

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ЗАЗДАЛЕГІДЬ ДЕФОРМОВАНОЇ ТОВСТОЇ ПЛИТИ З ПАРАБОЛІЧНИМ ШТАМПОМ

У рамках лінеаризованої постановки задачі теорії пружності досліджено напружено-деформований стан заздалегідь деформованої товстої плити, змодельованої попередньо напруженим півпростором, під час її гладкої контактної взаємодії з жорстким осесиметричним параболічним штампом. Парні інтегральні рівняння задачі розв'язано за допомогою подання шуканих функцій у вигляді частинної суми ряду за функціями Бесселя з невідомими коефіцієнтами, для відшукування яких отримано скінченні системи лінійних алгебричних рівнянь. Проаналізовано вплив початкових деформацій та форми штампна на рівень та характер контактних напружень і вертикальних переміщень межової площини плити у випадках стисливого та нестисливого матеріалу. Результати проілюстровано для плити з пружним потенціалом Бартенєва – Хазановича, а також потенціалом гармонічного типу.

Ключові слова: контактні напруження, початкові деформації, параболічний штамп, товста плита, пружний півпростір.

Вступ. Розрахунок міцності елементів конструкцій та механізмів є одним із важливих етапів їх проектування. Для оцінки міцності контактуючих тіл необхідно обчислювати контактні напруження та деформації. Мінімізація похибки таких обчислень вимагає врахування максимальної кількості чинників, що впливають на контактну взаємодію тіл, зокрема, наявності залишкових (початкових) напружень чи деформацій.

Вплив початкових напружень на контактну взаємодію тіл за конкретних форм пружного потенціалу розглядали багато вітчизняних та зарубіжних дослідників. Загалом для розв'язання таких задач потрібно залучати апарат нелінійної теорії пружності. Проте за достатньо великих магнітуд початкових деформацій можна обмежитись лінеаризованою постановкою. Зокрема у працях [5, 6] для лінеаризованої постановки задач теорії пружності побудовано тривимірну скінченно-елементну модель для вивчення мікродеформацій з'єднань, підсиленних ізотропними та анізотропними волокнами. У статті [1] наведено детальний огляд літератури з контактних задач для тіл з початковими напруженнями чи деформаціями. На основі цього огляду, зокрема, можна зауважити, що проблему аналізу взаємодії штампів складної конфігурації зі заздалегідь напруженою товстою плитою вивчено недостатньо.

Метою статті є розвиток методики визначення осесиметричного напруженого-деформованого стану попередньо напруженої товстої плити при її контактній взаємодії з жорстким штампом та дослідження впливу початкових деформацій і форми штампна на розподіл контактних напружень і вертикальних переміщень межової площини плити.

1. Формулювання задачі. Розглянемо задачу про втиснення постійною силою P жорсткого штампна складної конфігурації у заздалегідь деформовану товсту плиту, змодельовану пружним півпростором. Запровадимо циліндричну систему координат $O r \theta z$ так, щоб координатна площина $O r \theta$ збігалася з межовою площиною півпростору, а вісь $O z$ – із лінією дії сили P (рис. 1). Вважаємо, що штамп утворено обертанням навколо осі $O z$ лінії

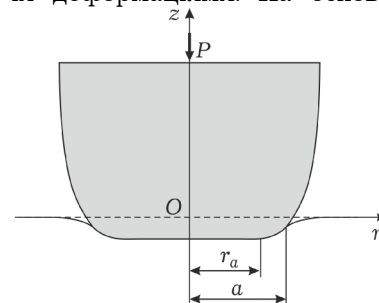


Рис. 1. Схема контактної взаємодії.

✉ habrusiev@gmail.com

$$W(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq r_a, \\ (r - r_a)^2/(2R), & r_a < r, \end{cases}$$

де R – фокальний параметр параболи, r_a – межа плоскої ділянки підшви штамп.

Нехай радіус $a \geq r_a$ зони контакту є відомий. Тоді прикладену силу визначимо з умови

$$P = -2\pi \int_0^a r \sigma_{zz}(r, 0) dr, \quad (1)$$

а крайові умови задачі запишемо у вигляді

$$\sigma_{rz}(r) = 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}(r) = 0, \quad a < r, \quad (3)$$

$$u_z(r) = f(r), \quad 0 \leq r \leq a. \quad (4)$$

Функція $f(r)$ відповідає формі поверхні, що обмежує штамп. Виберемо її у вигляді $f(r) = u_z(a) + \omega(r)$, тоді умова (4) набуде вигляду

$$u_z(r) - u_z(a) = \omega(r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (5)$$

$$\text{де } \omega(r) = \begin{cases} -(r_a - a)^2/(2R), & 0 \leq r \leq r_a, \\ ((r_a - r)^2 - (r_a - a)^2)/(2R), & r_a < r \leq a. \end{cases}$$

2. Побудова розв'язку. Вважаємо залишкові напруження, що виникли у півпросторі, однорідними. Тоді вирази для компонент тензора напружень і вектора переміщень запишемо так [4]:

$$\sigma_{rz}(r, z) = -\frac{c_{44}(1 + m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^3 \left((A_1 + A_2(s_0 + \alpha z))e^{\alpha z} + (B_1 + B_2(s_0 - \alpha z))e^{-\alpha z} \right) J_0(\alpha r) d\alpha,$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = c_{44}(1 + m_1)\ell_1 \int_0^\infty \alpha^3 \left((A_1 + A_2(s + \alpha z))e^{\alpha z} + (B_1 + B_2(s - \alpha z))e^{-\alpha z} \right) J_0(\alpha r) d\alpha,$$

$$u_r(r, z) = -\int_0^\infty \alpha^2 \left((A_1 + A_2(1 + \alpha z))e^{\alpha z} + (B_1 + B_2(1 + \alpha z))e^{-\alpha z} \right) J_1(\alpha r) d\alpha,$$

$$u_z(r, z) = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^2 \left((A_1 + A_2(s_1 + \alpha z))e^{\alpha z} + (B_1 + B_2(s_1 - \alpha z))e^{-\alpha z} \right) J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (6)$$

Тут c_{44} , m_1 , n_1 , ℓ_1 , s , s_0 , s_1 – сталі, які залежать від пружного потенціалу [4]; A_i і B_i – невідомі функції, які знаходять із межових умов.

На межовій площині півпростору $z = 0$, з урахуванням позначень $F_j = A_j + B_j$, $j = 1, 2$, з виразів (6) отримаємо:

$$\sigma_{rz}(r, 0) = \frac{c_{44}(1 + m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^3 (F_1 + s_0 F_2) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (7)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = c_{44} (1 + m_1) \ell_1 \int_0^\infty \alpha^3 (F_1 + s F_2) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (8)$$

$$u_z(r, 0) = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^2 (F_1 + s_1 F_2) J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (9)$$

Задовольнивши граничну умову (2), із (7) одержимо співвідношення між функціями F_1 та F_2 :

$$F_1 = -s_0 F_2. \quad (10)$$

Враховуючи (10), вирази для нормальних напружень (8) та вертикальних переміщень (9) запишемо так:

$$\sigma_{zz}(r) = c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) \ell_1 \int_0^\infty \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (11)$$

$$u_z(r) = \frac{m_1 (s_1 - s_0)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^2 F_2 J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (12)$$

Задовольнивши умову (3) з урахуванням виразу (11), матимемо:

$$c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) \ell_1 \int_0^\infty \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad a < r. \quad (13)$$

Введемо невідому функцію $x(r)$, $0 \leq r \leq a$, за допомогою якої продовжимо співвідношення (13) на проміжок $0 \leq r < \infty$:

$$c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) \ell_1 \int_0^\infty \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r) d\alpha = x(r) \eta(a - r), \quad 0 \leq r < \infty, \quad (14)$$

де $\eta(r)$ – одинична функція Гевісайда.

Функція $x(r)$ визначає розподіл контактних напружень під штампом. Урахувавши їх неперервність, а також рівність нулю на межі ділянки контакту (при $r = a$), подамо її у вигляді частинної суми узагальненого ряду Фур'є за функціями $J_0(\lambda_n r/a)$:

$$x(r) = \sigma_{zz}(r) = \sum_{n=1}^N a_n J_0\left(\frac{\lambda_n r}{a}\right), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (15)$$

де λ_n – додатні корені функції Бесселя $J_0(\lambda_n) = 0$, $n = 1, \dots, N$, a_n – невідомі коефіцієнти.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношення (14), отримуємо вираз

$$\alpha^2 F_2 = \frac{1}{c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) \ell_1} \sum_{n=1}^N a_n \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) J_0(\alpha r) dr, \quad (16)$$

$$0 \leq \alpha < \infty.$$

Використавши співвідношення (12), (16) та умову (5), одержимо:

$$k_1 \sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \Psi_n(\alpha) [J_0(\alpha r) - J_0(\alpha a)] d\alpha = \omega(r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (17)$$

$$\text{де } k_1 = \frac{m_1(s_1 - s_0)}{c_{44}(1 + m_1)(s - s_0)\ell_1\sqrt{n_1}}, \quad \Psi_n(\alpha) = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) J_0(\alpha r) dr.$$

Помноживши (17) на $rJ_0(\lambda_q r/a)$ та проінтегрувавши результат по r від 0 до a , одержимо:

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \Psi_n(\alpha) (\Psi_q(\alpha) - K_q J_0(\alpha a)) d\alpha = \frac{w_q}{k_1}, \quad q = 1, \dots, N, \quad (18)$$

$$\text{де } K_q = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_q}{a} r\right) dr, \quad w_q = \int_0^a r \omega(r) J_0\left(\frac{\lambda_q}{a} r\right) dr.$$

Співвідношення (18) визначають систему N лінійних алгебричних рівнянь для невідомих a_n .

Зв'язок між фокальним параметром параболи R та прикладеною силою встановлює співвідношення (1), звідки

$$R = -\frac{\pi}{2k_1 P} \sum_{n=1}^N a_n^* K_n. \quad (19)$$

Тут

$$a_n^* = a_n / (2k_1 R). \quad (20)$$

З урахуванням (19), за допомогою (15) та (20) отримуємо закон розподілу контактних напружень під штампом

$$\sigma_{zz}(r) = -\frac{P}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^N a_n^* K_n \right)^{-1} \sum_{n=1}^N a_n^* J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right), \quad (21)$$

а зі співвідношень (12), (16), (19) – формулу для визначення вертикальних переміщень точок граничної площини півпростору:

$$u_z(r) = -\frac{k_1 P}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^N a_n^* K_n \right)^{-1} \sum_{n=1}^N a_n^* \int_0^{\infty} \Psi_n(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (22)$$

4. Приклади числових розрахунків. Для оцінки ефективності розробленої методики порівняємо отриманий наближений розв'язок з точним розв'язком задачі про контакт параболічного штампа з ізотропним півпростором [2]

$$\sigma_{zz}(r) = -\frac{3P}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - r^2}. \quad (23)$$

На рис. 2 суцільна лінія відповідає функції (23), пунктирна – функції (21) при $a = 1$, $r_a = 0$ (плоска ділянка в основі штампа є відсутньою). Як видно з рисунка, відхилення наближеного розв'язку від точного не перевищує 2%.

Коефіцієнт k_1 характеризує вплив початкових деформацій на напруження і переміщення (6) та залежить від структури пружного потенціалу попередньо напруженої плити. Зокрема, у випадку потенціалу Бартенєва – Хазановича [3]

$$k_1 = 2 \frac{1 + \nu}{E} \frac{\lambda_1^{7/2}}{3\lambda_1^3 - 1},$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, E – модуль пружності матеріалу півпростору. Як видно з наведеного співвідношення, $k_1 \rightarrow \infty$ при $\lambda_1^3 \rightarrow 1/3$, тобто при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{kp} \approx 0.693$. Значення λ_{kp} відповідає поверхневій нестійкості при рівномірному двовісному стиску. При цьому, як впливає зі співвідношень (19), (21), (22), вертикальні переміщення точок граничної площини півпростору необмежено зростають, а контактні напруження відсутні. Отже, спостерігається такий механічний ефект: при наближенні λ_1 до критичного значення λ_{kp} у півпросторі виникають явища «резонансного характеру», які були виявлені О. М. Гузем у задачах крихкого руйнування матеріалів із початковими напруженнями [1].

Аналогічний ефект спостерігається у тілах із пружним потенціалом гармонічного типу [3], для яких коефіцієнт k_1 набуває вигляду

$$k_1 = 2 \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1(2 + \nu) - 1 - \nu}.$$

У цьому випадку критичні значення λ_{kp} відрізнятимуться для різних матеріалів, оскільки вони залежать від ν . Зокрема, при $\nu = 0.3$ «резонансні» явища спостерігаються при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{kp} \approx 0.565$.

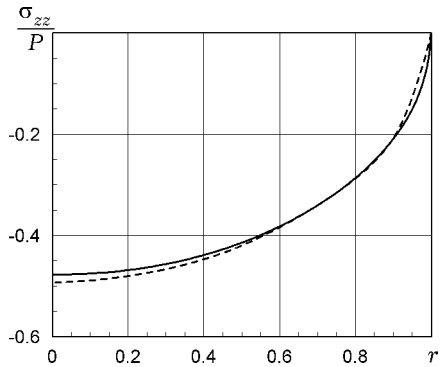


Рис. 2. Порівняння точного та наближеного розв'язків (21) та (23).

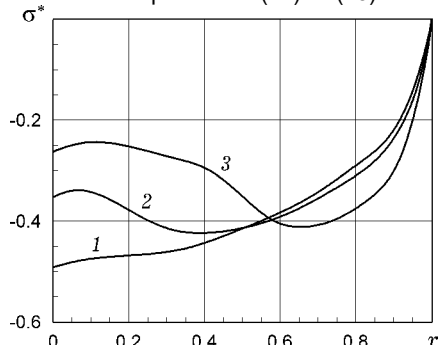


Рис. 4. Розподіл контактних напружень для різних значень r_a .

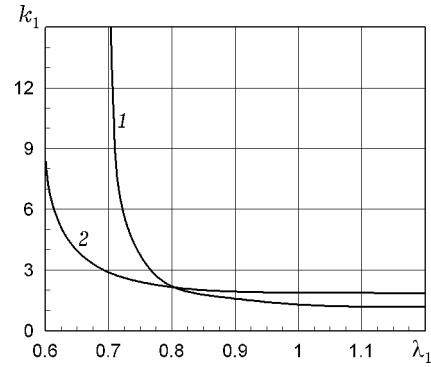


Рис. 3. Залежність k_1 від λ_1 .

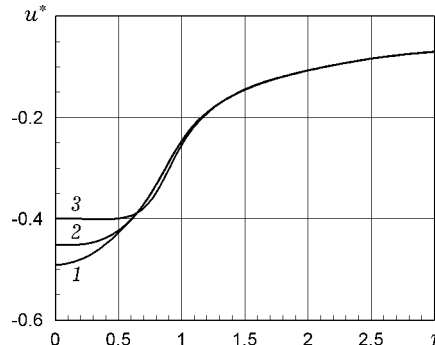


Рис. 5. Розподіл вертикальних переміщень для різних значень r_a .

На рис. 3 проілюстровано залежність k_1 від параметра лінійного видовження λ_1 для пружного потенціалу Бартенєва – Хазановича (крива 1) та потенціалу гармонічного типу (крива 2).

Проаналізовано вплив наявності плоскої ділянки в основі штамп на розподіл контактних напружень і характер вертикальних переміщень. На рис. 4, 5 наведено графіки функцій $\sigma^* = \sigma_{zz}(r, 0)/P$ та $u^* = u_z(r, 0)/P$ для

випадку параболічного штампа за відсутності залишкових деформацій у півпросторі, сталої ділянки контакту $a = 1$ та різних значень параметра r_a : $r_a = 0$ – крива 1, $r_a = 0.2$ – крива 2, $r_a = 0.5$ – крива 3.

Висновки. Виконаний числовий аналіз дає можливість стверджувати, що вплив початкових деформацій на вертикальні переміщення для стисливих і нестисливих тіл значно більший у випадку наявності попередніх стискальних деформацій, $\lambda_1 < 1$, ніж у випадку попередніх деформацій розтягу, $\lambda_1 > 1$. Форма штампа суттєво впливає на величину та характер розподілу контактних напружень. Зокрема, для параболічного штампа, коли немає плоскої частини в основі, екстремальні значення контактних напружень спостерігаються в центрі ділянки контакту. Поява плоскої частини спричиняє зсув точок екстремуму до краю ділянки контакту та зменшує їх абсолютну величину.

1. Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 7. – С. 41–69.
Te same: Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitskii V. B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 7. – P. 744–765. – <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000046219.34646.4e>.
2. Гриліцький Д. В., Шелестовський Б. Г. Осесиметричні контактні задачі термопружності. – Львів: Вища школа, 1974 – 112 с.
3. Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницький: Изд-во “ПП Мельник”, 2006. – 710 с.
4. Habrusieva I., Panchuk O., Shelestovskiy B. Contact interaction of the parabolic punch with preliminary stressed plate fixed on the rigid basis // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2016. – **82**, № 2. – С. 31–37.
5. Harich J., Lapusta Y., Wagner W. 3D FE-modeling of surface and anisotropy effects during micro-buckling in fiber composites // Compos. Struct. – 2009. – **89**, No. 4. – P. 551–555. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.11.011>.
6. Lapusta Y., Harich J., Wagner W. Three-dimensional FE model for fiber interaction effects during microbuckling in composites with isotropic and anisotropic fibers // Commun. Numer. Meth. Eng. – 2008. – **24**, No. 12. – P. 2206–2215. – <https://doi.org/10.1002/cnm.1084>.

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННОЙ ТОЛСТОЙ ПЛИТЫ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ШТАМПОМ

В рамках линеаризованной постановки задачи теории упругости исследовано напряженно-деформированное состояние предварительно деформированной толстой плиты, смоделированной предварительно напряженным полупространством, при ее гладком контактном взаимодействии с жестким осесимметричным параболическим штампом. Парные интегральные уравнения задачи решены с помощью представления искомым функций в виде частичной суммы ряда по функциям Бесселя с неизвестными коэффициентами, для отыскания которых получены конечные системы линейных алгебраических уравнений. Проанализировано влияние начальных деформаций на величину и характер контактных напряжений и вертикальных перемещений граничной плоскости плиты в случаях сжимаемых и несжимаемых тел. Результатов проиллюстрированы для плиты с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича, а также потенциалом гармонического типа.

Ключевые слова: контактные напряжения, начальные деформации, параболический штамп, толстая плита, упругое полупространство.

CONTACT INTERACTION OF A PREDEFORMED THICK PLATE WITH A PARABOLIC INDENTER

Within the framework of linearized formulation of a problem of the elasticity theory, the stress-strain state of a predeformed thick plate, which is modeled by a prestressed half-space, is analyzed in the case of its smooth contact interaction with a rigid

axisymmetric parabolic indenter. The dual integral equations of the problem are solved by representing the quered-for functions in the form of a partial series sum by the Bessel functions with unknown coefficients. Finite systems of linear algebraic equations are obtained for determination of these coefficients. The influence of the initial strains on the magnitude and features of the contact stresses and vertical displacements on the surface of the plate is analyzed for the case of compressible and incompressible solids. In order to illustrate the results, the cases of the Bartenev – Khazanovich and the harmonic-type potentials are addressed.

Key words: contact stresses, initial deformations, parabolic indenter, thick plate, elastic half-space.

Тернопільський нац. техн. ун-т
ім. Івана Пулюя, Тернопіль

Одержано
12.05.19