шуканого розв'язку  $\bar{N}^d$  і подання їх з урахуванням умов періодичності (15) у вигляді тригонометричних рядів за коловою координатою  $\theta$ :

$$\bar{N}^d = \left\{ N_n^d(\alpha, \theta, t) = \sum_{k=0,1,2,\dots} N_{nk}^d(\alpha) \begin{bmatrix} \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{bmatrix} e^{i\omega t}, \right. \quad (16)$$

зводиться до такої послідовності однопараметричних однорідних крайових задач відносно функціональних коефіцієнтів  $\bar{N}_k^d = \{N_{nk}^d(\alpha)\}$  з рівності (16):

$$\frac{1}{A} \frac{d\bar{N}_k^d}{d\alpha} = (A_k - \lambda C) \bar{N}_k^d, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (17)$$

$$S_{1j} \bar{N}_k^d = S_{0j+1} \bar{N}_k^d, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1}, \quad j = 1, \dots, J-1, \quad (18)$$

$$B_{01} \bar{N}_k^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{01}, \quad (19)$$

$$B_{1J} \bar{N}_k^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}. \quad (20)$$

Тут  $A_k$  – квадратна матриця 8-го або 10-го порядку, одержана з оператора  $\tilde{L}$  в (11) відповідно до розвинення (16),  $\lambda = \omega^2$ ,  $\omega$  – власна частота коливань оболонкової системи,  $k$  – параметр, що характеризує форму хвилеутворення в коловому напрямку. Вираз  $\begin{bmatrix} \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{bmatrix}$  у рівності (16) означає, що непарні компоненти вектор-функції  $\bar{N}^d$  ( $\{\hat{S}_\alpha, v\}$  – класична теорія,  $\{N_{\alpha 0}, H, v, \psi_\theta\}$  – уточнена) подаємо за  $\sin k\theta$ , парні – за  $\cos k\theta$ .

Для знаходження невідомого числового множника  $\lambda = \omega^2$ , при якому однорідна крайова задача (17)–(20) має нетривіальний розв'язок, для кожного значення гармоніки  $k$  в (16) використовують відомі методи: метод послідовних наближень у варіанті оберненої ітерації, метод покрокового пошуку в поєднанні з методом ортогональної прогонки. Алгоритми цих методів детально описано в [1, 7, 11].

Наведемо загальну схему методики визначення параметрів граничних  $\delta^{\text{lim}}$  і біфуркаційних  $\delta^{\text{bif}}$  критичних значень діючого навантаження. Ці значення знаходимо покроково для послідовності  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

На  $i$ -му проміжному кроці процесу, якщо  $\delta_{i-1} \neq \delta^{\text{lim}}$ , здійснюємо такі процедури:

- 1°. Розв'язання нелінійної осесиметричної задачі (7)–(10) про визначення основного стану оболонкової системи  $\bar{N}^0(\delta_i)$  за методом квазілінеаризації ( $j = 1, 2, \dots$ ) і за класичною теорією Кірхгофа – Лява ( $n = 8$ ,  $qq = 4$ ) (6).
- 2°. Уточнення одержаного розв'язку за уточненою теорією ( $n = 10$ ,  $qq = 2$ ) у (6).
- 3°. Якщо процес квазілінеаризації є розбіжним, то повернення до попереднього ( $i - 1$ )-го кроку з  $\delta = \delta_{i-1}$  і меншим значенням  $\Delta_{i-1}$ .
- 4°. Якщо процес квазілінеаризації монотонно збігається і
  - 4.1. якщо  $\delta_{i-1} = \delta^{\text{bif}}$ , то перехід до наступного ( $i + 1$ )-го кроку пошуку,
  - 4.2. якщо  $\delta_{i-1} \neq \delta^{\text{bif}}$ , то далі (до 5°).
- 5°. Розрахунок власних частот методом послідовних наближень для  $k = 0, 1, 2, \dots, K$  у (16) за класичною теорією оболонок ( $n = 8$ ,  $qq = 4$ ) у (6).
- 6°. Уточнення значень знайдених частот  $\Delta(\lambda)$ -методом за уточненою теорією Тимошенка ( $n = 10$ ,  $qq = 2$ ) у (6).
- 7°. Якщо для деякого  $k = k^*$  виявиться, що  $\omega_{k^*}(\delta_i) = 0$  ( $\omega_{k^*}(\delta_i) \ll \ll \omega_\ell(\delta_i)$ ,  $\ell \neq k^*$ ), то за динамічним критерієм стійкості приймаємо, що  $\delta^{\text{bif}} = \delta_i$ , і переходимо до наступного ( $i + 1$ )-го кроку з повтором всіх процедур 1° – 7°.

Досягнення заданої точності обчислення граничних  $\delta^{\text{lim}}$  і біфуркаційних  $\delta^{\text{bif}}$  критичних значень діючого навантаження здійснюється шляхом подрібнення величини  $\Delta_i$ .

**2. Практичне обґрунтування методики (тестування).** Цей етап – етап тестування – є обов'язковим для правомірності використання розробленої методики в розглянутому класі задач. У роботах авторів він проводиться індуктивно на основі відомих засобів прикладної математики, наприклад, шляхом порівняння з результатами розв'язання окремих задач, отриманих аналітично, експериментально або чисельно іншими методами. У роботі [2] таке тестування проведено на прикладі окремих оболонок – сферичного пологого купола і зрізаного ізотропного конуса, а також системи циліндр – півсфера зі склопластикового матеріалу. Порівняння з експериментальними результатами і результатами, отриманими методом скінченних різниць, показали гарний збіг знайдених граничних і біфуркаційних критичних значень діючих навантажень. Тут додатково наводимо ще два приклади розв'язання задачі стійкості для системи спряжених оболонок, що запозичені зі статей [21, 39].

Розглядаємо кругову пластину радіуса  $a$ , складену з двох елементів: кругової пластини радіуса  $c$ , сталі товщини  $h_0$  і кільцевої пластини з внутрішнім радіусом  $c$  і зовнішнім радіусом  $a$ , товщина якої змінюється лінійно від значення  $h_0$  до  $h_1$  (рис. 2а). Матеріал пластин – ізотропний з модулем пружності  $E$ , коефіцієнтом Пуассона  $\mu$  і густиною  $\rho$ . Зовнішній контур спряженої системи пластин  $r = a$  шарнірно опертий і на нього діють стискувачі тангенціальні зусилля  $p$ .

Для цієї системи за розробленою методикою визначаємо мінімальну власну частоту  $\omega_{\min}$  і критичні значення контурних зусиль  $p^*$  за теоріями Кірхгофа – Лява (KIR) і Тимошенка (TIM) і порівнюємо з результатами роботи [39]. Ці дані наведено в табл. 1 у вигляді безрозмірної мінімальної власної частоти  $\Omega_{00} = a^2 \sqrt{\frac{\rho h_0}{D_0}} \omega_{\min}$  (тут  $D_0 = \frac{Eh_0}{12(1-\mu^2)}$ ) і безрозмірного тангенціального зусилля  $\tilde{N}_{cr} = \frac{a^2}{D_0} p^*$  для двох варіантів змінної товщини кругової пластини  $c/a = 0.5$  і  $c/a = 0.75$  при таких інших геометричних параметрах:  $a = 1.2$  м,  $h_0 = 0.016$  м,  $h_1 = 0.012$  м.

Таблиця 1

	$c/a = 0.5$			$c/a = 0.75$		
	KIR	TIM	[39]	KIR	TIM	[39]
$\Omega_{00}$	8.518	8.516	8.519	8.847	8.839	8.882
$\tilde{N}_{cr}$	10.86	10.86	10.78	11.82	11.82	11.89

Як видно з табл. 1, розрахунки за уточненою теорією Тимошенка практично не змінюють значень критичних навантажень, а власні частоти уточнюються менше, ніж на 0.1%. При цьому відмінність між результатами за розробленою методикою і результатами з [39], які одержано методом Рітца в двочленному наближенні, знаходиться в межах 1%.

Для ілюстрації застосування динамічного критерію стійкості при визначенні критичних значень діючого навантаження на рис. 2б наведено залежності  $\Omega_{00} = \Omega_{00}(k)$  як умовні криві для різних значень контурного тангенціального зусилля:  $p = 0$  (відсутність навантаження),  $p = p^* < 0$  (критичне стискаюче зусилля),  $p > 0$  (розтягуюче зусилля). Аналіз цих залежностей дозволяє прогнозувати, що ці спряжені пластини не втрачають стійкості за біфуркаційною формою з утворенням випинань-вм'ятин у коловому напрямку ( $\Omega_{00} \neq 0$  при жодному  $k > 0$ ), а лише тільки за осесиметричною формою ( $\Omega_{00} = 0$  лише при  $k = 0$ ). Очевидно також, що пластини при розтягуючому зусиллі  $p > 0$  у докритичній стадії деформування стійкості не втрачають.

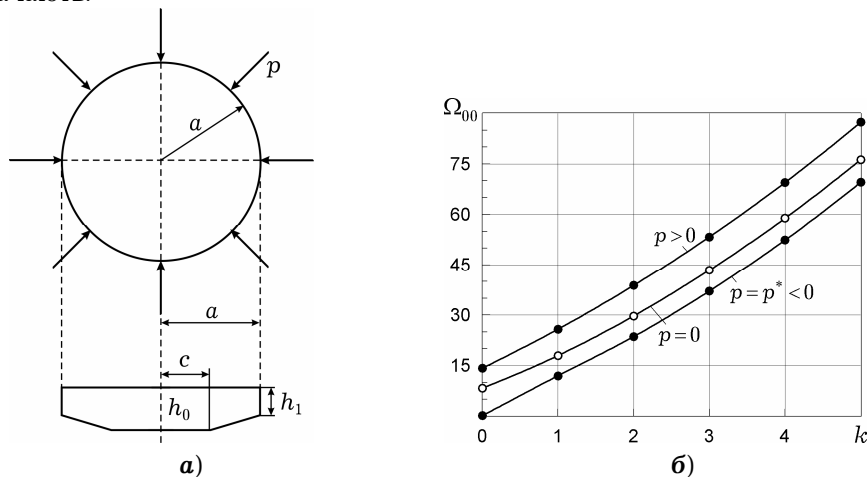


Рис. 2

Розглянемо стійкість конічного резервуара з водою, розрахункова схема якого подана у вигляді спряжених між собою двох оболонок (рис. 3а):



конічної ( $r_1$ ,  $r_2$  і  $\ell_{\text{con}}$  – початковий, кінцевий радіуси і довжина конуса) і циліндричної ( $r_2$  і  $\ell_{\text{cyl}}$  – радіус і довжина циліндра). Обидві частини резервуара мають однакову товщину, виготовлені з ізотропного матеріалу майлара і перебувають під дією нормального тиску інтенсивності  $p$ . Конічна і циліндрична частина до висоти  $\ell_w$  заповнені водою. Нижній торець конуса жорстко закріплений, верхній торець циліндра – вільний.

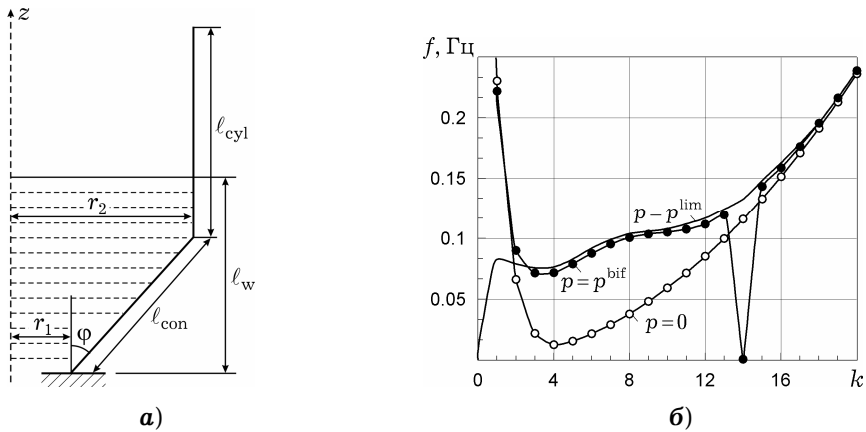


Рис. 3

Розрахунок граничного  $p^{\text{lim}}$  і біфуркаційного  $p^{\text{bif}}$  критичних значень навантаження проводили при таких вихідних даних (розміри подано в сантиметрах, як у [2]):

$$r_1 = 13 \text{ см}, \quad r_2 = 32.173 \text{ см}, \quad \ell_{\text{con}} = 39.16 \text{ см}, \quad \ell_{\text{cyl}} = 40 \text{ см}, \quad \ell_w = 8 \text{ см},$$

$$E = 5.0285 \cdot 10^5 \text{ Н/см}^2, \quad \mu = 0.33.$$

Для оцінки впливу окремих елементів системи на її стійкість додатково розглядали один її елемент – конус тих самих геометричних розмірів і діючого навантаження при умові вільного верхнього торця.

Значення граничного коефіцієнта навантаження  $p^{\text{lim}}$ , що відповідає осесиметричній втраті стійкості (проклацування), і біфуркаційного коефіцієнта  $p^{\text{bif}}$ , що відповідає неосесиметричній втраті стійкості з утворенням  $k$  «випинань-вм'ятин» у коловому напрямку, наведено в табл. 2 для зв'язаної системи (конус – циліндр) і окремого елемента (конус). Результати отримано за розробленою методикою [2] і методом скінченних різниць – за програмою BOSOR 4 в [21].

Таблиця 2

Критичне навантаження	$k$	Конус-циліндр			Конус
		[21]	[2]	$\varepsilon, \%$	[2]
$p^{\text{lim}}$	0	0.993	0.999	0.6	1.001
$p^{\text{bif}}$	14	0.943	0.940	0.3	0.9402

Як бачимо у табл. 2, розрахунок критичних значень граничних і біфуркаційних навантажень за розробленою методикою для системи конус – циліндр підтверджується результатами з [21] з відмінністю менше 1%. Зауважимо, що уточнення результатів за теорією Тимошенка практично не вплинуло на критичні значення цих навантажень ( $< 0.05 \%$ ).

Як і в попередньому прикладі, для наглядності застосування динамічного критерію стійкості на рис. 3б наведено умовні криві  $f = f(k)$ , що ха-

рактикують залежність власних частот оболонкової системи від параметра хвилеутворення  $k$  для різних значень інтенсивності діючого навантаження:  $p = 0$  (відсутність навантаження),  $p = p^{\text{bif}}$  (внутрішній тиск в околі біфуркаційного значення),  $p = p^{\text{lim}}$  (внутрішній тиск в околі граничного значення). З аналізу цих залежностей бачимо, що при внутрішньому тиску система конус – циліндр втрачає стійкість за біфуркаційною формою з 14-ма «випинаннями-вм'ятинами» та за осесиметричною формою при значенні навантаження  $p = p^{\text{lim}}$ .

Цікаво відмітити, що порівняння отриманих критичних значень навантаження для системи в цілому і окремо взятого конуса (останній стовпчик табл. 2) показало практичне співпадання результатів (у межах 0.5%). Це свідчить про те, що наявність циліндричного елемента в загальній системі практично не впливає на значення її критичних навантажень. Таким чином, у цьому конкретному випадку аналіз стійкості системи в цілому можна проводити за окремим її елементом – конусом, як найбільш вразливого з позиції втрати стійкості.

**4. Чисельні результати.** Розглянемо пружну систему, що складається з еліптичної ( $EL^+$ ) і циліндричної ( $CYL$ ) оболонок, з'єднаних між собою перехідним елементом  $S$  різної геометричної форми (рис. 4а).

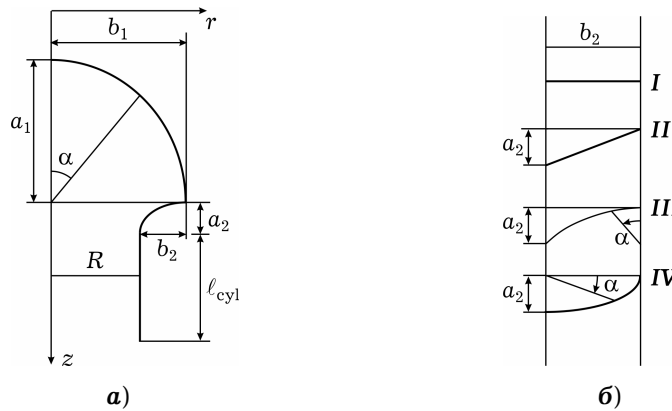


Рис. 4

Еліптична оболонка з центром на осі обертання  $Oz$  і півосями  $a_1$  (по осі  $Oz$ ) і  $b_1$  (по осі  $Or$ ) має сталу товщину  $h_E$ , а меридіан-твірну її середньої поверхні в системі координат  $rOz$  задаємо в такому параметричному вигляді:

$$r(\alpha) = b_1 \sin \alpha, \quad z(\alpha) = a_1 \cos \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi/2],$$

де  $\alpha$  – центральний кут еліпса, що характеризує поточний стан точки на твірній і відраховується від осі обертання  $Oz$  за годинниковою стрілкою.

Циліндрична оболонка сталої товщини  $h_{cyl}$  має радіус  $R$  і довжину  $l_{cyl}$ , а рівняння її твірної задаємо у вигляді

$$r(s) = R, \quad s \in [0, l_{cyl}],$$

де  $s$  – відстань поточної точки на твірній циліндра від деякого початкового положення.

Для перехідного елемента  $S$  товщини  $h_S$  розглядаємо такі варіанти його форми (рис. 4б):

$I$  – кільцева пластина довжини  $b_2$  з радіусами  $R + b_2$ ,  $R$  і рівнянням твірної

$$r(s) = R + b_2 - s, \quad s \in [0, b_2],$$

де  $s$  – відстань до поточної точки на твірній пластини;

**II** – конічна оболонка з тими самими радіусами  $R + b_2$ ,  $R$ , довжиною  $\ell_{\text{con}}$  і рівнянням твірної

$$r(s) = R + b_2 - s \frac{b_2}{\ell_{\text{con}}}, \quad s \in [0, \ell_{\text{con}}], \quad \ell_{\text{con}} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

( $s$  – відстань до поточної точки на твірній конуса,  $a_2$  – довжина перехідного елемента по осі  $Oz$ );

**III** – частина тороеліптичної оболонки від'ємної кривини ( $TE^-$ ) з півосями  $a_2$  (по осі  $Oz$ ),  $b_2$  (по осі  $Or$ ) і відстанню  $r^- = R + b_2 = b_1$  центра еліпса від осі обертання, а рівняння твірної приймаємо в такому параметричному вигляді:

$$r(\alpha) = r^- - b_2 \sin \alpha, \quad z(\alpha) = -a_2 \cos \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi/2]$$

( $\alpha$  – центральний кут еліпса, що змінюється тут від осі  $Oz$  проти годинникової стрілки);

**IV** – частина тороеліптичної оболонки додатної кривини ( $TE^+$ ) з тими самими півосями, що і в варіанті **III**, і відстанню  $r^+ = R$  центра еліпса від осі обертання, рівняння твірної приймаємо у такому параметричному вигляді:

$$r(\alpha) = r^+ + b_2 \cos \alpha, \quad z(\alpha) = a_2 \sin \alpha, \quad \alpha \in [0, \pi/2]$$

( $\alpha$  – центральний кут еліпса, що змінюється за годинниковою стрілкою від осі  $Or$ ).

Подібними спряженими системами можуть моделюватися архітектурні споруди круглої форми з куполоподібним покриттям різної кривини розважального, культового, оборонного і інших призначень.

Складові оболонки є ізотропними і виготовленими із матеріалів з різними модулями пружності і коефіцієнтами Пуассона:  $E^+$ ,  $\mu^+$  – еліптична частина,  $E^S$ ,  $\mu^S$  – перехідник,  $E^{\text{cyl}}$ ,  $\mu^{\text{cyl}}$  – циліндрична частина. Торець циліндричної оболонки вважаємо жорстко закріпленим, а у вершині еліптичної (куполоподібної) частини приймаємо умови симетрії. Система знаходиться під осесиметричним зовнішнім тиском інтенсивності  $q$ , рівномірно розподіленим по основній еліптичній оболонці, перехідник і циліндрична частина системи вільні від будь-яких навантажень, так що в цілому система знаходиться при тиску, що нерівномірно розподілений за твірною.

Дослідимо стійкість такої системи при зміні геометричних параметрів навантаженої еліптичної частини, яку будемо характеризувати параметром

еліптичності  $\beta = \frac{a_1}{b_1}$ , що дорівнює відношенню її півосей, при  $b_1 = \text{const}$  і

варіюванні значеннями висоти  $a_1$  в діапазоні  $\beta \in [1/6, 2]$ . Залежності критичних значень граничних  $q^{\text{lim}} = q^{\text{lim}}(\beta)$  і біфуркаційних  $q^{\text{bif}} = q^{\text{bif}}(\beta)$  навантажень дослідимо для наведених чотирьох варіантів форми перехідного елемента **I–IV**.

Наступні розрахунки наведемо для таких вихідних даних:

$$R = 20 \text{ м}, \quad b_1/R = 1.5, \quad a_2/R = 0.25, \quad b_2/R = 0.5,$$

$$\ell_{\text{cyl}}/R = 1.25 \quad - \text{ для варіанта I,}$$

$$\ell_{\text{cyl}}/R = 1.0 \quad - \text{ для варіантів II, III, IV,}$$

$$\begin{aligned}
h_E/R = h_S/R &= 0.5 \cdot 10^{-3}, & h_{\text{cyl}}/R &= 10^{-2}, \\
E^+ &= 2.5 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & \mu^+ &= 0.35 \quad (\text{глинистий сланець - природний шифер}), \\
E^S &= 2.0 \cdot 10^{11} \text{ Па}, & \mu^S &= 0.24 \quad (\text{вуглецева сталь}), \\
E^{\text{cyl}} &= 2.0 \cdot 10^{10}, & \mu^{\text{cyl}} &= 0.16 \quad (\text{бетон}).
\end{aligned}$$

Характерна для цієї системи картина докритичного стану представлена на рис. 5 у вигляді розподілу по її твірній відносного прогину  $w/w_{\max}$  (див. рис. 5а) і максимальних меридіональних  $\sigma_s^+$  і колових  $\sigma_\theta^+$  напружень на зовнішній поверхні (див. рис. 5б) для варіанта перехідника I,  $\beta = 1$ , в околі критичного значення граничного навантаження  $q^{\text{lim}} = 0.6$  ( $w_{\max}$  – прогин вершини еліптичної оболонки). Як бачимо на рис. 5а, діючий зовнішній тиск викликає найбільші переміщення всередину оболонки ( $w < 0$ ) на навантаженій еліптичній частині ( $s \in [0, 46]$ ), у той час як у перехіднику ( $s \in [46, 56]$ ) виникають досить великі прогини протилежного знаку, а переміщення циліндра ( $s \in [56, 76]$ ) практично відсутні (на декілька порядків менші від максимальних). Максимальні напруження, на відміну від прогинів, концентруються виключно в області перехідного елемента, при цьому найбільші стискуючі напруження як меридіональні, так і колові (які зумовлюють втрату стійкості) зосереджені в зоні спряження еліптичної оболонки з перехідником, а розтягуючі – в зоні спряження перехідника з циліндром. Порівняно з цими напруженнями напруження еліптичної оболонки і циліндра є нижчими більше ніж на три порядки.

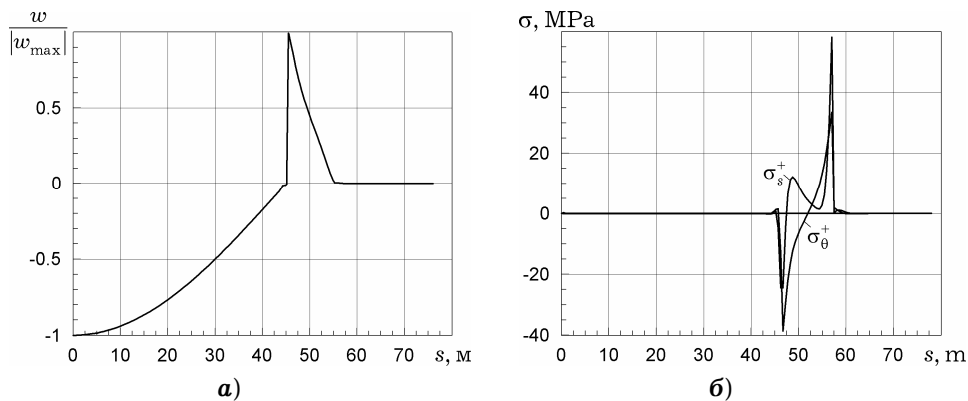


Рис. 5

Залежності критичних значень граничних навантажень  $q^{\text{lim}} = q^{\text{lim}}(\beta)$  представлені на рис. 6а для варіантів I, II форми перехідника і на рис. 6б – для варіантів III, IV. Як бачимо на рис. 6, зміна параметра  $\beta$  еліптичної частини системи якісно по-різному відображається на наведених залежностях. Так, найбільш очікуваною і природною ця залежність виявилась для перехідника в формі кільцевої пластини (варіант I), де вона представлена у вигляді монотонно зростаючої функції. Для випадків тороеліптичних перехідників, як від’ємної, так і додатної кривини (варіанти III, IV) збільшення  $\beta$  в усьому діапазоні його зміни  $\beta \in [1/6, 2]$  практично не впливає на величину граничних навантажень, причому кількісні їхні значення на порядок менші, ніж у варіантах I, II. Для перехідника в формі конуса (варіант II) крива  $q^{\text{lim}} = q^{\text{lim}}(\beta)$  в діапазоні  $\beta \in [1/6, 1]$  монотонно зростає, як у варіанті I, а в діапазоні  $\beta \in [1, 2]$  практично є сталою, як у варіантах III, IV ( $\beta = 1$  – сферичний купол).

Таким чином, взаємовплив параметра еліптичності  $\beta$  навантаженої частини системи і форми перехідника *I–IV* спостерігається тільки для випадку перехідника в формі кільцевої пластини (*I*) і частково – для перехідника в формі конуса (*II*). В інших випадках картина критичних навантажень визначається виключно формою перехідника.

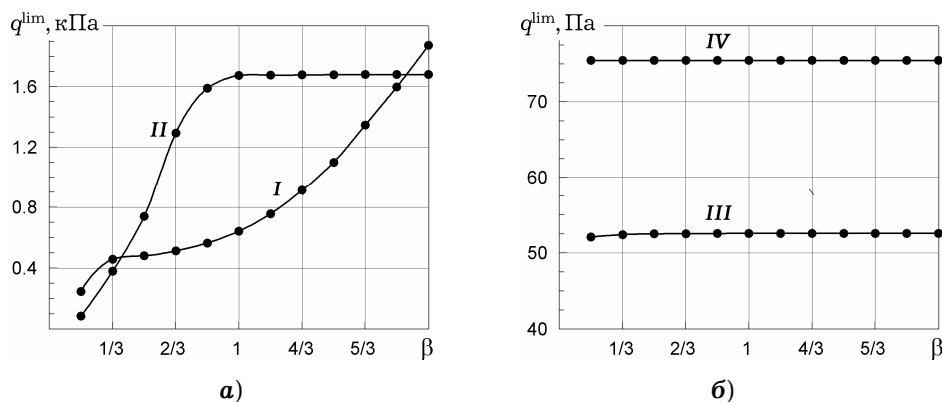


Рис. 6

Аналогічні залежності критичних значень навантажень при біфуркаційній формі втрати стійкості  $q^{\text{bif}} = q^{\text{bif}}(\beta)$  із зазначенням числа випинань-вм'ятин у коловому напрямку представлені на рис. 7: варіанти форми перехідника *I, II* – на рис. 7а, варіанти форми перехідника *III, IV* – на рис. 7б (штриховою лінією нанесено критичні значення граничного навантаження). Випадки тороеліптичних перехідників (рис. 4б, *III, IV*) і кільцевої пластини (рис. 4б, *I*) при оцінці критичних значень навантажень особливого інтересу не викликають, оскільки їхні величини на порядок нижчі від відповідних величин для перехідника конічної форми (*II*). У цьому останньому випадку крива  $q^{\text{bif}} = q^{\text{bif}}(\beta)$  складається з трьох гілок: зростаючої для  $\beta \in [1/6, 1/2]$  з двома випинаннями ( $k = 2$ ) в коловому напрямку; спадної при  $\beta \in (1/2, 1]$  з  $k = 18, 19, 22$  і слабко зростаючої при  $\beta \in (1, 2]$  з  $k = 22, 21, 20$ .

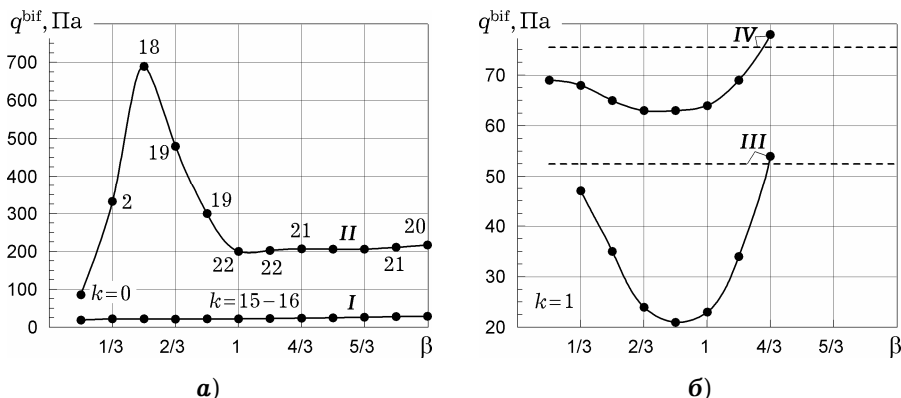


Рис. 7

Найбільші критичні величини навантажень при біфуркаційній формі втрати стійкості з усіх розглянутих варіантів *I–IV* і зміни параметра  $\beta$  спостерігаємо при  $\beta = 1/2$  і перехіднику конічної форми.

Таким чином, для складених пружних систем із оболонки обертання різної кривини проведено дослідження статичної стійкості в полі консервативних осесиметричних навантажень.

Критичні значення граничних і біфуркаційних навантажень визначались в рамках класичної та уточненої типу Тимошенка моделей оболонок на основі геометрично нелінійної теорії в квадратичному наближенні та динамічного критерію стійкості.

Для розв'язання відповідних нелінійних задач і задач на власні значення побудовано єдину чисельно-аналітичну методику, що базується на раціональному зведенні їх до лінійних одновимірних крайових задач і чисельному розв'язанні цих задач методом ортогональної прогонки.

Тестуванням методики підтверджено правомірність її застосування до розв'язання задач стійкості розглянутого класу оболонок систем.

Проведено дослідження стійкості складеної системи з елементами різної гауссової кривини. Показано взаємозв'язок всіх її складових при визначенні критичних біфуркаційних і граничних навантажень.

1. Беспалова Е. И., Борейко Н. П. Собственные частоты составных анизотропных оболочечных систем на основе разных моделей деформирования // Прикл. механика. – 2019. – **55**, № 1. – С. 44–59.  
Te same: *Bespalova E. I., Boreiko N. P.* Determination of the natural frequencies of compound anisotropic shell systems using various deformation models // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, No. 1. – P. 41–54.  
– <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00932-8>.
2. Беспалова Е. И., Яремченко Н. П. Устойчивость составных систем из оболочек вращения // Прикл. механика. – 2017. – **53**, № 5. – С. 74–86.  
Te same: *Bespalova E. I., Yaremchenko N. P.* Stability of systems composed of shells of revolution // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, No. 5. – P. 545–555.  
– <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0835-1>.
3. Беспалова О. Г., Яремченко Н. П. Визначення напружено-деформованого стану спряжених гнучких оболонок обертання при докритичних навантаженнях // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – Вип. 4. – С. 29–36.
4. Ванин Г. А., Семенюк Н. П., Емельянов Р. Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. – Киев: Наук. думка, 1978. – 212 с.
5. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.
6. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. О численном решении нелинейных краевых задач статики гибких оболочек // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 6. – С. 44–48.
7. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
8. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Аналіз напруженого стану порожнистих циліндрів з угнутих гофрованим поперечним перерізом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. – С. 70–77.  
Te same: *Grigorenko Y. M., Rozhok L. S.* Analysis of the stress state of hollow cylinders with concave corrugated cross sections // *J. Math. Sci.* – 2018. – **228**, No. 1. – P. 80–89.
9. Гузь А. Н., Бабич И. Ю., Бабич Д. В. Устойчивость элементов конструкций. – Киев: «А. С. К.», 2001. – 375 с. – Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 10.
10. Гузь А. Н., Руцицкий Я. Я. Введение в механику нанокомпозитов. – Киев: Ин-т механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, 2010. – 398 с.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976. – 576 с.
12. Курпа Л. В., Шматко Т. В. Дослідження вільних коливань і стійкості функціонально-градієнтних тришарових пластин за допомогою теорії  $R$ -функцій і варіаційних методів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 1. – С. 155–172.
13. Муштарі Х. М., Галимов К. Э. Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Татиздат, 1951. – 481 с.
14. Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек. – Ленинград: Судостроение, 1962. – 324 с.
15. Семенюк Н. П. К устойчивости двухслойных углеродных нанотрубок // Прикл. механика. – 2016. – **52**, № 1. – С. 108–116.

- Te came: *Semenyuk N. P.* Stability of double-walled carbon nanotubes revisited // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, No. 1. – P. 73–81.
16. *Al-Qablan H.* Semi-analytical buckling analysis of stiffened sandwich plates // *J. Appl. Sci.* – 2010. – **10**, No. 23. – P. 2978–2988. – DOI: 10.3923/jas.2010.2978.2988.
  17. *Bagchi A., Humar J., Noman A.* Development of a finite element system for vibration based damage identification in structures // *J. Appl. Sci.* – 2007. – **7**, No. 17. – P. 2404–2413. – doi: 10.3923/jas.2007.2404.2413.
  18. *Bellman R. E., Kalaba R. E.* Quasilinearization and non-linear boundary-value problems. – New York: American Elsevier Publ. Co., INC, 1965. – ix+206 p.
  19. *Bochkarev S. A., Matveenko V. P.* Natural vibrations and stability of shells of revolution interacting with an internal fluid flow // *J. Sound Vib.* – 2011. – **330**, No. 13. – P. 3084–3101. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.01.029>.
  20. *Budiansky B.* Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures // *Adv. Appl. Mech.* – 1974. – **14**. – P. 1–65. – [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70030-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70030-9).
  21. *Bushnell D.* Buckling of shells-pitfall for designers // *AIAA Journal.* – 1981. – **19**, No. 9. – P. 1183–1226.
  22. *Bushnell D.* Computerized buckling analysis of shells. – The Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1985. – xvii+423 p.
  23. *Chen L., Rotter J. M.* Buckling of anchored cylindrical shells of uniform thickness under wind load // *Eng. Struct.* – 2012. – No. 41. – P. 199–208. – <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.03.046>.
  24. *Ghorbanpour A.* Critical temperature of short cylindrical shells based on improved stability equation // *J. Appl. Sci.* – 2002. – **2**, No. 4. – P. 448–452.
  25. *Grigorenko Ya., Bepalova E., Yaremchenko N.* Some stationary deformation problems for compound shells of revolution // *Вісн. нац. техн. ун-ту «Харк. політехн. ін-т».* – 2016. – № 26 (1198). – С. 114–117.
  26. *Grigorenko Ya., Bepalova E., Yaremchenko N.* Compound shell systems: statics, stability and vibrations // *Shell Structures: Proc. of the 11th Int. Conf. “Shell Structures: Theory and Applications” (SSTA 2017), October 11-13, 2017, Gdansk, Poland.* – P. 289–292.
  27. *Jiang W., Wang Z. B., Gong J. M., Li G. C.* A new connection structure between hydrogen nozzle an sphere head in a hydrofining reactor // *Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol.* – 2011. – **133**, No. 1. – Art. 014504 (6 pages). – <https://doi.org/10.1115/1.4002258>.
  28. *Koiter W. T.* Elastic stability and post-buckling behavior // *Proc. Symp. Nonlinear problems.* – Madison: Univ. of Wasconsin Press, 1963. – P. 257–275.
  29. *Mackerle Ja.* Finite element analysis of fastening and joining: A bibliography (1990–2002) // *Int. J. Press. Ves. Pip.* – 2003. – **80**, No. 4. – P. 253–271. – [https://doi.org/10.1016/S0308-0161\(03\)00030-9](https://doi.org/10.1016/S0308-0161(03)00030-9).
  30. *Obodan N. I., Lebedev A. G., Gromov V. A.* Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. – Dordrecht etc.: Springer, 2013. – vii+178 p.
  31. *Pietraszkiewicz W., Konopińska V.* Junctions in shell structures: A review // *Thin-Walled Struct.* – 2015. – **95**. – P. 310–334.
  32. *Polat C.* Geometrically nonlinear behavior of axisymmetric thin spherical shells // *Math. Model. Appl.* – 2017. – **2**, No. 6. – P. 57–62.
  33. *Qatu M. S., Asadi E., Wang W.* Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010 // *Open J. Compos. Mater.* – 2012. – **2**, No. 3. – P. 61–86. – doi:10.4236/ojem.2012.23009.
  34. *Sheng G. G., Wang X.* Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells // *Appl. Math. Model.* – 2010. – **34**, No. 9. – P. 2630–2643.
  35. *Smith P. T., Ross C. T. F., Little A. P. F.* Composite tubing collapse under uniform external hydrostatic pressure // *Proc. 13<sup>th</sup> Int. Conf. Comput. Civil Build. Eng. (ICCCBE 2010).* – Nottingham: Univ. Pres, 2010. – P. 1–7.
  36. *Sweedan A. M. I., El Damatty A. A.* Simplified procedure for design of liquid-storage combined conical tanks // *Thin-Walled Struct.* – 2009. – **47**, No. 6-7. – P. 750–759.
  37. *Timoshenko S. P., Gere J. M.* Theory of elastic stability. – New York: McGraw Hill Book, 1961. –xvi+541 p.
  38. *Teng J. G., Rotter J. M.* Buckling of thin metal shells. – London: Spon Press, Taylor & Francis Group, 2004. – Chap. 13. – P. 369–408.
  39. *Valerga de Greco B., Laura P. A. A.* Vibration and buckling of circular plates of variable thickness // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1982. – **72**, No. 3. – P. 856–858.

40. Wang C. M., Zhang Y. Y., Xiang Y., Reddy J. N. Recent studies on buckling of carbon nanotubes // Trans. ASME. Appl. Mech. Rev. – 2010. – **63**, No. 3. – 030804 (18 pages). – <https://doi.org/10.1115/1.4001936>.
41. Xue W., Zhang Q. Influential parameter and experimental research on compressive bearing capacity of welded hollow spherical joints connected with circular steel tubes // Proc. ICTAS, Oct. 2009. – Shanghai: Tongji Univ. Press. Pt. I. – P. 405–413.
42. Yamazaki K., Tsubosaka N. A stress analysis technique for plate and shell built-up structures with junctions and its application to minimum weight design of stiffened structures // Struct. Optimization. – 1997. – **14**, No. 2-3. – P. 173–183. – <https://doi.org/10.1007/BF01812520>.

#### УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНЫХ СИСТЕМ ИЗ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

*Исследуется устойчивость упругих систем из оболочек вращения переменной кривизны и сложной структуры, находящихся в поле консервативных осесимметричных воздействий разной природы. В рамках классической и уточненной теорий оболочек определяются предельные и бифуркационные критические значения действующего нагружения на основе геометрически нелинейной постановки задачи и динамического критерия устойчивости. Для решения соответствующих нелинейных задач и задач на собственные значения предложена численно-аналитическая методика, базирующаяся на рациональном сведении их к одномерным линейным по меридиональной переменной краевым задачам и численном решении этих задач методом дискретной ортогонализации. Приводятся тестовые примеры, подтверждающие правомерность использования методики для рассматриваемого класса задач. Проводится анализ предельных и бифуркационных значений критических нагрузок оболочечной системы в зависимости от изменения ее геометрических параметров.*

**Ключевые слова:** составная оболочка вращения, осесимметричные нагрузки, бифуркационные и предельные критические значения, численно-аналитическая методика, анализ.

#### STABILITY OF COMPOUND SYSTEMS FROM THE SHELLS OF REVOLUTION WITH VARIABLE GAUSSIAN CURVATURE

*The stability of elastic systems composed of shells of revolution of variable curvature and complex structure under conservative axisymmetric loadings of different kind is studied. The limiting and bifurcation critical load values are determined within the framework of classical and refined theories based on the geometrically nonlinear problem statement and dynamical stability criterion. To solve appropriate nonlinear and eigen-value problems, a numerical-analytical technique based on the rational reduction of them to one-dimensional linear boundary-value problems with respect to the meridional coordinate and on the numerical their solving with the discrete-orthogonalization method is proposed. Testing examples that justify the validity of the technique for use as applied to the given class of problems are presented. The limiting and bifurcation values of critical loads of the shell system are analyzed depending on its geometrical parameters.*

**Key words:** compound shell of revolution, axisymmetric loads, bifurcational and limiting critical values, numerical-analytic technique, analysis.