УДК 534.26

В. И. Демчук, В. Н. Максимович

# РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ТОНКОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКОЙ

Рассмотрим задачу о рассеянии звука круглой упругой тонкой пластинкой, помещенной в безграничную идеальную сжимаемую жидкую среду. Решение задачи строится с учетом изгибных и продольных колебаний пластинки в предположении, что на пластинку под произвольным углом падает плоская волна. Давление падающей под углом $\varphi^*$ к оси $OZ$ плоской волны в бесконечной жидкости представим в виде

$$P^i(r, z, \theta) = P_0 e^{-i\omega(r\cos\theta\sin\varphi^* + z\cos\varphi^* + \tau)}, \tag{1}$$

где $\omega$, $\tau$ — безразмерные круговая частота и время; $P_0$ — амплитуда падающей волны. Здесь введены отнесенные к радиусу пластинки цилиндрические координаты $r$, $z$, в которых плоскость $z = 0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки, а начало координат — с ее центром. Временной фактор $e^{-i\omega\tau}$ в дальнейшем будем опускать.

С целью упрощения выкладок разобьем падающее $P^i$ и рассеянное $P^e$ поля на симметричные $P^{i2}$, $P^{e2}$ и антисимметричные $P^{i1}$, $P^{e1}$ относительно плоскости $z = 0$ слагаемые соответственно. Рассеянное давление $P^e(r, z, \theta)$ в безграничной акустической среде определяется из волнового уравнения [3]

$$(\Delta + \omega^2) P^e(r, z, \theta) = 0, \tag{2}$$

где $\Delta$ — трехмерный оператор Лапласа.

Динамику изгибных (антисимметричных) нормальных смещений $w(r, z)$ пластинки описывает дифференциальное уравнение Тимошенко — Миндлина с учетом сдвиговой и вращательной инерции (характеризующее несколько первых асимметричных толщинных мод колебаний) [6]:

$$(\Delta_0^2 + \alpha_1\Delta_0 + \beta_1) w(r, \theta) = (\alpha_1^*\Delta_0 + \beta_1^*) P^1, \tag{3}$$

$$(\Delta_0 + k_1^2)\Phi(r, \theta) = 0, \tag{4}$$

где $P^1 = P^{i1} + P^{e1}$ — нормальный компонент внешней антисимметричной силы, приходящийся на единицу площади срединной поверхности; $\Phi$ — вспомогательная функция [4]; $\Delta_0$ — двухмерный оператор Лапласа; $\alpha_1$, $\alpha_1^*$, $\beta_1$, $\beta_1^*$, $k_1$ — известные постоянные [4, 6].

Уравнение движения пластинки для поперечных симметричных по толщине колебаний имеет вид [2]

$$(\Delta_0 + k_2^2) u(r, \theta) = (d + d^*\Delta_0) P^2. \tag{5}$$

Здесь $k_2$, $d$, $d^*$ — известные постоянные [2]; $P^2 = P^{i2} + P^{e2}$ — нормальный компонент внешней симметричной силы, приходящийся на единицу площади срединной поверхности.

Решения дифференциальных уравнений (2) — (5) находятся из условий, что на границе раздела жидкости и пластинки нормальные перемещения и напряжения непрерывны и край пластинки свободен от нагрузки. Учитывая симметрию относительно плоскости $\theta = 0$, неизвестные функции $P^{e1}$, $P^{e2}$, $w$, $u$, $\Phi$ представляем в виде рядов Фурье с неизвестными коэффициентами

$$(P^{e\nu}, w, u) = \sum_{n=0}^{\infty} (P_n^{e\nu}, w_n, u_n)\cos n\theta, \quad \nu = 1, 2. \tag{6}$$

Представим удовлетворяющее условию Зоммерфельда решение волнового уравнения (2) для симметричной и антисимметричной составляющих рассеянного давления в виде интеграла Гельмгольца — Гюйгенса

$$P^{e1} = -2\int_{\sigma_0} P^{e1}\Big|_{\sigma_0} \frac{\partial G}{\partial n_0} d\sigma_0, \tag{7}$$

$$P^{e2} = 2\int_{\sigma_0} \frac{\partial P^{e2}}{\partial n}\Big|_{\sigma_0} G d\sigma_0, \tag{8}$$

где $d\sigma_0$ — элемент площади в срединной плоскости пластинки; $G = (4\pi R^{*2})^{-1} \exp(-i\omega R^*)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца; $R^{*2} = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + (z - z_0)^2$ — расстояние между точкой наблюдения $(r, z, \theta)$ и точкой $(r_0, z_0, \theta_0)$ на поверхности $\sigma_0$; $\partial/\partial n$, $\partial/\partial n_0$ — производные по внешней нормали к поверхности $\sigma_0$ в точках $(r, z, \theta)$ и $(r_0, z_0, \theta_0)$ соответственно.

Запишем неизвестные рассеянные давления и нормальные производные от него на поверхности пластинки $\sigma_0$ в виде рядов

$$P_n^{e\nu} = \sum_{j=0}^{\infty} g_{nj}^{e\nu} J_n(\gamma_{jn} r), \quad \frac{\partial}{\partial z} P_n^{e2} = \sum_{j=0}^{\infty} g_{nj}^{*e2} J_n(\gamma_{jn} r), \quad \nu = 1, 2. \tag{9}$$

Здесь $\gamma_{jn}$ — нули производной функции Бесселя первого рода; $g_{jn}^{e\nu}$, $g_{nj}^{*e2}$ — неизвестные коэффициенты.

Подставив формулы (6), (9) в (7), (8) и выполнив интегрирование по $\sigma_0$, для составляющих рассеянного давления $P_n^{e\nu}$ получим такие выражения:

$$P_n^{e1} = -\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_n g_{nj}^{e1} J_n(\gamma_{jn}) \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 J_n'(\lambda) J_n(\lambda r)}{\gamma_{jn}^2 - \lambda^2} e^{-\varkappa z} d\lambda, \tag{10}$$

$$P_n^{e2} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_n g_{nj}^{*e2} J_n(\gamma_{jn}) \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 J_n'(\lambda) J_n(\lambda r)}{\varkappa(\gamma_{jn}^2 - \lambda^2)} e^{-\varkappa z} d\lambda, \tag{11}$$

где $\varkappa^2 = \lambda^2 - \omega^2$; $\varepsilon_0 = 2$; $\varepsilon_n = 1$; $n \geqslant 1$.
При выводе выражений (10), (11) использовано представление [5]

$$G = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\theta - \theta_0)] \int_0^{\infty} \frac{\lambda J_m(\lambda r_0) J_m(\lambda r)}{\varkappa} e^{-\varkappa|z - z_0|} d\lambda.$$

Общее решение уравнений (3) — (5) представим в виде

$$\begin{gathered} w_n(r) = -\frac{A_{1n}}{\gamma_1^2} J_n(\gamma_1 r) - \frac{A_{2n}}{\gamma_2^2} J_n(\gamma_2 r) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{3nj} - \alpha_1^*}{-\gamma_{jn}^2} g_{nj}^1 J_n(\gamma_{jn} r), \\ u_n(r) = d_{1n} J_n(k_2 r) + \sum_{j=0}^{\infty} d_{2nj} g_{nj}^2 J_n(\gamma_{jn} r), \\ \Phi_n(r) = \Phi_{1n} J_n(k_1 r), \end{gathered} \tag{12}$$

где $A_{1n}$, $A_{2n}$, $d_{1n}$, $\Phi_{1n}$ — неизвестные постоянные;

$$g_{nj}^{\nu} = g_{nj}^{e\nu} + g_{nj}^{i\nu}, \quad \nu = 1, 2; \quad \gamma_{1,2} = \frac{\sqrt{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1}}}{2};$$

$$A_{3nj} = \frac{\beta_2 - \gamma_{jn}^2 \alpha_2^*}{\gamma_{jn}^4 - \alpha_1 \gamma_{jn}^2 + \beta_1}; \quad d_{2jn} = \frac{d - \gamma_{jn}^2 d^*}{k_2^2 - \gamma_{jn}^2}; \quad \alpha_2^* = \beta_1^* + \alpha_1 \alpha_1^*; \quad \beta_2 = \beta_1 \alpha_1^*.$$

Из условия, что край пластинки свободен, для коэффициентов $A_{1n}$, $A_{2n}$, $d_{1n}$ получим такие выражения:

$$\begin{gathered} A_{\nu n} = \frac{b_{\nu n}^5 b_{3n}^6 - b_{\nu n}^6 b_{3n}^5}{\Delta^*} \sum_{j=0}^{\infty} b_{4nj} g_{nj}^1, \quad \nu = 1, 2, \\ d_{1n} = -\sum_{j=0}^{\infty} \left( d_{2nj} + \frac{\rho_0 h c_0^2}{E} \right) \frac{J_n(\gamma_{jn})}{J_n(k_2)} g_{jn}^2. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $\Delta^* = \det|b_{in}^l|$ $(i = 1, 2, 3;\ l = 4, 5, 6)$;

$$b_{\nu n}^4 = b_{\nu n}^1 + \nu_0 \left( S\gamma_\nu + \frac{1}{\gamma_\nu} \right) J_n'(\gamma_\nu) - n^2 \left( S - \frac{1}{\gamma_\nu^2} \right) J_n(\gamma_\nu);$$

$$b_{\nu n}^5 = n \left( S\gamma_\nu - \frac{1}{\gamma_\nu} \right) J_n'(\gamma_\nu); \quad b_{\nu n}^6 = \gamma_\nu J_n'(\gamma_\nu);$$

$$b_{\nu n}^{1}=\left[1-S\gamma_{\nu}^{2}+n^{2}\left(S-\frac{1}{\gamma_{\nu}^{2}}\right)\right]J_{n}(\gamma_{\nu})+\left(S\gamma_{\nu}-\frac{1}{\gamma_{\nu}}\right)J_{n}'(\gamma_{\nu}),\quad \nu=1,\ 2;$$

$$b_{3n}^{4}=-\frac{n(1-\nu_{0})}{2}k_{1}J_{n}'(k_{1});\quad b_{3n}^{5}=\frac{1}{2}\left[(k_{1}^{2}+2n^{2})J_{n}(k)-2k_{1}J_{n}'(k_{1})\right];$$

$$b_{3n}^{6}=-nJ_{n}(k_{1});$$

$$b_{4nj}=b_{3nj}-n^{2}\left(SA_{3nj}-\frac{A_{3nj}-\alpha_{1}^{*}}{\gamma_{jn}^{2}}\right)J_{n}(\gamma_{jn});$$

$$b_{3nj}=\left[A_{3nj}-S-S\gamma_{jn}^{2}A_{3nj}+n\left(SA_{3nj}-\frac{A_{3nj}-\alpha_{1}^{*}}{\gamma_{jn}^{2}}\right)\right]J_{n}(\gamma_{jn});$$

$$S=\frac{D}{k_{T}G_{0}h};\quad D=\frac{Eh^{3}}{12(1-\nu_{0}^{2})};$$

$c_0$, $\rho_0$ — скорость звука в жидкости и ее плотность; $\nu_0$, $E$, $G_0$, $\rho$, $h$ — коэффициент Пуассона, модуль Юнга, модуль сдвига, плотность, толщина пластинки соответственно; $k_T$ — численный коэффициент сдвига; $g_{nj}^{i\nu}$, $g_{nj}^{*i\nu}$ — известные коэффициенты рядов Фурье — Бесселя для падающей волны.

Подставив выражение (12) с учетом (13) в граничные условия, получим разрешающие алгебраические уравнения относительно неизвестных коэффициентов $g_{nj}^{e1}$ и $g_{nj}^{e2}$, $g_{nj}^{*e2}$ соответственно:

$$\sum_{j=0}^{\infty}G_{nj\mu}^{1}g_{nj}^{e1}=\sum_{j=0}^{\infty}G_{nj\mu}^{2}g_{nj}^{i1}-\frac{1}{\varepsilon_{n\mu}}g_{n\mu}^{*i1}. \tag{14}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}G_{nj\mu}^{3}(g_{nj}^{e2}+g_{nj}^{i2})=\frac{1}{\varepsilon_{n\mu}}(g_{nj}^{*e2}+g_{nj}^{*i2}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}G_{nj\mu}^{4}g_{nj}^{*e2}=\frac{1}{\varepsilon_{n\mu}}g_{nj}^{e2},\quad \mu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где

$$G_{nj\mu}^{1}=\varepsilon_{n}J_{n}(\gamma_{jn})J_{n}(\gamma_{n\mu})\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda\varkappa' J_{n}'^{2}(\lambda)}{(\gamma_{jn}^{2}-\lambda^{2})(\gamma_{\mu n}^{2}-\lambda^{2})}d\lambda+G_{nj\mu}^{2};$$

$$G_{nj\mu}^{2}=\frac{A_{3n\mu}-\alpha_{1}^{*}}{\gamma_{\mu n}^{2}\varepsilon_{n\mu}}\delta_{j\mu}+A_{1nj\mu}+A_{2nj\mu};\quad \varkappa'=\frac{\lambda^{2}(\omega^{2}-\gamma_{nj}-\gamma_{n\mu})+\gamma_{nj}\gamma_{n\mu}}{\varkappa};$$

$$A_{\nu nj\mu}=\frac{A_{\nu nj}}{\gamma_{\nu}^{2}}\,\frac{\gamma_{\nu}J_{n}'(\gamma_{\nu})J_{n}(\gamma_{\mu n})}{\gamma_{\nu}^{2}-\gamma_{\mu n}^{2}};\quad A_{\nu nj}=\frac{b_{\nu n}^{5}b_{3n}^{6}-b_{\nu n}^{6}b_{3n}^{5}}{\Delta^{*}}b_{4nj};$$

$$G_{nj\mu}^{3}=\left(d_{2nj}+\frac{h\rho_{0}c_{0}^{2}}{E}\right)\frac{J_{n}(\gamma_{jn})}{J_{n}(k_{2})}\,\frac{k_{2}J_{n}'(k_{2})J_{n}(\gamma_{\mu n})}{k_{2}^{2}-\gamma_{\mu n}^{2}}+\frac{d_{2n\mu}}{\varepsilon_{n\mu}}\delta_{j\mu};$$

$$G_{nj\mu}^{4}=\varepsilon_{n}J_{n}(\gamma_{jn})J_{n}(\gamma_{\mu n})\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{3}J_{n}'^{2}(\lambda)}{(\gamma_{jn}^{2}-\lambda^{2})(\gamma_{\mu n}^{2}-\lambda^{2})}d\lambda;$$

$$\varepsilon_{00}=2;\quad \varepsilon_{nj}=\frac{2\gamma_{jn}^{2}}{(\gamma_{jn}^{2}-n^{2})J_{n}^{2}(\gamma_{jn})};\quad n,\ j\geqslant 1;\quad \delta_{j\mu}=\begin{cases}1, & j=\mu,\\ 0, & j\neq\mu.\end{cases}$$

С использованием результатов работы [1] можно показать, что искомая функция $P_n^{e1}(r)$ имеет особенность при $r\to 1$ вида $(r-1)^{+\frac{1}{2}}$. Поэтому $g_{nj}^{e1}$ в полученной системе бесконечных уравнений (14) медленно стремится к нулю при $j\to\infty$, что затрудняет получение достаточно точного решения системы.

Применим метод выделения особенности в неизвестной функции, позволяющий получить более эффективное решение. Представим функцию

$P_n^{el}(r)$ в виде

$$P_n^{el}(r) = A_n r^n \sqrt{1-r^2} + h_n(r), \quad 0 < r < 1.$$

Здесь $A_n$ — неизвестная постоянная, определяемая из условия, что $h_n(r)$ — ограниченная величина. Функцию $P_n^{el}(r)$ представим в виде разложения

$$P_n^{el}(r) = A_n \sum_{j=0}^{\infty} P_{nj}^0 J_n(\gamma_{jn} r) + \sum_{j=0}^{\infty} h_{nj} J_n(\gamma_{jn} r), \tag{15}$$

где $h_{nj}$ — неизвестные коэффициенты; $P_{nj}^0 = \frac{\varepsilon_{nj}\Gamma(0,5)}{\sqrt{2\gamma_{jn}^3}} J_{n+\frac{3}{2}}(\gamma_{jn})$; $\Gamma(0, 5)$ — гамма-функция.

Подставляя выражение (15) в (14), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестные коэффициенты $h_{nj}$ стремятся к нулю быстрее, чем $g_{nj}^{el}$, поэтому для решения этой системы можно применить метод редукции.


1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев : Наук. думка, 1981.— 284 с.
2. *Лямшев Л. М.* Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости.— М. : Изд-во АН СССР, 1953.— 79 с.
3. *Пелех Б. Л.* Обобщенная теория оболочек.— Львов : Вища шк., 1978.— 159 с.
4. *Мэтсаввэр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов Я. С.* Дифракция акустических импульсов на упругих телах.— М. : Наука, 1979.— 226 с.
5. *Скучик Е.* Основы акустики.— М. : Мир, 1976.— Т. 2. 542 с.
6. *Stuart A. D.* Acoustic radiation from submerged plates. 1. Enfluence of leaky wave poles.— JASA, 1976, 59, N 5, p. 1160—1169.



Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов



Получено 12.10.83



УДК 539.3



М. М. Николишин


## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ

Рассмотрим упругое равновесие отнесенной к линиям кривизны $\alpha, \beta$ многослойной замкнутой цилиндрической оболочки с системой $k$ параллельных периодически расположенных сквозных разрезов $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $\beta = 2n\pi/k$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k/2$ при $k$ четном, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (k-1)/2$ при $k$ нечетном. Оболочка предполагается тонкой, допускающей применение гипотезы недеформируемых нормалей для пакета в целом [1]. Слои оболочки изотропные и расположены симметрично относительно срединной поверхности. Пусть напряженно-деформированное состояние оболочки без разрезов осесимметрично. В этом случае напряженное состояние оболочки с системой $k$ периодически расположенных разрезов будет циклически симметричным, что позволяет в дальнейшем исследовать цилиндрическую панель $|\beta| \leqslant \pi/k$ с разрезом $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $\beta = 0$.

Используя предложенный в работе [5] метод решения задач для оболочек с разрезами, систему дифференциальных уравнений в перемещениях для круговой многослойной цилиндрической оболочки записываем так:

$$L_{j1}u + L_{j2}v + L_{j3}w = q_j \quad (j = \overline{1, 3}). \tag{1}$$

Здесь

$$L_{11} = C_{11}\partial_1^2 + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\partial_2^2; \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})\partial_1\partial_2;$$

$$L_{13} = L_{31} = C_{12}\partial_1; \quad L_{22} = (C_{11} + R^{-2}D_{11})\partial_2^2 + \left[\frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) + \right.$$