Аналогично получаем условия теплообмена между основным потоком жидкости и верхней пластинкой (слоем 1):

$$q_1^- = \lambda_2\delta^{-1}\left[t_1^- - t_2^+ - \frac{1}{6}\delta^2\nu(2t_1^- + t_2^+) + \frac{1}{120}\delta^2\mu(14t_1^- + 13t_2^+)\right],$$
$$q_2^+ = \lambda_2\delta^{-1}\left[t_1^- - t_2^+ + \frac{1}{6}\delta^2\nu(t_1^- + 2t_2^+) - \frac{1}{120}\delta^2\mu(13t_1^- + 35t_2^+)\right] \qquad (9)$$

В соотношениях (8), (9) обозначено:

$$q_i^\pm = \lambda_i\frac{\partial t_i}{\partial z_i}\bigg|_{z_i=\pm h_i},\quad t_i^\pm = t_i(\pm h_i)\quad (i = 1,\ 3),$$
$$q_2^\pm = \lambda_2\frac{\partial t_2}{\partial z_2}\bigg|_{z_2=\pm h_2'},\quad t_2^\pm = t_2(\pm h_2').$$

Поскольку соотношения (8), (9) позволяют исключить из рассмотрения области, в которых коэффициенты уравнения (1) переменные (области гидродинамических погранслоев), то в дальнейшем можем использовать разработанную методику [3]; следуя указанному подходу, операторное решение уравнения (1) представляем в виде

$$t_i = (\sin p_iz_i)B_i + (\cos p_iz_i)D_i, \qquad (10)$$

$$p_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda_i^{-1}c_i\frac{\partial}{\partial\tau}\quad (i = 1,\ 3),\ p_2^2 = \nu - \mu. \qquad (11)$$

Внесение вместо t_i выражения (10) в условия (2), (4), (8) и (9) приводит к семи соотношениям, исключение из которых шести величин B_i и D_i ($i = 1, 2, 3$) дает искомую зависимость между величинами q_*, t_* и t_c. Разлагая содержащиеся в этой формуле трансцендентные выражения в ряды по степеням h_i и отбрасывая члены с h_i второй степени (и выше), окончательно получаем

$$(1 + \varepsilon_tR)q_* = \left[\Lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - C\frac{\partial}{\partial\tau} - \left(1 - \frac{3}{8}\varepsilon\right)C_2v_c\frac{\partial}{\partial x}\right]t_* - \varepsilon_t(t_* - t_c). \qquad (12)$$

Здесь обозначено: $R = 2\sum_{i=1}^{3} h_i\lambda_i^{-1}$, $\Lambda = 2\sum_{i=1}^{3} h_i\lambda_i$, $C = 2\sum_{i=1}^{3} h_ic_i$, $C_2 = h_2C_2$, $\varepsilon = \delta h_2^{-1}$. При $v_c = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, $c_1 = c_2 = c_3$ из выражения (12) следует условие теплообмена для тел с покрытиями [4].

1. *Лыков А. В.* Тепломассообмен. Справочник.— М. : Энергия, 1978.— 480 с.
2. *Зорий Л. М.* О новом методе построения общих решений линейных дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 5, с. 353—356.
3. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках.— Київ : Вид-во АН УРСР, 1961.— 212 с.
4. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями.— Тепловые напряжения в элементах конструкции, 1967, вып. 7, с. 227—233.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 07.12.83

УДК 536.12

А. Н. Кулик, Х. Н. Ярошевич

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРА, НАГРЕВАЕМОГО ДВИЖУЩИМИСЯ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Сплошные и полые цилиндры являются самыми распространенными деталями в машиностроении. Для определения их термоупругого состояния, обусловленного заданными тепловыми воздействиями, следует определить возникающее температурное поле. С этой целью рассмотрим бесконечный круговой цилиндр радиуса R с теплообменом. Начальная температура цилиндра равна постоянной температуре t_c внешней среды. В момент времени τ_1 в точке $(R_0,\ z_0,\ \varphi_0)$ включается и начинает движение по закону $r = R_0,\ \varphi = \varphi_0 + \varphi(\tau),\ z = z_0 + z(\tau)$ точечный источник тепла мощностью $q(\tau)$. В момент $\tau = \tau_2$ источник тепла прекращает движение и выключается.

Температурное поле t цилиндра в предположении постоянства теплофизических характеристик определим из уравнения

$$\Delta T - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{W}{\lambda} \tag{1}$$

при краевых условиях

$$T|_{\tau=0} = 0,\quad \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z\to\pm\infty} = 0,\quad \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} = -HT,\quad T|_{\varphi=0} = T|_{\varphi=2\pi}. \tag{2}$$

Здесь $\alpha,\ \lambda$ — коэффициенты теплоотдачи и теплопроводности соответственно; $H = \frac{\alpha}{\lambda}$; $T = t - t_c$;

$$W = \frac{q(\tau)}{r}\,\delta(r - R_0)\,\delta(\varphi - \varphi_0 - \varphi(\tau))\,\delta(z - z_0 - z(\tau))\,[S_+(\tau - \tau_1) - S_+(\tau - \tau_2)].$$

Используя интегральные преобразования Лапласа по времени τ, Ханкеля по r, Фурье по z и Кошлякова по φ [1—3, 5], находим температурное поле

$$T = \frac{a}{2\pi\lambda\sqrt{\pi a}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty}{}' K_n(\sigma_m,\ r)\,K_n(\sigma_m,\ R_0) \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1} S_+(\tau - \tau_j) \times$$
$$\times \int_0^{\tau-\tau_j} \frac{q(\theta)}{\sqrt{\theta}} \cos n\,[\varphi - \varphi_0 - \varphi(\tau - \theta)]\, e^{-a\sigma_m^2\theta - \frac{[z - z_0 - z(\tau-\theta)]^2}{4a\theta}}\, d\theta, \tag{3}$$

где $J_n(\sigma_m R)$ — функция Бесселя I рода n-го порядка; σ_m — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\sigma J_n'(\sigma R) + H J_n(\sigma R) = 0.$$

Ядро преобразования Ханкеля

$$K_n(\sigma_m,\ r) = \frac{\sqrt{2}}{R}\,\frac{1}{\left[\frac{H^2}{\sigma_m^2} + \left(1 - \frac{n^2}{\sigma_m^2 R^2}\right)\right]^{1/2}}\,\frac{J_n(\sigma_m r)}{J_n(\sigma_m r)}.$$

Штрих у знака суммы в выражении (3) обозначает, что слагаемое при $n = 0$ содержит множитель $1/2$.

Температурное поле цилиндра при его нагреве движущимся линейным источником тепла длиной $|z_0'' - z_0'|$ находим, используя формулу (3). Положив $q(\theta) = q'(\theta)\,dz_0$, проинтегрируем выражение (3) по z_0 в пределах от z_0' до z_0''. В результате получим

$$T = \frac{a}{2\pi\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty}{}' K_n(\sigma_m,\ r)\,K_n(\sigma_m,\ R_0) \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1} S_+(\tau - \tau_j) \times$$
$$\times \int_0^{\tau-\tau_j} q'(\theta) \cos n\,[\varphi - \varphi_0 - \varphi(\tau - \theta)]\, e^{-a\sigma_m^2\theta} \left(\operatorname{erfc}\frac{z - z_0'' - z(\tau - \theta)}{2\sqrt{a\theta}} - \right.$$
$$\left. - \operatorname{erfc}\frac{z - z_0' - z(\tau - \theta)}{2\sqrt{a\theta}}\right) d\theta. \tag{4}$$

Перейдем в выражении (4) к пределу, положив сначала $z_0' \to 0,\ z_0'' \to \infty$, а затем $z_0' \to -\infty,\ z_0'' \to +\infty$. В результате найдем температурное поле при нагреве цилиндра движущимися линейными полубесконечным и бесконечным источниками тепла соответственно:

$$T=\frac{a}{2\pi\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'K_n(\sigma_m,\ r)K_n(\sigma_m,\ R_0)\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}S_+(\tau-\tau_j)\times$$

$$\times\int_0^{\tau-\tau_j}q'(\theta)e^{-a\sigma_m^2\theta}\cos n[\varphi-\varphi_0-\varphi(\tau-\theta)]\left(2-\operatorname{erfc}\frac{z-z(\tau-\theta)}{2\sqrt{a\theta}}\right)d\theta,\qquad(5)$$

$$T=\frac{a}{\pi\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'K_n(\sigma_m,\ r)K_n(\sigma_m,\ R_0)\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}S_+(\tau-\tau_j)\times$$

$$\times\int_0^{\tau-\tau_j}q'(\theta)e^{-a\sigma_m^2\theta}\cos n[\varphi-\varphi_0-\varphi(\tau-\theta)]\,d\theta.\qquad(6)$$

Если источник тепла имеет постоянную мощность ($q'(\theta)=q'=\text{const}$), не движется ($\varphi(\tau-\theta)=0$) и действует с момента времени $\tau_1=0$ до $\tau_2=\infty$, то выражение (6) имеет вид, совпадающий с результатом работы [4]:

$$T=\frac{q'}{\lambda\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'K_n(\sigma_m,\ r)K_n(\sigma_m,\ R_0)\frac{1-e^{-a\sigma_m^2\tau}}{\sigma_m^2}\cos n(\varphi-\varphi_0).\qquad(7)$$

Положив $q'(\theta)=q''(\theta)R_0d\varphi_0$, проинтегрируем по φ_0 в пределах от $-\beta$ до β выражения (4)—(6). В результате получим температурные поля при нагреве цилиндра движущимися полосовыми конечным, полубесконечным и бесконечным источниками тепла соответственно:

$$T=\frac{R_0a}{\pi\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'K_n(\sigma_m,\ r)K_n(\sigma_m,\ R_0)\frac{\sin n\beta}{n}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}S_+(\tau-\tau_j)\times$$

$$\times\int_0^{\tau-\tau_j}q''(\theta)e^{-a\sigma_m^2\theta}\cos n[\varphi-\varphi(\tau-\theta)]\left(\operatorname{erfc}\frac{z-z_0''-z(\tau-\theta)}{2\sqrt{a\theta}}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{erfc}\frac{z-z_0'-z(\tau-\theta)}{2\sqrt{a\theta}}\right)d\theta,\qquad(8)$$

$$T=\frac{R_0a}{\pi\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'K_n(\sigma_m,\ r)K_n(\sigma_m,\ R_0)\frac{\sin n\beta}{n}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}S_+(\tau-\tau_j)\times$$

$$\times\int_0^{\tau-\tau_j}q''(\theta)e^{-a\sigma_m^2\theta}\cos n[\varphi-\varphi(\tau-\theta)]\left(2-\operatorname{erfc}\frac{z-z(\tau-\theta)}{2\sqrt{a\theta}}\right)d\theta,\qquad(9)$$

$$T=\frac{2R_0a}{\pi\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'K_n(\sigma_m,\ r)K_n(\sigma_m,\ R_0)\frac{\sin n\beta}{n}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}S_+(\tau-\tau_j)\times$$

$$\times\int_0^{\tau-\tau_j}q''(\theta)e^{-a\sigma_m^2\theta}\cos n[\varphi-\varphi(\tau-\theta)]\,d\theta.\qquad(10)$$

Если источник тепла постоянной мощности $q''(\theta)=q''$ имеет вид бесконечной полосы шириной 2β, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω, то, положив в формуле (10) $\varphi(\tau-\theta)=\omega(\tau-\theta)$ и выполнив предельный переход $R_0\to R$, получим

$$T=\frac{2q''aR}{\pi\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\beta}{n}K_n(\sigma_m,\ r)K_n(\sigma_m,\ R)\frac{1}{a^2\sigma_m^4+n^2\omega^2}\times$$

$$\times[a\sigma_m^2\cos n(\omega\tau-\varphi)+n\omega\sin n(\omega\tau-\varphi)-(a\sigma_m^2\cos n\varphi-n\omega\sin n\varphi)e^{-a\sigma_m^2\tau}].\qquad(11)$$

Выражение (11) совпадает с выражением, приведенным в работе [7]. Переходя в нем к подвижной системе координат $\varphi=\varphi^*+\omega\tau$ и учитывая, что $q_1=2\beta q''R$, получаем выражение, совпадающее с результатом, приведенным в работе [6].

При неподвижном источнике постоянной мощности, положив в выражении (10) $\varphi(\tau-\theta)=0$, $\tau_1=0$, $\tau_2=\infty$ и $R_0\to R$, получим выражение, совпадающее с результатом работы [7]:

$$T=\frac{2q''R}{\lambda\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'K_n(\sigma_m,\ r)\,K_n(\sigma_m,\ R)\ \frac{\sin n\beta\cos n\varphi}{n}\,\frac{1-e^{-a\sigma_m^2\tau}}{\sigma_m^2}. \qquad (12)$$

Решение (4) дает возможность найти температурные поля при нагреве цилиндра объемными источниками тепла. Положив $q'(\theta)=Q(\theta)\,R_0dR_0d\varphi_0$, проинтегрируем выражение (4) по φ_0 от $-\beta$ до $+\beta$, а по R_0 от R_1 до R_2. В полученном выражении перейдем к пределу при $z_0'\to 0$, $z_0''\to\infty$. В результате найдем температурные поля при нагреве цилиндра движущимся конечным длиной $|z_0''-z_0'|$, полубесконечным и бесконечным объемными источниками тепла соответственно:

$$T=\frac{a}{\lambda\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'K_n(\sigma_m,\ r)\,\frac{\sin n\beta}{n}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}S_+(\tau-\tau_j)\times$$

$$\times\int_{R_1}^{R_2}K_n(\sigma_m,\ R_0)\,R_0dR_0\int_0^{\tau-\tau_j}Q(\theta)\,e^{-a\sigma_m^2\tau}\cos n\,[\varphi-\varphi(\tau-\theta)]\times$$

$$\times\left(\operatorname{erfc}\frac{z-z_0''-z(\tau-\theta)}{2\sqrt{a\theta}}-\operatorname{erfc}\frac{z-z_0'-z(\tau-\theta)}{2\sqrt{a\theta}}\right)d\theta, \qquad (13)$$

$$T=\frac{a}{\lambda\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'K_n(\sigma_m,\ r)\,\frac{\sin n\beta}{n}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}S_+(\tau-\tau_j)\times$$

$$\times\int_{R_1}^{R_2}K_n(\sigma_m,\ R_0)\,R_0dR_0\int_0^{\tau-\tau_j}Q(\theta)\,e^{-a\sigma_m^2\theta}\cos n\,[\varphi-\varphi(\tau-\theta)]\times$$

$$\times\left(2-\operatorname{erfc}\frac{z-z(\tau-\theta)}{2\sqrt{a\theta}}\right)d\theta, \qquad (14)$$

$$T=\frac{2a}{\lambda\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{}'K_n(\sigma_m,\ r)\,\frac{\sin n\beta}{n}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}S_+(\tau-\tau_j)\times$$

$$\times\int_{R_1}^{R_2}R_0K_n(\sigma_m,\ R_0)\,dR_0\int_0^{\tau-\tau_j}Q(\theta)\,e^{-a\sigma_m^2\theta}\cos n\,[\varphi-\varphi(\tau-\theta)]\,d\theta. \qquad (15)$$

Положив $q'(\theta)=Q(\theta)\,R_0d\varphi_0dR_0$, проинтегрируем выражение (4) по φ_0 в пределах от 0 до 2π и по R_0 в пределах от R_1 до R_2. В результате получим температурное поле рассматриваемого цилиндра, нагреваемого источниками тепла, равномерно распределенными по объему полого цилиндра длиной $|z_0''-z_0'|$ и толщиной (R_2-R_1):

$$T=\frac{a}{2\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}K_0(\sigma_m,\ r)\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}S_+(\tau-\tau_j)\int_{R_1}^{R_2}R_0K_0(\sigma_m,\ R_0)\,dR_0\times$$

$$\times\int_0^{\tau-\tau_j}Q(\theta)\,e^{-a\sigma_m^2\theta}\left(\operatorname{erfc}\frac{z-z_0''-z(\tau-\theta)}{2\sqrt{a\theta}}-\operatorname{erfc}\frac{z-z_0'-z(\tau-\theta)}{2\sqrt{a\theta}}\right)d\theta. \qquad (16)$$

Переходя в выражении (16) к пределу при $z_0'\to 0$, $z_0''\to\infty$ и полагая $Q(\theta)=Q=\mathrm{const}$, $\tau_1=0$, $\tau_2=\infty$, $z(\tau-\theta)=0$, получаем температурное поле сплошного цилиндра, нагреваемого источниками тепла, равномерно распределенными по объему полубесконечного полого цилиндра, соосного с заданным.

Для $z>0$

$$T=\frac{Q}{\lambda R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_m\,[H^2+\sigma_m^2]}\,\frac{J_0(\sigma_m r)}{J_0(\sigma_m R_0)}\,[R_2J_1(\sigma_m R_2)-R_1J_1(\sigma_m R_1)]\times$$

$$\times \left\{2 - e^{-a\sigma_m^2\tau}\left(2 - \operatorname{erfc}\frac{z}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \frac{1}{2}\left[e^{-\sigma_m z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}} - \sigma_m\sqrt{a\tau}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}} + \sigma_m\sqrt{a\tau}\right)e^{+\sigma_m z}\right]\right\}.$$

Для $z < 0, \quad z = -z^*$

$$T = \frac{a}{\lambda R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_m[H^2+\sigma_m^2]}\frac{J_0(\sigma_m r)}{J_0(\sigma_m R)}[R_2 J_1(\sigma_m R_2) - R_1 J_1(\sigma_m R_1)] \times$$

$$\times \left\{-e^{-a\sigma_m^2\tau}\operatorname{erfc}\frac{z^*}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{1}{2}\left[e^{-\sigma_m z^*}\operatorname{erfc}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{a\tau}} - \sigma_m\sqrt{a\tau}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + e^{\sigma_m z^*}\operatorname{erfc}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{a\tau}} + \sigma_m\sqrt{a\tau}\right)\right]\right\}. \quad (17)$$

После введения обозначений $\mathrm{Bi} = HR$, $\mathrm{F_o} = \frac{a\tau}{R^2}$, $\rho = \frac{r}{R}$, $\rho_1 = \frac{R_1}{R}$, $\rho_2 = \frac{R_2}{R}$, $\zeta = \frac{z}{R}$ температурное поле (17) было записано в безразмер-

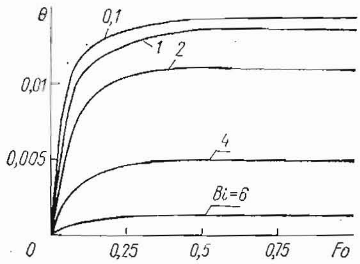

Рис. 1.

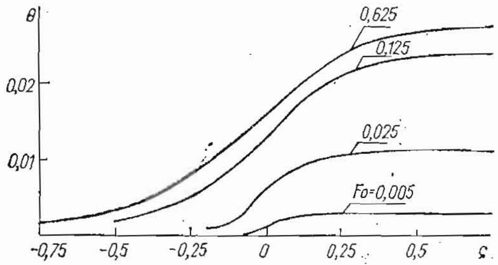

Рис. 2.

ном виде, который использовали для проведения числовых расчетов. Результаты расчетов при $\rho = 1, \zeta = 0, \rho_1 = 0{,}8, \rho_2 = 1$ представлены на рис. 1. Увеличение теплоотдачи приводит к уменьшению величины установившейся температуры θ и времени наступления установившегося режима. Зависимость температуры от координаты ζ в различные моменты времени показана на рис. 2. В точках с большей координатой ζ наступление установившегося режима происходит за большее время. При $\mathrm{Bi} = 0{,}4$ и $\mathrm{Fo} > 0{,}625$ температура во всех точках цилиндра не изменяется с течением времени.

1. *Бричкин Л. А., Даринский Ю. В., Пустыльников Л. М.* Нагрев полого цилиндра подвижным источником тепла.— Алма-Ата : Изд-во Казах. политехн. ин-та, 1971.— 164 с.
2. *Галицын А. С., Жуковский А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности.— Киев : Наук. думка, 1976.— 281 с.
3. *Карслоу Х. С., Егер Д. К.* Теплопроводность твердых тел.— М. : Наука, 1964.— 487 с.
4. *Коляно Ю. М., Стоцкий Ф. И.* Температурные напряжения в бесконечном цилиндре, нагреваемом поверхностным или линейным источником тепла.— Физ.-хим. обраб. металлов, 1975, 3, с. 10—13.
5. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики.— М. : Высш. шк., 1970.— 531 с.
6. *Напарьин Ю. А.* К расчету температурного поля в цилиндре от подвижного поверхностного источника с теплообменом.— Изв. вузов. Машиностроение, 1972, 2, с. 72—75.
7. *Стоцкий Ф. И.* Температурное поле в бесконечном цилиндре, нагреваемом источником тепла.— В кн.: Вычислительная и прикладная математика. Изд-во Киев. ун-та, 1977, с. 32.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 29.12.82