

ной длины разрезов $\alpha_0 = l/R$ и их количества. Кривыми 1, 3 показано изменение коэффициентов интенсивности в оболочке с одним разрезом ($k = 1$), а кривыми 2, 4 — в оболочке с семью ($k = 7$) разрезами. При этом штриховые линии соответствуют однородной оболочке ($\sigma = 1$), сплошные линии 1, 2 — параметру $\sigma = 0,2$, а 3, 4 — параметру $\sigma = 5$. Как видно из графиков, коэффициенты интенсивности имеют меньшее значение для оболочек, в которых модуль упругости внешнего и внутреннего слоев превышает значение модуля упругости среднего слоя.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек.— М.: Наука, 1974.— 446 с.
2. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости.— М.: Наука, 1973.— 303 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. М., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев: Наук. думка, 1976.— 443 с.
4. Подстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек.— Киев: Наук. думка, 1978.— 343 с.
5. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николышин М. М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 04.05.83

УДК 539.3

Р. М. Мартыняк

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ ПРИ НЕПОЛНОМ МЕХАНИЧЕСКОМ КОНТАКТЕ

Рассмотрим плоскую задачу о контактном взаимодействии упругих тел при неполном контакте. Тела моделируем нижней S_1 и верхней S_2 полуплоскостями, которые контактируют без трения вдоль оси абсцисс L декартовой системы координат и находятся под действием сжимающих усилий на бесконечности $\sigma_y^\infty = -p$. Под влиянием системы сосредоточенных сил $P_k = P_{xk} + iP_{yk}$ в точках z_{k0} и моментов M_k в точках z_{k0} ($z_{k0}, z_{k0} \in S_k$) вдоль N отрезков $L_n = [a_n, b_n]$ линии L образуются зоны нарушения прямого контакта. Вдоль $L = L'' \setminus L'$, где $L' = \bigcup_{n=1}^N L_n$, тела контактируют непосредственно. К границам полуплоскостей на L' приложены нормальные $\sigma_{y1} = P^-(x)$, $\sigma_{y2} = P^+(x)$ и касательные $\tau_{xy1} = Q^-(x)$, $\tau_{xy2} = Q^+(x)$ усилия. Здесь и далее индекс 1 у величины относит ее к области S_1 , индекс 2 — к S_2 , а обозначения для компонент тензора напряжений, вектора смещений и упругих постоянных общеприняты [1]. Требуется определить напряженно-деформированное состояние в телах, форму зазоров и их местоположение.

Напряжения и перемещения должны удовлетворять граничным условиям на линии L и на бесконечности:

$$\tau_{xy1} = \tau_{xy2} = 0 \quad (x \in L''), \quad \tau_{xy1} = Q^-(x), \quad \tau_{xy2} = Q^+(x) \quad (x \in L'); \quad (1)$$

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y2} \quad (x \in L''), \quad \sigma_{y1} = P^-(x), \quad \sigma_{y2} = P^+(x) \quad (x \in L'); \quad (2)$$

$$v_1' - v_2' = 0 \quad (x \in L''); \quad (3)$$

$$\sigma_{yk}^\infty = -p, \quad \tau_{xyk}^\infty = \sigma_{xk}^\infty = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (4)$$

Перейдем к решению задачи. Напряжения и перемещения выражаются с учетом условия (4) через комплексные потенциалы $\Phi_k(z)$, продолженные из области S_k в S_l ($k, l = 1, 2; k \neq l$) и убывающие на бесконечности, следующим образом [1, 3]:

$$\sigma_{yk} - i\tau_{xyk} = \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_k'(z)} + A(z) - p; \quad (5)$$

$$2\mu_k(u_k' + iv_k') = \kappa_k\Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_k'(z)} + B_k(z) + \frac{p}{4}(3 - \kappa_k)$$

$$(z \in S_k; k = 1, 2),$$

где

$$A(z) = \sum_{m=1,2} [S_{mm}(z) + \overline{S_{mm}(z)} + z\overline{S'_{mm}(z)} + \overline{R_{mm}(z)} + \overline{R_m(z)}];$$

$$B_k(z) = (1 + \kappa_k) \sum_{m=1,2} S_{mm}(z) - A(z);$$

$$S_{kj}(z) = -\frac{e_k P_j}{z - z_{0j}}; \quad R_{kj}(z) = e_k \left[\frac{\kappa_k \overline{P_j}}{z - z_{0j}} - \frac{z_{0j} P_j}{(z - z_{0j})^2} \right];$$

$$R_j(z) = -\frac{iM_j}{2\pi(z - z_{j0})^2}; \quad e_k = \frac{1}{2\pi(1 + \kappa_k)}.$$

Подставляя первое соотношение (5) в граничное условие (1), получаем следующие необходимые в дальнейшем зависимости:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} &= 2iq_1(z) + [zS'_{22}(z) + R_{22}(z) + R_2(z)] - \\ &\quad - [z\overline{S'_{11}(z)} + \overline{R_{11}(z)} + \overline{R_1(z)}], \\ \Phi_2(z) + \overline{\Phi_2(z)} &= -2iq_2(z) - [zS'_{22}(z) + R_{22}(z) + R_2(z)] + \\ &\quad + [z\overline{S'_{11}(z)} + \overline{R_{11}(z)} + \overline{R_1(z)}] \quad (z \in S_1), \\ \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} &= 2iq_1(z) + [z\overline{S'_{22}(z)} + \overline{R_{22}(z)} + \overline{R_2(z)}] - \\ &\quad - [zS'_{11}(z) + R_{11}(z) + R_1(z)], \\ \Phi_2(z) + \overline{\Phi_2(z)} &= -2iq_2(z) - [z\overline{S'_{22}(z)} + \overline{R_{22}(z)} + \overline{R_2(z)}] + \\ &\quad + [zS'_{11}(z) + R_{11}(z) + R_1(z)] \quad (z \in S_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\overline{\Phi_k(z)} = \overline{\Phi_k(\bar{z})}$; $\{q_1(z), q_2(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \{Q^-(t), Q^+(t)\} \frac{dt}{t-z}$.

Рассмотрим на L скачки напряжений и производных от нормальных смещений:

$$(\sigma_{y1} - i\tau_{xy1}) - (\sigma_{y2} - i\tau_{xy2}) = f(x), \quad (7)$$

$$v'_1 - v'_2 = g(x) \quad (x \in L). \quad (8)$$

Удовлетворяя условию (7), находим

$$\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = -t_1(z), \quad t_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-z} \quad (z \in S_1 \cup S_2). \quad (9)$$

Тогда условие (8) с учетом соотношений (6) (9), приводит к задаче линейного сопряжения относительно одной из функций $\Phi_k(z)$ ($k = 1, 2$). Решая ее, получаем

$$\begin{aligned} K\Phi_1(z) &= -K_2 t_1(z) + 2it_2(z) + \frac{\kappa_1}{2\mu_1} q_1(z) + \frac{1}{2\mu_2} q_2(z) + \\ &+ K_2 [S_{11}(z) - \overline{S_{22}(z)}] - K_1 [S_{11}(z) + zS'_{11}(z) + R_{11}(z) + R_1(z) - \\ &\quad - \overline{S_{22}(z)} - z\overline{S'_{22}(z)} - \overline{R_{22}(z)} - \overline{R_2(z)}] \quad (z \in S_2), \\ K\Phi_1(z) &= -K_2 t_1(z) - 2it_2(z) + \frac{1}{2\mu_1} q_1(z) + \frac{\kappa_2}{2\mu_2} q_2(z) - \\ &- K_1 [S_{22}(z) - \overline{S_{11}(z)}] + K_2 [S_{22}(z) + zS'_{22}(z) + R_{22}(z) + R_2(z) - \\ &\quad - \overline{S_{11}(z)} - z\overline{S'_{11}(z)} - \overline{R_{11}(z)} - \overline{R_1(z)}] \quad (z \in S_1), \end{aligned} \quad (10)$$

где $t_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t) dt}{t-z}$; $K_i = \frac{1 + \kappa_i}{2\mu_i}$ ($i = 1, 2$); $K = K_1 + K_2$.

Таким образом, соотношения (5), (10) определяют напряженно-деформированное состояние взаимодействующих без трения полуплоскостей при неполном контакте. Отметим, что входящие в соотношения (10) скачки нап-

ражений $f(x)$ вдоль зон нарушения прямого контакта даются формулами (7), (1), (2), а скачок производных от нормальных смещений $g(x)$ пока не известен.

Удовлетворяя с помощью выражений (10) граничному условию (2), для определения скачка производных от нормальных смещений на отрезках нарушения контакта получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{2}{\pi} \int_{L'} \frac{g_n(t) dt}{t-x} = F(x) \quad (x \in L'). \quad (11)$$

Здесь

$$F(x) = \frac{1-\kappa_1}{2\mu_1} 2iq_1(x) - \frac{1-\kappa_2}{2\mu_2} 2iq_2(x) + K\sigma_y^0(x) - K_1P^-(x) - K_2P^+(x);$$

$$g_n(x) = g(x) \quad (x \in L_n); \quad \sigma_y^0(x) = -p + \frac{2}{K} \operatorname{Re}[K_1T_1(x) + K_2T_2(x)];$$

$$T_k(x) = 2S_{kk}(x) + xS'_{kk}(x) + R_{kk}(x) + R_k(x) \quad (k = 1, 2);$$

$\sigma_y^0(x)$ — нормальные напряжения на линии контакта полуплоскостей при отсутствии зазоров и нагрузки на их берегах.

Функции $g_n(x)$ должны удовлетворять следующим очевидным условиям:

$$\int_{L_n} g_n(t) dt = 0 \quad (n = \overline{1, N}). \quad (12)$$

Из физических соображений ясно, что решение уравнения (11) должно быть ограниченным. При выполнении дополнительных условий

$$\int_{L'} \frac{t^n F(t) dt}{X(t)} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, N-1), \quad (13)$$

где $X(z) = \prod_{n=1}^N (z-a_n)^{\frac{1}{2}} (z-b_n)^{\frac{1}{2}}$, такое решение существует и имеет вид [2]

$$g_n(x) = -\frac{X(x)}{2\pi} \int_{L'} \frac{F(t) dt}{X(t)(t-x)} \quad (x \in L_n; n = \overline{1, N}). \quad (14)$$

Интегрируя функцию $g(x)$, получаем функцию, описывающую форму зазоров. Для определения $2N$ заранее неизвестных a_n, b_n ($n = \overline{1, N}$) служат $2N$ дополнительных условий (12), (13). Предложенная методика позволяет решать задачи о сжатии полуплоскостей, граничные линии которых имеют малые локальные отклонения от прямых.

Пусть граница тел S_1 и S_2 описывается функциями $r_1(x)$ и $r_2(x)$ соответственно, причем $r_1(x) = r_2(x) = 0$ при $x = \pm \infty$. В этом случае контакт не будет полным и пусть имеется N зон отсутствия прямого контакта. Тогда вместо граничного условия (3) получим

$$v'_1 - v'_2 = r'_2(x) - r'_1(x) \equiv r(x) \quad (x \in L^n). \quad (15)$$

Для простоты в условиях (1), (2) положим $\tau_{xyk} = \sigma_{yk} \equiv 0$ ($x \in L'$), т. е. $f(x) \equiv 0$ ($x \in L$).

После некоторых преобразований, аналогичных изложенным выше, приходим к сингулярному интегральному уравнению относительно функции $g^*(x) = g(x) - r(x)$:

$$\frac{2}{\pi} \int_{L'} \frac{g^*(t) dt}{t-x} = F^*(x) \quad (x \in L'),$$

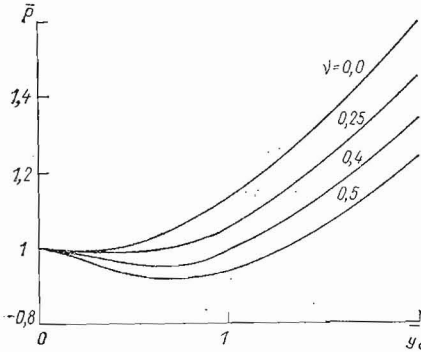
где

$$F^*(x) = \frac{2}{\pi} \int_L \frac{r(t) dt}{t-x} - Kp.$$

Функция $g_n^*(x) = g^*(x)$ ($x \in L_n$) описывает форму зазоров, так как из соотношений (8), (15) следует, что $g^*(x) \equiv 0$ ($x \in L^n$).

В качестве примера рассмотрим образование одной зоны нарушения прямого контакта тел вследствие приложения двух сил: $P_1 = -iP_{y1}$ в точке $z_{01} = iy_{01}$ и $P_2 = iP_{y2}$ в точке $z_{02} = iy_{02}$ ($z_{0k} \in S_k$; $y_{01}, P_{y1} \leq 0$; $y_{02}, P_{y2} \geq 0$). Полу плоскости сжаты на бесконечности усилием $\sigma_y^\infty = -p$, а берега зазоров свободны от напряжений. Вследствие симметрии положим $L_1 = [-a, a]$. Тогда решение (14) уравнения (11) запишется так:

$$g_1(x) = -x \sqrt{a^2 - x^2} \sum_{k=1,2} \frac{(-1)^k (1 + \kappa_k) e_k P_{yk}}{4\mu_k (a^2 + y_{0k}^2) \sqrt{x^2 + y_{0k}^2}} \times \left[(1 + \kappa_k) + \frac{4y_{0k}^2}{x^2 + y_{0k}^2} + \frac{2y_{0k}^2}{y_{0k}^2 + a^2} \right].$$



Условия (12), (13) приводят к соотношению, связывающему полу длину зазора a с величинами P_k, y_{0k} ($k = 1, 2$) и p :

$$Kp = 2 \sum_{k=1,2} \frac{(-1)^k (1 + \kappa_k) e_k P_{yk}}{2\mu_k \sqrt{y_{0k}^2 + a^2}} \times \left[(1 + \kappa_k) + \frac{2y_{0k}^2}{y_{0k}^2 + a^2} \right]. \quad (16)$$

Численные расчеты проводились для полу плоскостей из одинаковых материалов ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$; $\mu_1 = \mu_2$; $K_1 = K_2$), находящихся в состоянии плоской деформации. На тела действуют равные по величине силы $P_2 = -P_1 = P$, приложенные на одинаковом расстоянии $y_{02} = -y_{01} = y_0$ от границ тел. На рисунке представлена зависимость безразмерной силы $\bar{P} = 2P/(pa)$ от безразмерного расстояния $\bar{y}_0 = y_0/a$ при фиксированной длине зазора $2a$ и разных значениях коэффициента Пуассона ν . Для материалов, близких к несжимаемым, графики имеют локальные минимумы. Следовательно, для таких материалов силы, необходимые для образования зазора заданной длины, будут наименьшими, если они приложены на некотором расстоянии от границ.

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.— 708 с.
2. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1968.— 511 с.
3. Сулим Г. Т. Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений.— Прикл. механика, 1981, 17, № 11, с. 82—89.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 03.11.83

УДК 537.2

Б. П. Галапац, Р. А. Пеленский

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ ПРИ ТЕПЛОМ УДАРЕ НА КРАЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

При разработке средств для исследования нестационарных температурных режимов выдвинута проблема изучения кинетики перераспределения электрической системы устройства при температурных воздействиях. Если предметом исследований являются быстропотекающие температурные режимы, влиянием джоулева тепла, сопровождающего процесс перестройки, можно пренебречь. Тогда, согласно работе [1], аналитическое описание переходного