уравнений термоупругости с разрывными и импульсными коэффициентами для многослойного тела, приходим к уравнениям, полностью совпадающим с приведенными в работе [6].

При решении конкретных задач термоупругости кусочно-однородных тел, исходными в которых приняты уравнения теплопроводности и термоупругости с разрывными и импульсными коэффициентами, удобно пользоваться методами интегральных преобразований для сведения соответствующих краевых задач к рассмотрению обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными и сингулярными коэффициентами, решение которых можно строить методами работ [1, 10—12, 15].

1. *Вігак В. М.* О построении решения уравнения теплопроводности для кусочно-однородного тела.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 1, с. 30—32.
2. *Гельфанд Н. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними.— М. : Физматгиз, 1959.— 470 с.
3. *Коляно Ю. М.* Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 7—11.
4. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Нестационарное температурное поле в состыкованных пластинках.— Физика и химия обраб. материалов, 1975, № 5, с. 16—23.
5. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой.— Физ.-хим. механика материалов, 1976, № 2, с. 108—112.
6. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Термоупругость многослойных тел.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1112—1117.
7. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Уравнения термоупругости неоднородных и кусочно-однородных пластин.— В кн.: Математические методы в термомеханике. Киев : Наук. думка, 1978, с. 50—63.
8. *Коляно Ю. М., Процюк Б. В.* Термоупругость неоднородных и кусочно-однородных пластин, обладающих цилиндрической анизотропией.— В кн.: Обобщенные функции в термоупругости. Киев : Наук. думка, 1980, с. 3—19.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М. : Наука, 1973.— 832 с.
10. *Кушнир Р. М.* О построении решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 9, с. 55—59.
11. *Лазарян В. А., Кононенко С. И.* Обобщенные функции в задачах механики.— Киев : Наук. думка, 1974.— 190 с.
12. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем.— М. : Машиностроение, 1973.— 659 с.
13. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Уравнения обобщенной термоупругости для тел с тонкими включениями.— Докл. АН СССР, 1975, 224, № 4, с. 794—797.
14. *Попович В. С.* Термоупругость кусочно-однородных тел с плоско-параллельными границами раздела.— Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1978.— 21 с.
15. *Процюк Б. В.* О решении задач теплопроводности и термоупругости многослойных тел.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 11, с. 1019—1021.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 22.08.83

УДК 536.242

Ю. А. Чернуха, Е. И. Дубленич, Г. И. Шпак

УСЛОВИЯ ТЕПЛООБМЕНА ЧЕРЕЗ ТРЕХСЛОЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ С ДВИЖУЩИМСЯ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Хотя трехслойные элементы с движущимся заполнителем находят в современной технике все более широкое применение (в ограждающих конструкциях, в радиаторах водяного охлаждения и т. п.), в литературе отсутствуют надежные методы их теплофизического расчета. В данной статье операторным методом выводятся условия теплообмена через такие элементы.

Рассмотрим систему, состоящую из двух тонких пластинок (внешние слои толщиной $2h_i$, $i = 1, 3$), между которыми протекает жидкость или газ (промежуточный слой толщиной $2h_2$). Процесс теплопереноса в каждом из этих слоев описывается уравнением [1]

$$\lambda_i \left(\frac{\partial^2 t_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_i}{\partial z_i^2} \right) = c_i \left(v_x^{(i)} \frac{\partial t_i}{\partial x} + \frac{\partial t_i}{\partial \tau} \right). \quad (1)$$

Здесь t_i — температура i-го слоя; λ_i — коэффициент теплопроводности; c_i — объемная теплоемкость; τ — время; индекс $i = 2$ относит рассматриваемую величину к заполнителю, а $i = 1,\ 3$ — к внешним слоям; $v_x^{(2)}$ — скорость движения жидкости (газа); $v_x^{(1)} = v_x^{(3)} = 0$; координата z_i отсчитывается от срединной поверхности i-го слоя в направлении нормали; направление оси Ox совпадает с направлением движения.

Пусть теплообмен со средой, омывающей верхнюю поверхность элемента ($z_1 = h_1$), осуществляется по закону Ньютона

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z_1} + \varepsilon_t (t_1 - t_c)|_{z_1=h_1} = 0. \tag{2}$$

На границах между слоями вследствие предположения о полном прилипании принимаем следующие условия сопряжения:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z_1}\Big|_{z_1=-h_1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z_2}\Big|_{z_2=h_2}, \quad t_1(-h_1) = t_2(h_2),\\ &\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z_2}\Big|_{z_2=-h_2} = \lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial z_3}\Big|_{z_3=h_3}, \quad t_2(-h_2) = t_3(h_3). \end{aligned} \tag{3}$$

Для значения температуры и теплового потока на нижней поверхности элемента введем обозначения

$$t_* = t_3(-h_3), \quad q_* = \lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial z_3}\Big|_{z_3=-h_3}. \tag{4}$$

Получить условия теплообмена через рассматриваемый элемент (т. е. установить связь между величинами q_*, t_*, t_c), применяя известную методику [3, 4], представляется затруднительным, так как у поверхности каждой из пластинок образуется гидродинамический пограничный слой толщиной δ, в пределах которого скорость $v_x^{(2)}$ изменяется от нуля до значения скорости основного потока v_c, и уравнение (1) имеет в соответствующих областях существенно изменяющиеся коэффициенты.

Воспользуемся приближенным решением интегрального уравнения гидродинамического погранслоя [1]

$$v_x^{(2)} = \frac{1}{2} v_c (3\eta - \eta^3), \quad \eta = \delta^{-1}(h_2 + z_2) \tag{5}$$

и подходом, предложенным в работе [2]; тогда общее решение уравнения (1) для $i = 2$ и $\eta \in (0, 1)$ находим в виде

$$\begin{aligned} t = &\left[\eta - \delta^2\left(\frac{1}{3!}\nu\eta^3 - \frac{3}{4!}\mu\eta^4 + \frac{2}{5!}\mu\eta^6\right) + \cdots\right] A_0 - \\ &- \left[1 - \delta^2\left(\frac{1}{2}\nu\eta^2 - \frac{6}{4!}\mu\eta^3 + \frac{3}{5!}\mu\eta^5\right) + \cdots\right] A_1, \\ &\nu = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda_2^{-1} c_2 \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \mu = \lambda_2^{-1} c_2 v_c \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение (6) при $\eta = 1$ должно удовлетворять условиям

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z}\Big|_{\eta=1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z_2}\Big|_{z_2=-h_2'}, \quad t(1) = t_2(-h_2'), \quad h_2' = h_2 - \delta. \tag{7}$$

Внесем вместо t выражение (6) в два последних из условий (3) и в условия (7); это даст четыре соотношения, исключая из которых величины A_0 и A_1, получаем условия теплообмена через гидродинамический погранслой:

$$\begin{aligned} q_2^- &= \lambda_2 \delta^{-1}\left[t_2^- - t_3^+ - \frac{1}{6}\delta^2\nu(2t_2^- + t_3^+) + \frac{1}{120}\delta^2\mu(35t_2^- + 13t_3^+)\right], \\ q_3^+ &= \lambda_2 \delta^{-1}\left[t_2^- - t_3^+ + \frac{1}{6}\delta^2\nu(t_2^- + 2t_3^+) - \frac{1}{120}\delta^2\mu(13t_2^- + 14t_3^+)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Аналогично получаем условия теплообмена между основным потоком жидкости и верхней пластинкой (слоем 1):

$$q_1^- = \lambda_2\delta^{-1}\left[t_1^- - t_2^+ - \frac{1}{6}\delta^2\nu(2t_1^- + t_2^+) + \frac{1}{120}\delta^2\mu(14t_1^- + 13t_2^+)\right],$$
$$q_2^+ = \lambda_2\delta^{-1}\left[t_1^- - t_2^+ + \frac{1}{6}\delta^2\nu(t_1^- + 2t_2^+) - \frac{1}{120}\delta^2\mu(13t_1^- + 35t_2^+)\right] \quad (9)$$

В соотношениях (8), (9) обозначено:

$$q_i^\pm = \lambda_i \left.\frac{\partial t_i}{\partial z_i}\right|_{z_i=\pm h_i}, \quad t_i^\pm = t_i(\pm h_i) \quad (i = 1, 3),$$
$$q_2^\pm = \lambda_2 \left.\frac{\partial t_2}{\partial z_2}\right|_{z_2=\pm h_2'}, \quad t_2^\pm = t_2(\pm h_2').$$

Поскольку соотношения (8), (9) позволяют исключить из рассмотрения области, в которых коэффициенты уравнения (1) переменные (области гидродинамических погранслоев), то в дальнейшем можем использовать разработанную методику [3]; следуя указанному подходу, операторное решение уравнения (1) представляем в виде

$$t_i = (\sin p_i z_i) B_i + (\cos p_i z_i) D_i, \quad (10)$$

$$p_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda_i^{-1} c_i \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (i = 1, 3), \ p_2^2 = \nu - \mu. \quad (11)$$

Внесение вместо t_i выражения (10) в условия (2), (4), (8) и (9) приводит к семи соотношениям, исключение из которых шести величин B_i и D_i ($i = 1, 2, 3$) дает искомую зависимость между величинами q_*, t_* и t_c. Разлагая содержащиеся в этой формуле трансцендентные выражения в ряды по степеням h_i и отбрасывая члены с h_i второй степени (и выше), окончательно получаем

$$(1 + \varepsilon_t R) q_* = \left[\Lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - C\frac{\partial}{\partial \tau} - \left(1 - \frac{3}{8}\varepsilon\right) C_2 v_c \frac{\partial}{\partial x}\right] t_* - \varepsilon_t (t_* - t_c). \quad (12)$$

Здесь обозначено: $R = 2\sum_{i=1}^{3} h_i\lambda_i^{-1}$, $\Lambda = 2\sum_{i=1}^{3} h_i\lambda_i$, $C = 2\sum_{i=1}^{3} h_i c_i$, $C_2 = h_2 C_2$, $\varepsilon = \delta h_2^{-1}$. При $v_c = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, $c_1 = c_2 = c_3$ из выражения (12) следует условие теплообмена для тел с покрытиями [4].

1. *Лыков А. В.* Тепломассообмен. Справочник.— М. : Энергия, 1978.— 480 с.
2. *Зорий Л. М.* О новом методе построения общих решений линейных дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 5, с. 353—356.
3. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках.— Київ : Вид-во АН УРСР, 1961.— 212 с.
4. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями.— Тепловые напряжения в элементах конструкции, 1967, вып. 7, с. 227—233.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 07.12.83

УДК 536.12

А. Н. Кулик, Х. Н. Ярошевич

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРА, НАГРЕВАЕМОГО ДВИЖУЩИМИСЯ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Сплошные и полые цилиндры являются самыми распространенными деталями в машиностроении. Для определения их термоупругого состояния, обусловленного заданными тепловыми воздействиями, следует определить возникающее температурное поле. С этой целью рассмотрим бесконечный круговой цилиндр радиуса R с теплообменом. Начальная температура