УДК 536.12:539.377

В. М. Вигак, И. Л. Пирожак

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В настоящей работе рассматриваются постановка и решение задачи оптимального управления с помощью искомого распределения внутренних источников тепла температурными перемещениями полупространства в случае плоской задачи термоупругости.

Пусть полупространство нагревается на границе тепловым потоком

$$\lambda \frac{\partial T(y_1, 0)}{\partial z_1} = -q_*(y),$$

где λ — коэффициент теплопроводности. Требуется в определенном сечении $z_1 = z_1^0$ разместить источники (стоки) тепла $U_1(y_1)\,\delta(z_1 - z_1^0)$, обеспечивающие приближение вертикальных температурных перемещений $U_z(y_1, z_1)$, при $z_1 = z_1^*$ к заданным $\varphi(y_1)$ в смысле минимума квадратичного функционала

$$J = \int_0^\infty [U_z(y_1, z_1^*) - \varphi_1(y_1)]^2 dy_1 \; (0 \leqslant z_1^* < \infty). \tag{1}$$

Здесь $U_1(y_1)$ — искомое распределение источников тепла в плоскости $z_1 = z_0$ $(0 \leqslant z_1^0 < \infty)$ полупространства; $\delta(z_1 - z_1^0)$ — δ-функция Дирака.

Предлагая возможность достижения функционалом (1) точной нижней грани, условие минимума его заменяем равенством

$$U_z(y_1, z_1^*) = \varphi(y_1). \tag{2}$$

Стационарное температурное поле $T(y, z)$ для полупространства, описываемое задачей теплопроводности

$$\Delta T(y, z) - U(y)\,\delta(z - z_0) = 0,$$

$$U(y) = \frac{a^2}{\lambda} U_1(y),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial T(y, 0)}{\partial z} = -q(y), \quad q(y) = \frac{a}{\lambda} q_*(y),$$

$$\lim_{z \to 0} T(y, z) = 0,$$

с помощью интегрального преобразования Фурье [1], можно представить в виде

$$T(y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \frac{q(\eta)}{s} \exp(-sz) - \right.$$

$$\left. - \frac{U(\eta)}{2s} [\exp(-s(z + z_0)) + \exp(-s|z - z_0|)] \right\} \cos sy \cos s\eta ds d\eta, \tag{3}$$

где $y = \frac{y_1}{a}$; $z = \frac{z_1}{a}$; $z_0 = \frac{z_1^0}{a}$; $z_* = \frac{z_1^*}{a}$; a — некоторая нормирующая длина; функции $q(y)$ и $U(y)$ предполагаются симметричными относительно начала координат.

Для полупространства со свободной от силовой нагрузки граничной поверхностью найдем операторную зависимость температурных перемещений от температурного поля $T(y, z)$, которое обусловливает плоское деформированное состояние ($U_x = 0$). Изестно [2], что плоское деформированное состояние описывается с помощью двух функций — термоупругого потенциала перемещений $\Phi(y, z)$, удовлетворяющего уравнению

$$\Delta\Phi(y, z) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha a^2 T(y, z), \tag{4}$$

и бигармонической функции напряжений Эри $F(y, z)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 F(y, z) = 0, \tag{5}$$

где ν, α — коэффициенты Пуассона и температурного расширения.

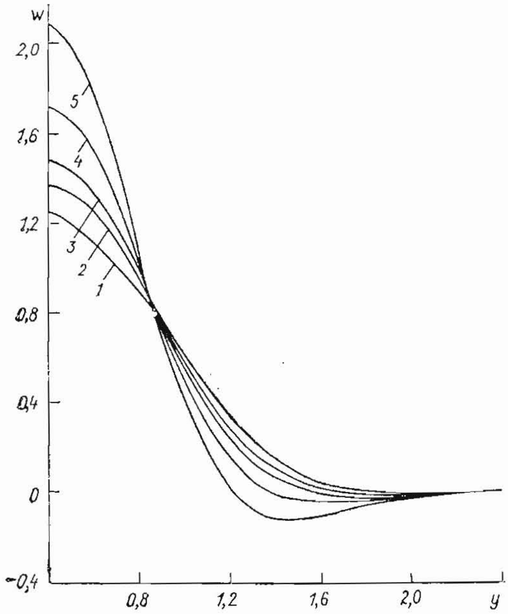

Рис. 1.

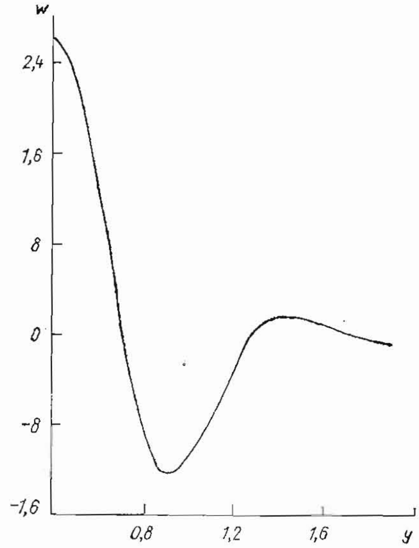

Рис. 2.

Решая уравнения (4), (5) при граничных условиях $\sigma_{zz}(y, 0) = \sigma_{yz}(y, 0) = 0$, с помощью интегрального преобразования Фурье для вертикальных температурных перемещений находим

$$U_z(y, z) = \frac{a\alpha(1+\nu)}{\pi(1-\nu)}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty T(\xi, \eta)\,[\exp(-s\,|\,z-\xi\,|\,\operatorname{sgn}(z-\xi) -$$
$$-(3-4\nu+2sz)\exp(-s(z+\xi))]\cos sy\cos s\eta\, ds\, d\eta\, d\xi.$$

Подставив найденные перемещения в условие (2) с учетом соотношений (3), найдем искомую функцию управления

$$U(y) = \frac{8(1-\nu)}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\exp sz_0}{\Delta(s)}\left[\frac{s^2\varphi(\eta)}{\alpha a(1+\nu)}\exp sz_* + q(\eta)\right]\cos s\eta\cos sy\, d\eta\, ds.$$

Здесь $\Delta s = 4(1-\nu) + sz_0(3-4\nu+2sz_*) + sz_* + s(z_0 - z_*)\exp(-s(|\,z_* - z_0\,| - z_* - z_0))$.

Отсюда как частный случай легко получить искомое распределение источников тепла

$$U(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q(\eta)\exp sz_0}{1+sz_0}\cos sy\cos s\eta\, ds\, d\eta, \tag{6}$$

обеспечивающих нулевые вертикальные перемещения $\varphi(y) = 0$ граничной поверхности $z_* = 0$.

Для распределения теплового потока по закону Гаусса $q_*(y_1) = q\exp(-\varepsilon y_1^2)$ из формулы (6) получаем

$$U_1(y) = \frac{q}{2a^2\sqrt{\pi\varepsilon}}\int_0^\infty \frac{\exp(sz_0 - s^2/4\varepsilon a^2)}{1+sz_0}\cos sy\, ds. \tag{7}$$

На рис. 1, 2 показана зависимость управления (7) от безразмерной координаты y при $\varepsilon a^2 = 0,5$, где ε — коэффициент сосредоточения теплового потока q_*, причем $W = \frac{U_*(y)}{q/2a^2(\pi\varepsilon)^{1/2}}$. Кривые *1—5* на рис. 1 приведены при удалении плоскости расположения внутренних источников от граничной поверхности на расстояние $z_0 = 0;\ 0,5;\ 0,7;\ 1,0;\ 1,2$ соответственно.

Из анализа формулы (7) и численных результатов следует, что нулевые вертикальные температурные перемещения границы полупространства можно обеспечить с помощью одного охлаждения стоками тепла (7) только при $z_0 = 0$, когда $U(y) = q(y)$, т. е. при $T(x, y) = 0$. При $z_0 > 0$ управление $U(y)$ наряду с положительным всегда имеет отрицательное значение. Последнее означает, что для обеспечения нулевых перемещений кроме охлаждения стоками тепла всегда потребуется некоторый подогрев с помощью источников, закон изменения которых описывается формулой (7).

При удалении плоскости расположения источников тепла от граничной поверхности z_0 управление (7) носит колебательный затухающий характер с резким увеличением максимальной амплитуды и частоты. Для иллюстрации последнего на рис. 2 показано управление (7) при $z_0 = 3$ и $\varepsilon a^2 = 0,5$. Следует отметить, что к такому же количественному эффекту приводит увеличение коэффициента εa^2 при неизменном z_0.

Проведенные исследования показывают, что при нагреве полупространства тепловым потоком по закону Гаусса практически обеспечить нулевые вертикальные температурные перемещения граничной поверхности с помощью одного охлаждения стоками тепла можно лишь при незначительном удалении плоскости расположения источников от границы z_0 либо при малом коэфициенте интенсивности теплового потока εa^2, либо, наконец, при малости обоих параметров.

1. *Снеддон И.* Преобразование Фурье.— М. : Изд-во иностр. лит., 1955.— 667 с.
2. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями.— М. : Физматгиз, 1958.— 167 с.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 11.05.83

УДК 539.377

В. А. Мищенко, А. П. Поддубняк

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ И КОРОТКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Пусть материальная точка X упругой среды за время t движется в состоянии $\bar{\chi}$ к точке x, причем это движение выражается зависимостью $x = x(X, t)$. Определим деформацию материальной среды как

$$e \equiv \frac{\partial x}{\partial X} - 1, \tag{1}$$

а уравнение состояния примем в виде

$$\sigma = \sigma(e, T, X), \tag{2}$$

где напряжение σ — нелинейная непрерывная и непрерывно дифференцируемая по e, T, X функция; T — температура.

Волновой процесс при отсутствии объемных сил описывается одномерным уравнением движения Коши

$$(\sigma')_t = \rho x^{\cdot\cdot}, \tag{3}$$

ρ — плотность материала упругой среды. Из уравнений (2), (3) имеем

$$\frac{\partial \sigma}{\partial e} e' + \frac{\partial \sigma}{\partial T} T' + (\sigma')_{t,e,T} = \rho x^{\cdot\cdot}. \tag{4}$$