

Е. Г. Грицько, Р. В. Гудзь

**НАГРЕВ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА
С КОЛЬЦЕВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ТРАПЕЦИДАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ**

Пусть полый цилиндр $\rho^- \leq \rho \leq \rho^+$, $0 \leq Z \leq Z^+$, находящийся в условиях конвективного теплообмена с внешними средами, однороден всюду, за исключением соосного с ним неоднородного кольцевого включения трапецидального сечения, которое занимает область $G_g = G_{g\rho} \times G_{gz}$, где $G_{g\rho} = \{\rho : \rho^- < \rho_0^- \leq \rho \leq \rho_0^+ < \rho^+\}$, а $G_{gz} = \{Z(\rho) : 0 < k^-\rho + Z_0^- \leq Z(\rho) \leq k^+\rho + Z_0^+ < Z^+\}$. Граничные поверхности цилиндра $Z = 0$, $Z = Z^+$, $\rho = \rho^-$ омываются внешними средами нулевой температуры, а поверхность $\rho = \rho^+$ — средой, температура которой равна нулю везде, кроме области $G_p = \{(\rho, Z) : \rho > \rho^+, 0 \leq Z_p^- \leq Z \leq Z_p^+ < Z^+\}$, где она описывается функцией осевой координаты $\theta_1(Z)$.

Для определения безразмерного стационарного температурного поля цилиндра с включением имеем уравнение

$$(\Delta_\rho + \Delta_z)\theta = -\chi_{g\rho}(\rho)\chi_{gz}(Z(\rho))\frac{(\text{grad } \theta, \text{grad } \Lambda_g)}{\Lambda_g(\rho, Z)} \quad (1)$$

и граничные условия

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \text{Bi}_\rho^- \theta = 0 \text{ при } \rho = \rho^-, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \text{Bi}_\rho^+ \theta = \text{Bi}_\rho^+ \theta_1(Z)\chi_\rho(Z) \text{ при } \rho = \rho^+, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} \pm \text{Bi}_z^\pm \theta = 0 \text{ при } Z = Z^\pm. \quad (4)$$

Здесь $\chi_{g\rho}(\rho)$, $\chi_{gz}(Z(\rho))$, $\chi_\rho(Z)$ — характеристические функции соответственно областей $G_{g\rho}$, G_{gz} , G_p [1]; Bi_ρ^\pm , Bi_z^\pm — критерии Био соответственно с поверхностями $\rho = \rho^+$, $\rho = \rho^-$, $Z = Z^+$, $Z = 0$; $\Lambda_g(\rho, Z)$ — коэффициент теплопроводности в области G_g , отнесенной к коэффициенту теплопроводности за пределами G_g ;

$$\Delta_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right), \quad \Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial Z^2}.$$

Представим θ в правой части уравнения (1) аналогично работам [3, 4] двумерной сплайн-функцией

$$\psi = \sum_{m=1}^M d_m \psi_{\rho m}(\rho) \psi_{zm}(Z) \chi_{g\rho m}(\rho) \chi_{gz m}(Z(\rho)), \quad (5)$$

где $\psi_{\rho m}(\rho)$, $\psi_{zm}(Z)$ — известные функции координат; $\chi_{g\rho m}(\rho)$, $\chi_{gz m}(Z)$ — характеристические функции соответственно областей $G_{g\rho m} = \{\rho : \rho_m^- < \rho \leq \rho_m^+\}$ и $G_{gz m} = \{Z(\rho) : Z_m^-(\rho) < Z(\rho) \leq Z_m^+(\rho)\}$ таких, что $G_g = \bigcup_{m=1}^M (G_{g\rho m} \times G_{gz m})$, $(G_{g\rho l} \times G_{gz l}) \cap_{l \neq j} (G_{g\rho j} \times G_{gz j}) = \emptyset$; d_m — неизвестные коэффициенты ($m = 1, 2, \dots, M$).

Вследствие такой замены из краевой задачи (1) — (4) получим задачу для θ^* . Применяв к этой краевой задаче конечное интегральное преобразование Фурье по Z с ядром [2]

$$K(\xi_n, Z) = \sqrt{2} \frac{\xi_n \cos \xi_n Z + \text{Bi}_z^- \sin \xi_n Z}{\left[(\xi_n^2 + (\text{Bi}_z^-)^2) \left(Z^+ + \frac{\text{Bi}_z^+}{\xi_n^2 + (\text{Bi}_z^+)^2} \right) + \text{Bi}_z^- \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (6)$$

найдем

$$\Delta_\rho \theta^* - \xi_n^2 \bar{\theta}^* = \sum_{m=1}^M d_m F_{mn}(\rho) \chi_{g\rho m}(\rho), \quad (7)$$

$$\frac{d\theta^*}{d\rho} - \text{Bi}_\rho^- \bar{\theta}^* = 0 \quad \text{при } \rho = \rho^-, \quad (8)$$

$$\frac{d\bar{\theta}^*}{d\rho} + \text{Bi}_\rho^+ \bar{\theta}^* = W_n \quad \text{при } \rho = \rho^+. \quad (9)$$

Здесь ξ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\text{tg } Z^+ \xi_n = \frac{\xi_n (\text{Bi}_z^- + \text{Bi}_z^+)}{\xi_n^2 - \text{Bi}_z^- \text{Bi}_z^+}; \quad (10)$$

$$\bar{\theta}^* = \int_0^{z^+} \theta^* K(\xi_n, Z) dZ;$$

$$F_{mn}(\rho) = -\psi'_{\rho m}(\rho) \int_{z_m^-(\rho)}^{z_m^+(\rho)} \frac{\psi_{zm}(Z)}{\Lambda_g(\rho, Z)} \frac{\partial \Lambda_g(\rho, Z)}{\partial \rho} K(\xi_n, Z) dZ -$$

$$-\psi_{gm}(\rho) \int_{z_m^-(\rho)}^{z_m^+(\rho)} \frac{\psi'_{zm}(Z)}{\Lambda_g(\rho, Z)} \frac{\partial \Lambda_g(\rho, Z)}{\partial Z} K(\xi_n, Z) dZ;$$

$$W_n = \text{Bi}_\rho^+ \int_{z_\rho^-}^{z_\rho^+} \theta_1(Z) K(\xi_n, Z) dZ.$$

Решив краевую задачу (7) — (9) и перейдя к оригиналу, получим

$$\theta^*(\rho, Z) = \theta_0^*(\rho, Z) + \sum_{m=1}^M d_m \chi_{g\rho m} \theta_m^*(\rho, Z), \quad (11)$$

где

$$\theta_0^*(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \Delta_n^{-1} B_n^-(\rho) K(\xi_n, Z);$$

$$\theta_m^*(\rho, Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ [H_{mn}^+ B_n^-(\rho) + H_{mn}^- B_n^+(\rho)] \Delta_n^{-1} +$$

$$+ \mathcal{J}_{2mn}(\rho) I_0(\xi_n \rho) + \mathcal{J}_{1mn}(\rho) K_0(\xi_n \rho) \} K(\xi_n, Z) \quad (m = 1, 2, \dots, M),$$

а параметры d_m ($m = 1, 2, \dots, M$) определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} d_l \int_{\rho_l^-}^{\rho_l^+} \psi_{\rho l}(\rho) \left(\int_{z_l^-(\rho)}^{z_l^+(\rho)} \psi_{zl}(Z) dZ \right) d\rho &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n \Delta_n^{-1} \int_{\rho_l^-}^{\rho_l^+} B_n^-(\rho) \times \\ &\times \left(\int_{z_l^-(\rho)}^{z_l^+(\rho)} K(\xi_n, Z) dZ \right) d\rho + \sum_{m=1}^M d_m \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ H_{mn}^+ \Delta_n^{-1} \int_{\rho_l^-}^{\rho_l^+} B_n^-(\rho) \times \right. \\ &\times \left. \left(\int_{z_l^-(\rho)}^{z_l^+(\rho)} K(\xi_n, Z) dZ \right) d\rho + H_{mn}^- \Delta_n^{-1} \int_{\rho_l^-}^{\rho_l^+} B_n^+(\rho) \left(\int_{z_l^-(\rho)}^{z_l^+(\rho)} K(\xi_n, Z) dZ \right) d\rho + \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_{\rho_l^-}^{\rho_l^+} (\mathcal{J}_{2mn}(\rho) I_0(\xi_n \rho) + \mathcal{J}_{1mn}(\rho) K_0(\xi_n \rho)) \left(\int_{Z_l^-(\rho)}^{Z_l^+(\rho)} K(\xi_n, Z) dZ \right) d\rho$$

$$(l = 1, 2, \dots, M). \quad (12)$$

Здесь $I_\nu(\xi)$, $K_\nu(\xi)$ — соответственно модифицированная функция Бесселя порядка ν и функция Макдональда порядка ν ;

$$B_n^\pm(\rho) = \pm P_{2n}^\pm I_0(\xi_n \rho) \mp P_{1n}^\pm K_0(\xi_n \rho), \quad \Delta_n = P_{1n}^- P_{2n}^+ - P_{1n}^+ P_{2n}^-, \quad (13)$$

$$H_{mn}^- = -\mathcal{J}_{2mn}(\rho_m^-) P_{1n}^-, \quad H_{mn}^+ = -\mathcal{J}_{1mn}(\rho_m^+) P_{2n}^+,$$

$$\mathcal{J}_{1mn}(\rho) = (2i - 3) \int_{\rho_l^-}^{\rho} x F_{mn}(x) \text{Вм}_{i0}(\xi_n x) \chi_{gom}(x) dx,$$

$$P_{1n}^\pm = (3 - 2i) \xi_n \text{Вм}_{i1}(\xi_n \rho^\pm) \pm \text{Вм}_{i0}(\xi_n \rho^\pm) \quad (i = 1, 2), \quad (14)$$

где

$$\rho_i = \begin{cases} \rho_m^- & \text{при } i = 1, \\ \rho_m^+ & \text{при } i = 2; \end{cases} \quad \text{Вм}_{ij}(x) = \begin{cases} I_j(x) & \text{при } i = 1, \\ K_j(x) & \text{при } i = 2. \end{cases}$$

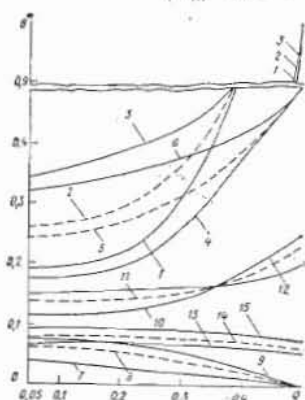


Рис. 1.

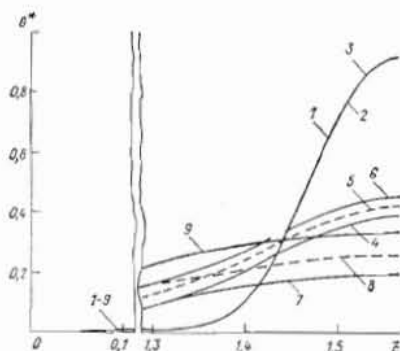


Рис. 2.

Для численных расчетов температурного поля по формуле (14) были взяты следующие значения параметров: $\rho^- = 0,05$; $\rho^+ = 0,5$; $Z^+ = \pi$; $k^\pm = 0$; $Z_0^\pm = \frac{\pi}{2} \pm 0,5$; $\rho_0^- = 0,19$; $\rho_0^+ = 0,49$; $Z_\rho^\pm = \frac{\pi}{2} \pm 0,2$; $\text{Вм}_2^\pm = 0$; $\text{Вм}_1^\pm = 0,1$; $M = 1$. Функции $\Lambda_g(\rho, Z)$, $\psi_{\rho 1}(\rho)$, $\psi_{z 1}(Z)$, $\theta_1(Z)$ выбирались в виде $\Lambda_g(\rho, Z) = 1 + (k_\Lambda + 1) u_1(\rho, \rho_1) u_2(Z, Z_2)$, $\psi_{\rho 1}(\rho) = e^{\rho \rho}$, $\psi_{z 1}(Z) = u_3(Z, Z_3)$, $\theta_1(Z) = 0,5 [1 + u_3(Z, Z_3)]$, где $u_i(\eta, \eta_i) = \cos k_i(\eta - \eta_i)$ ($\eta = \rho, Z$; $\eta_i = \rho_i, Z_i$); $k_1 = 3 \frac{1}{3} \pi$; $k_2 = \pi$; $k_3 = 5\pi$; $\rho_1 = 0,34$; $Z_2 = Z_3 = Z_4 = \frac{\pi}{2}$.

На рис. 1 представлены графики зависимостей температурного поля θ^* от радиальной координаты, а на рис. 2 — от осевой координаты для $\text{Вм}_1^+ \rightarrow \infty$ (кривые 1—9) и $\text{Вм}_1^+ = 1$ (кривые 10—15). Здесь кривые 1, 4, 7, 10, 13 построены при $k_1 = 0,2$, $\rho = 3,1$, $k_4 = 7$; кривые 2, 5, 8, 11, 14 — при $k_\Lambda = 1$; кривые 3, 6, 9, 12, 15 — при $k_\Lambda = 3$, $\rho = 2,7$, $k_4 = 7$. На рис. 1 кривым 1—3, 10—12 соответствует значение $Z = \frac{\pi}{2}$; кривым 4—6 — $Z = 1,47$; кривым 7—9 и 13—15 — $Z = 1,07$. На рис. 2 кривым 1—3 соответствует значение $\rho = 0,49$; кривым 4—6 — $\rho = 0,35$; кривым 7—9 — $\rho = 0,05$.

Изотермы в осевом сечении цилиндра, построенные для значений $\text{Вм}_1^+ = 1$, $k_\Lambda = 0,5$, представлены на рис. 3. Здесь изотермам 1—8 соответствуют значения $\theta^* = 0,22; 0,19; 0,16; 0,13; 0,10; 0,07; 0,03; 0,02$.

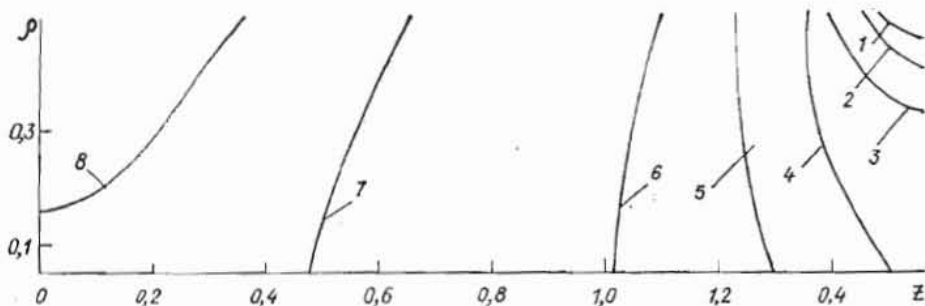


Рис. 3.

Исследование зависимости θ^* от ρ , Z и k_A позволяет сделать вывод, что в области $G^- = \{(\rho, Z) : \rho^- < \rho < \rho_0^-, Z_p^- < Z < Z_p^+\}$ при $k_A < 1$ значение температурного поля неоднородного цилиндра меньше, чем в этой же точке однородного цилиндра, а при $k_A > 1$ — больше. В области $G^+ = \{(\rho, Z) : \rho_0^+ < \rho < \rho^+, Z_p^- < Z < Z_p^+\}$ наблюдается обратный эффект.

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.
2. Галицин А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. — Киев: Наук. думка, 1976. — 282 с.
3. Грицько Е. Г., Гудзь Р. В. Применение сплайн-функций в задачах теплопроводности для локально-неоднородных цилиндрических тел. — В кн.: Численные методы решения задач математической физики. Тезисы лекций и докладов Всесоюзной школы молодых ученых (Львов, 1983 г.). М.: В/о «Знание», 1983, ч. 1, с. 33.
4. Коляно Ю. М., Грицько Е. Г. Температурные поля в массивных телах при смешанных граничных условиях. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 2, с. 132—136.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 25.05.83

УДК 531/534:001.8

Б. Л. Пелех, М. В. Марчук, В. А. Шипов,
С. Н. Тазихин, В. Е. Шустов, Я. Г. Марков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ КОНСТРУКЦИЙ БАТАРЕЙ ХИМИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ ТОКА ДРЕВОВИДНОЙ СТРУКТУРЫ

Многообразие отраслей техники, в которых используются химические источники тока (ХИТ) и широкий диапазон условий эксплуатации приводят к необходимости создания довольно сложных в механическом отношении конструкций батарей (рис. 1). При проектировании батарей ХИТ, предназначенных для работы в условиях интенсивных динамических нагрузок (ударов и вибраций), задача создания конструкций ХИТ с высокими удельными характеристиками значительно усложняется. Многочисленные экспериментальные данные показывают, что динамические нагрузки на отдельные аккумуляторы в батарее, как правило, распределяются неравномерно и значительно превышают величины исходного воздействия. Необходимо обеспечить надежную работу всех элементов батареи при одновременном требовании по минимизации массы корпуса привела к созданию пространственной конструкции, состоящей из различных несущих элементов типа

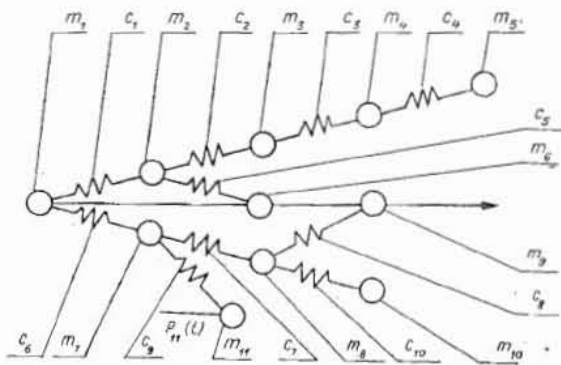


Рис. 1.

различных несущих элементов типа