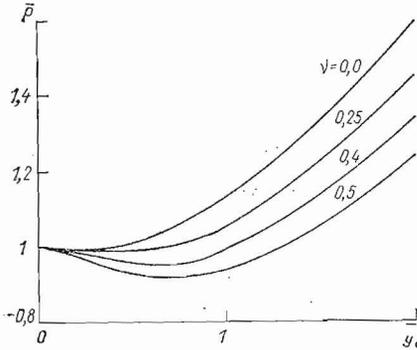


В качестве примера рассмотрим образование одной зоны нарушения прямого контакта тел вследствие приложения двух сил:  $P_1 = -iP_{y1}$  в точке  $z_{01} = iy_{01}$  и  $P_2 = iP_{y2}$  в точке  $z_{02} = iy_{02}$  ( $z_{0k} \in S_k$ ;  $y_{01}, P_{y1} \leq 0$ ;  $y_{02}, P_{y2} \geq 0$ ). Полу плоскости сжаты на бесконечности усилием  $\sigma_y^\infty = -p$ , а берега зазоров свободны от напряжений. Вследствие симметрии положим  $L_1 = [-a, a]$ . Тогда решение (14) уравнения (11) запишется так:

$$g_1(x) = -x \sqrt{a^2 - x^2} \sum_{k=1,2} \frac{(-1)^k (1 + \kappa_k) e_k P_{yk}}{4\mu_k (a^2 + y_{0k}^2) \sqrt{x^2 + y_{0k}^2}} \times \left[ (1 + \kappa_k) + \frac{4y_{0k}^2}{x^2 + y_{0k}^2} + \frac{2y_{0k}^2}{y_{0k}^2 + a^2} \right].$$



Условия (12), (13) приводят к соотношению, связывающему полудлину зазора  $a$  с величинами  $P_k, y_{0k}$  ( $k = 1, 2$ ) и  $p$ :

$$Kp = 2 \sum_{k=1,2} \frac{(-1)^k (1 + \kappa_k) e_k P_{yk}}{2\mu_k \sqrt{y_{0k}^2 + a^2}} \times \left[ (1 + \kappa_k) + \frac{2y_{0k}^2}{y_{0k}^2 + a^2} \right]. \quad (16)$$

Численные расчеты проводились для полу плоскостей из одинаковых материалов ( $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ;  $\mu_1 = \mu_2$ ;  $K_1 = K_2$ ), находящихся в состоянии плоской деформации. На тела действуют равные по величине силы  $P_2 = -P_1 = P$ , приложенные на одинаковом расстоянии  $y_{02} = -y_{01} = y_0$  от границ тел. На рисунке представлена зависимость безразмерной силы  $\bar{P} = 2P/(pa)$  от безразмерного расстояния  $\bar{y}_0 = y_0/a$  при фиксированной длине зазора  $2a$  и разных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$ . Для материалов, близких к несжимаемым, графики имеют локальные минимумы. Следовательно, для таких материалов силы, необходимые для образования зазора заданной длины, будут наименьшими, если они приложены на некотором расстоянии от границ.

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.— 708 с.
2. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1968.— 511 с.
3. Сулим Г. Т. Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений.— Прикл. механика, 1981, 17, № 11, с. 82—89.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 03.11.83

УДК 537.2

Б. П. Галапац, Р. А. Пеленский

#### ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ ПРИ ТЕПЛОМ УДАРЕ НА КРАЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

При разработке средств для исследования нестационарных температурных режимов выдвинута проблема изучения кинетики перераспределения электрической системы устройства при температурных воздействиях. Если предметом исследований являются быстропотекающие температурные режимы, влиянием джоулева тепла, сопровождающего процесс перестройки, можно пренебречь. Тогда, согласно работе [1], аналитическое описание переходного

го процесса можно провести с помощью следующих уравнений:

$$\Delta\chi - \frac{c}{\lambda} \frac{\partial\chi}{\partial\tau} - \frac{c}{\epsilon_a} \chi = -\frac{\eta}{\lambda} \Delta t - \frac{c\gamma}{\lambda} \frac{\partial t}{\partial\tau} - \frac{c\gamma}{\epsilon_a} t, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{c}{\epsilon_a} (\chi - \gamma t), \quad (2)$$

$$\vec{\delta} = \lambda\vec{E} - \lambda\nabla\chi - \eta\nabla t, \quad (3)$$

$$\rho = c(\chi - \gamma t), \quad (4)$$

где  $\chi$  — приращение термодинамического электрического потенциала;  $t$  — приращение температуры;  $\vec{E}$  — вектор напряженности электрического поля;  $\vec{\delta}$  — вектор плотности тока;  $\rho$  — плотность распределенного в среде объемного заряда;  $c$  — удельная изотермическая емкость;  $\lambda$  — удельная электропроводность среды;  $\epsilon_a$  — электрическая постоянная среды;  $\eta$  — коэффициент термодиффузии носителей заряда;  $\gamma$  — температурный коэффициент изменения термодинамического электрического потенциала при фиксированном  $\rho$ ;  $\tau$  — время.

Анализ кинетики перераспределения электрической системы термоэлектрического устройства при тепловом ударе состоит из трех этапов: расчета распределения объемных и поверхностных зарядов в исходном состоянии системы, т. е. исследования начальных условий; решения температурной задачи; расчета сопутствующего изменению температуры перераспределения электрической системы устройства.

Для расчета распределенных объемных и поверхностных зарядов в однородно нагретом теле на основе уравнения (1) нетрудно получить уравнение для термодинамического электрического потенциала [1]:

$$\Delta\chi - \frac{c}{\epsilon_a} \chi = 0. \quad (5)$$

В рассматриваемом одномерном случае бесконечной электропроводной пластины толщиной  $h$  уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} - \frac{c}{\epsilon_a} \chi = 0. \quad (6)$$

Согласно работе [2], на границе металл — вакуум термодинамический электрический потенциал равен поверхностному потенциалу  $\Phi$ , определяемому через работу выхода электрона:

$$X_0 + \chi = \Phi, \quad (7)$$

где  $X_0$  — термодинамический электрический потенциал областей, невозмущенных наличием границ.

Решение уравнения (6), удовлетворяющее граничному условию (7), имеет вид

$$\chi = (\Phi - X_0) \frac{\text{sh } mx + \text{sh } m(h-x)}{\text{sh } mx}, \quad (8)$$

где  $m = \sqrt{\frac{c}{\epsilon_a}}$ . В равномерно нагретой пластине при отсутствии внешних электромагнитных полей

$$\rho = c\chi, \quad (9)$$

а плотность тока равна нулю. Следовательно, на основе уравнений (1), (3) для этого случая получаем

$$\vec{E} = \nabla\chi. \quad (10)$$

Допуская, что заряд электронов, покинувших твердое тело вследствие неодинаковости энергетических состояний в теле и в вакууме, сосредоточен на поверхности твердого тела, с помощью граничного условия для вектора смещения можно определить поверхностную плотность заряда. Учитывая,

что при наличии поверхностного сосредоточенного слоя зарядов напряженность электрического поля вне пластины равна нулю, на основе формул (8), (10) для плотностей поверхностных зарядов получаем выражение

$$\sigma = (\Phi - X_0) \sqrt{c\epsilon_a} \frac{1 - c^h mh}{\text{sh } mh}. \quad (11)$$

При тепловом ударе на плоскость  $x = 0$  в пластине протекает процесс теплопроводности, вследствие которого температура точек пластины изменяется во времени. Вслед за изменением температуры происходит перестройка электрической системы пластины. Учитывая, что процессы теплопроводности протекают на несколько порядков медленнее процессов электропроводности, задачу теплопроводности можно решить отдельно.

Дифференциальное уравнение теплопроводности при отсутствии источников тепла внутри тела имеет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + a\Delta t = 0, \quad (12)$$

где  $t = T - T_0$  — отклонение температуры  $T$  от начального состояния  $T_0$ ;  $a$  — температуропроводность пластины.

В начальный момент времени температура пластины равна  $T_0$ , следовательно, за начальное условие для решения уравнения (12) следует принять

$$t(x, 0) = 0. \quad (13)$$

Тепловой удар на плоскость  $x = 0$  характеризуем граничным условием

$$t(0, \tau) = (T_c - T_0) [1 - \exp(-b\tau)], \quad (14)$$

где величина, равная  $b^{-1}$ , представляет собой постоянную времени нарастания температуры на плоскости  $x = 0$  пластины. На плоскости  $x = h$  поддерживается постоянная температура  $T_0$ .

При использовании интегрального преобразования Лапласа нетрудно получить точное решение сформулированной задачи теплопроводности:

$$t = (T_c - T_0) \frac{h-x}{h} - (T_c - T_0) \frac{\sin n(h-x)}{\sin nh} \exp(-b\tau) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (T_c - T_0) (-1)^k \frac{2}{k\pi} \frac{bh^2}{bh^2 - k^2\pi^2 a} \sin k\pi \frac{h-x}{h} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2 a\tau}{h^2}\right), \quad n = \sqrt{\frac{b}{a}}. \quad (15)$$

На основе уравнения (1) с использованием в качестве начального условия (8), а в качестве граничных — условия

$$\chi(0, \tau) = \chi(h, \tau) = \Phi - X_0 \quad (16)$$

при ранее рассчитанном законе изменения температуры точек среды (15) найдено точное решение для термодинамического электрического потенциала  $\chi(x, \tau)$ , которое здесь не приведено из-за его громоздкости.

Используя уравнение (4) и найденные ранее  $\chi(x, \tau)$  и  $t(x, \tau)$ , определяем закон изменения распределенного объемного заряда пластины, который при  $b \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\rho = (T_c - T_0) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2c\epsilon_a(\eta + \lambda\gamma) \pi k}{c\lambda h^2 - \epsilon_a \pi^2 k^2 (ca - \lambda)} \sin k\pi \frac{h-x}{h} \times \\ \times \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\lambda}{\epsilon_a} + \frac{\lambda}{c} \frac{\pi^2 k^2}{h^2}\right) \tau\right] - \exp\left(-\frac{k^2\pi^2 a\tau}{h^2}\right) \right\} + \\ + (\Phi - X_0) c \frac{\text{sh } mx + \text{sh } m(h-x)}{\text{sh } mh}. \quad (17)$$

Значение напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , полученное на основе теоремы Гаусса

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (18)$$

используется для нахождения плотностей поверхностных зарядов  $\sigma(0, \tau)$  и  $\sigma(h, \tau)$  с помощью граничного условия для нормальных составляющих вектора смещения:

$$\begin{aligned} \sigma(0, \tau) = & (T_c - T_0) \varepsilon_a \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2hc(\eta + \lambda\gamma)}{c\lambda h^2 - \varepsilon_a \pi^2 k^2 (ca - \lambda)} \times \\ & \times \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\lambda}{\varepsilon_a} + \frac{\lambda}{c} \frac{\pi^2 k^2}{h^2} \right) \tau \right] - \exp \left( - \frac{\pi^2 k^2 a \tau}{h^2} \right) \right\} - \\ & - (\Phi - X_0) \sqrt{c\varepsilon_a} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{c}{\varepsilon_a}} h - (T_c - T_0) \frac{\varepsilon_a}{\lambda h} (\eta + \lambda\gamma), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma(h, \tau) = & - (T_c - T_0) \varepsilon_a \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2hc(\eta + \lambda\gamma)}{c\lambda h^2 - \varepsilon_a \pi^2 k^2 (ca - \lambda)} \times \\ & \times \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\lambda}{\varepsilon_a} + \frac{\lambda \pi^2 k^2}{ch^2} \right) \tau \right] - \exp \left( - \frac{k^2 \pi^2 a \tau}{h^2} \right) \right\} - \\ & - (\Phi - X_0) \sqrt{c\varepsilon_a} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{c}{\varepsilon_a}} h + (T_c - T_0) \frac{\varepsilon_a}{\lambda h} (\eta + \lambda\gamma). \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что из приведенных решений как граничный случай следуют результаты, полученные в работе [3] для полупространства. В результате проведенного анализа перераспределения электрической системы бесконечной электропроводной пластины установлено следующее: с ростом температуры точек пластины за счет выхода из нее части свободных электронов увеличивается плотность распределенного объемного заряда в ее пограничных областях; поверхностные заряды плоскостей  $x = 0$  и  $x = h$ , образованные электронами, покинувшими твердое тело, перераспределяются между собой при тепловом ударе.

Выполненные исследования перестройки электрической системы могут быть полезны при исследовании динамических погрешностей измерительных преобразователей неэлектрических величин в электрические.

1. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Пеленский Р. А. Теоретические основы расчета распределения объемных и поверхностных зарядов в микроэлектронных и термоэлектрических устройствах.— Теорет. электротехника, 1976, вып. 20, с. 74—84.
2. Пеленский Р. А. Исследование граничных условий для расчета распределения объемных зарядов в элементах микроэлектроники.— Там же, 1979, вып. 27, с. 102—107.
3. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах.— Київ: Наук. думка, 1978.— 230 с.

Ин-т прикл. пробл. механики  
и математики АН УССР, Львов  
Льв. политехн. ин-т

Получено 02.11.83

УДК 539.377

Ю. М. Коляно, В. С. Попович

### О ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ С РАЗРЫВНЫМИ И СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ ТЕЛ ОДНОМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

В последнее время в термоупругости кусочно-однородных тел широкое применение находит теория обобщенных функций. В работах [4—7, 14] предложено представлять физико-механические характеристики кусочно-однородного тела как единого целого с помощью единичных функций [9] и сводить на этой основе задачу теплопроводности и термоупругости к решению уравнений с разрывными и сингулярными коэффициентами. В случае тел с тонкостенными включениями физико-механические характеристики могут быть представлены [13] с помощью дельта-функции Дирака. Более подробный анализ применения обобщенных функций в термоупругости кусочно-однородных тел приведен в работе [3].