3. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах.— Успехи физ. наук, 1970, **102**, вып. 4, с 549—586.
4. *Кнопфель Г.* Сверхсильные импульсные магнитные поля.— М. : Мир, 1972.— 391 с.
5. *Пелетмінський С. В.* Про об'ємні та поверхневі магнітопружні хвилі в металах.— Укр. фіз. журн., 1958, 3, вип. 5, с. 611—616.
6. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В.Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел.— Киев : Наук. думка, 1982.— 296 с.
7. *Полякова А. Л.* Нелинейные эффекты в твердых телах.— Физика твердого тела, 1964, вып. 1, с. 65—70.
8. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.— М. : Мир, 1975.— 592 с.
9. *Ersoy Y.* Propagation of waves in magnetothermoviscoelastic solids subjected to a uniform magnetic field.— In. J. Eng. Sci., 1981, **19**, N 1, p. 91—115.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 16.11.83

УДК 539.3

И. Ф. Образцов, Б. В. Нерубайло

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ЭФФЕКТАМИ ОТ СИЛОВЫХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

При решении различных задач термоупругости многосвязных тел и тел сложной конфигурации, термоупругости пластин и оболочек весьма полезным оказывается использование различного рода аналогий между напряженно-деформированными состояниями, порожденными силовыми и температурными полями [1, 3, 7, 8]. Например, для изотропной цилиндрической оболочки С. П. Тимошенко [8] установлена чрезвычайно наглядная связь между температурным воздействием и нормальным давлением в случае осесимметричной задачи. Здесь ограничимся установлением соотношений между частными интегралами дифференциальных уравнений при силовом и температурном воздействиях общего характера.

Для получения зависимостей математической аналогии запишем разрешающие уравнения общей теории упругих тонких физически ортотропных оболочек в случае воздействия компонентов силовой нагрузки и линейно изменяющегося по толщине оболочки температурного поля:

$$L\Phi_i(\alpha, \beta) = -R^4 D_1^{-1} p_i(\alpha, \beta) \quad (i = 1;\ 2),$$

$$L\Phi_3(\alpha, \beta) = R^4 D_1^{-1} p_3(\alpha, \beta),$$

$$L\Phi^*(\alpha, \beta) = (\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t})\, c^{-2} R t^*(\alpha, \beta),$$

$$L\Phi^{**}(\alpha, \beta) = -\frac{\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t}}{6c^2}\, h t^{**}(\alpha, \beta),$$

$$L = \frac{\partial^8}{\partial\alpha^8} + a_{6,2}\frac{\partial^8}{\partial\alpha^6\partial\beta^2} + 2\nu_2\frac{\partial^6}{\partial\alpha^6} + a_{4,4}\frac{\partial^8}{\partial\alpha^4\partial\beta^4} + a_{4,2}\frac{\partial^6}{\partial\alpha^4\partial\beta^2} +$$
$$+ \lambda\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + a_{2,6}\frac{\partial^8}{\partial\alpha^2\partial\beta^6} + a_{2,4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^4} + a_{2,2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} +$$
$$+ \lambda^2\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right)^2 + \frac{1 - \nu_1\nu_2}{c^2}\lambda\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$a_{6,2} = \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1; \quad a_{4,4} = 2\lambda\left[3 + \frac{\nu_1}{\mu_2}(1 - \nu_1\nu_2) - 4\nu_1(\nu_2 + \mu_1)\right];$$

$$a_{4,2} = a_{4,4}; \ a_{2,6} = \lambda a_{6,2}; \ a_{2,4} = 2\lambda(a_{6,2} - \nu_2); \ a_{2,2} = \lambda\left(\frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2\right);$$

$$\lambda = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}; \quad D_i = \frac{E_i h^3}{12(1 - \nu_1\nu_2)}; \quad \mu_i = \frac{G}{E_i}(1 - \nu_1\nu_2) \quad (i = 1;\ 2);$$

$$c^2 = \frac{h^2}{12R^2};$$

E_1, E_2 — модули упругости материала оболочки в направлении α и β соответственно; G — модуль сдвига ; ν_1 — коэффициент поперечного сжатия в направлении β при растяжении в направлении α; ν_2 — коэффициент поперечного сжатия в направлении α при растяжении в направлении β; α_{1t}, α_{2t} — коэффициенты линейного температурного расширения в направлении α и β соответственно; $t^*(\alpha, \beta)$ — температура срединной поверхности оболочки; $t^{**}(\alpha, \beta)$ — температура, характеризующая перепад температуры по толщине стенки: $2t^*(\alpha, \beta) = t_1(\alpha, \beta) + t_2(\alpha, \beta)$; $2t^{**}(\alpha, \beta) = t_2(\alpha; \beta) - t_1(\alpha, \beta)$, где $t_2(\alpha, \beta)$, $t_1(\alpha, \beta)$ — температура внутренней и наружной поверхностей оболочки; $p_1(\alpha, \beta)$, $p_2(\alpha, \beta)$, $p_3(\alpha, \beta)$ — продольная, окружная и радиальная нагрузки.

Перемещения, усилия, изгибающие моменты и другие факторы выражаются через соответствующую разрешающую функцию в зависимости от направления нагрузки или вида температурного воздействия [2,5].

Пусть имеет место совпадение законов изменения силовых нагрузок и температурных полей: $p(\alpha, \beta) = p_0\chi(\alpha, \beta)$, $t(\alpha, \beta) = t_0\chi(\alpha, \beta)$.

Тогда после очевидных преобразований находим связь между разрешающими функциями термоупругой и силовой задач, а затем получаем прямые дифференциальные зависимости между искомыми факторами термоупругой и силовой задач. Запишем их отдельно для температурного поля $t^*(\alpha, \beta)$:

$$u^*(\alpha, \beta) = -\left[\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}u^{(1)}(\alpha, \beta) + \lambda\frac{\partial}{\partial\beta}u^{(2)}(\alpha, \beta) + \lambda u^{(3)}(\alpha, \beta)\right]f^*_{pt},$$

$$v^*(\alpha, \beta) = -\left[\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}v^{(1)}(\alpha, \beta) + \lambda\frac{\partial}{\partial\beta}v^{(2)}(\alpha, \beta) + \lambda v^{(3)}(\alpha, \beta)\right]f^*_{pt},$$

$$w^*(\alpha, \beta) = -\left[\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}w^{(1)}(\alpha, \beta) + \lambda\frac{\partial}{\partial\beta}w^{(2)}(\alpha, \beta) + \lambda w^{(3)}(\alpha, \beta)\right]f^*_{pt},$$

$$T^*_i(\alpha, \beta) = -\left[\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}T^{(1)}_i(\alpha, \beta) + \lambda\frac{\partial}{\partial\beta}T^{(2)}_i(\alpha, \beta) + \lambda T^{(3)}_i(\alpha, \beta)\right]f^*_{pt} - T_{it}(\alpha, \beta),$$

$$S^*_i(\alpha, \beta) = -\left[\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}S^{(1)}_i(\alpha, \beta) + \lambda\frac{\partial}{\partial\beta}S^{(2)}_i(\alpha, \beta) + \lambda S^{(3)}_i(\alpha, \beta)\right]f^*_{pt},$$

$$G^*_i(\alpha, \beta) = -\left[\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}G^{(1)}_i(\alpha, \beta) + \lambda\frac{\partial}{\partial\beta}G^{(2)}_i(\alpha, \beta) + \lambda G^{(3)}_i(\alpha, \beta)\right]f^*_{pt}$$

и температурного поля $t^{**}(\alpha, \beta)$:

$$u^{**}(\alpha, \beta) = \left[\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}u^{(2)}(\alpha, \beta) - \left(\theta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \lambda\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)u^{(3)}(\alpha, \beta)\right]f^{**}_{pt},$$

$$v^{**}(\alpha, \beta) = \left[\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}v^{(2)}(\alpha, \beta) - \left(\theta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \lambda\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)v^{(3)}(\alpha, \beta)\right]f^{**}_{pt},$$

$$w^{**}(\alpha, \beta) = \left[\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}w^{(2)}(\alpha, \beta) - \left(\theta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \lambda\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)w^{(3)}(\alpha, \beta)\right]f^{**}_{pt},$$

$$T^{**}_i(\alpha, \beta) = \left[\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}T^{(2)}_i(\alpha, \beta) - \left(\theta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \tau\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)T^{(3)}_i(\alpha, \beta)\right]f^{**}_{pt},$$

$$S^{**}_i(\alpha, \beta) = \left[\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}S^{(2)}_i(\alpha, \beta) - \left(\theta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \lambda\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)S^{(3)}_i(\alpha, \beta)\right]f^{**}_{pt},$$

$$G^{**}_i(\alpha, \beta) = \left[\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}G^{(2)}_i(\alpha, \beta) - \left(\theta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \lambda\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)G^{(3)}_i(\alpha, \beta)\right]f^{**}_{pt} - G_{it}(\alpha, \beta).$$

В этих соотношениях и дальше индексы в скобках обозначают, что тот или иной фактор возникает в оболочке при действии продольной (1), окружной (2) или радиальной (3) нагрузок. Кроме того, введены следующие новые обозначения:

$$T_{1t}(\alpha, \beta) = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1\nu_2}(\alpha_{1t} + \nu_2\alpha_{2t})\,t^*(\alpha, \beta),$$

$$T_{2t}(\alpha,\ t)=\frac{E_2h}{1-\nu_1\nu_2}(\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t})\,t^*(\alpha,\ \beta),$$

$$G_{1t}(\alpha,\beta)=\frac{2}{h}D_1(\alpha_{1t}+\nu_2\alpha_{2t})\,t^{**}(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha_{1t}+\nu_2\alpha_{2t})E_1}{1-\nu_1\nu_2}\frac{h^2}{6}t^{**}(\alpha,\ \beta),$$

$$G_{2t}(\alpha,\beta)=\frac{2}{h}D_2(\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t})\,t^{**}(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t})E_2}{1-\nu_1\nu_2}\frac{h^2}{6}t^{**}(\alpha,\ \beta),$$

$$\theta=\frac{\alpha_{1t}+\nu_2\alpha_{2t}}{\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t}},\quad f^*_{pt}=\frac{(\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t})\,t_0^*}{(1-\nu_1\nu_2)\,p_0}\frac{E_1h}{R},$$

$$f^{**}_{pt}=\frac{(\alpha_{2t}+\nu_1\alpha_{1t})\,t_0^{**}E_1}{6(1-\nu_1\nu_2)\,p_0}\left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

Записанные соотношения формально установленной математической аналогии позволяют выразить частные решения для всех искомых факторов термоупругой задачи через соответствующие факторы при силовом нагружении оболочки.

При использовании уравнений типа Власова — Доннелла записанные выше соотношения полностью сохраняются, а приближенных уравнений полубезмоментной теории, теории краевого эффекта, изгибного или тангенциального состояний — претерпевают соответствующие упрощения.

В полубезмоментной теории соотношения математической аналогии приобретают весьма простой вид:

для температурного поля $t^*(\alpha,\ \beta)$

$$u^*(\alpha,\ \beta)=-\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}u^{(1)}(\alpha,\ \beta)\,f^*_{pt},\quad T_1^*(\alpha,\ \beta)=$$

$$=-\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}T_1^{(1)}(\alpha,\ \beta)\,f^*_{pt}-T_{1t}(\alpha,\ \beta),$$

$$G_2^*(\alpha,\ \beta)=-\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}G_2^{(1)}(\alpha,\ \beta)\,f^*_{pt},$$

а для температурного поля $t^{**}(\alpha,\ \beta)$

$$u^{**}(\alpha,\ \beta)=-\lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)u^{(3)}(\alpha,\ \beta)\,f^{**}_{pt},$$

$$T_1^{**}(\alpha,\beta)=-\lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)T_1^{(3)}(\alpha,\ \beta)\,f^{**}_{pt},$$

$$G_2^{**}(\alpha,\ \beta)=-\lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)G_2^{(3)}(\alpha,\ \beta)\,f^{**}_{pt}-G_{2t}(\alpha,\ \beta).$$

Для тангенциального и изгибного состояний, являющихся аналогами плоской задачи теории упругости и задачи изгиба пластинки, получаем

$$u^*(\alpha,\ \beta)=-\left[\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}u^{(1)}(\alpha,\ \beta)+\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}u^{(2)}(\alpha,\ \beta)\right]f^*_{pt},$$

$$v^*(\alpha,\ \beta)=-\left[\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}v^{(1)}(\alpha,\ \beta)+\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}v^{(2)}(\alpha,\ \beta)\right]f^*_{pt},$$

$$T_i^*(\alpha,\ \beta)=-\left[\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}T_i^{(1)}(\alpha,\ \beta)+\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}T_i^{(2)}(\alpha,\ \beta)\right]f^*_{pt}-T_{it}(\alpha,\ \beta),$$

$$S^*(\alpha,\ \beta)=-\left[\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}S^{(1)}(\alpha,\ \beta)+\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}S^{(2)}(\alpha,\ \beta)\right]f^*_{pt},$$

$$w^{**}(\alpha,\ \beta)=-\left(\theta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\lambda\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)w^{(3)}(\alpha,\ \beta)\,f^*_{pt},$$

$$G_i^{**}(\alpha,\ \beta)=-\left(\theta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\lambda\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)G_i^{(3)}(\alpha,\ \beta)\,f^{**}_{pt}-G_{it}(\alpha,\ \beta).$$

Таким образом, записаны соотношения математической аналогии, устанавливающие прямую дифференциальную связь между эффектами от силового и температурного воздействий на физически ортотропные цилиндрические оболочки. Они позволяют достаточно просто найти частные решения при любом температурном поле, если имеются решения соответствующих силовых задач. Наиболее эффективного применения установленных соотношений можно ожидать при построении напряженно-деформированного состояния оболочек на основе приближенных уравнений, например полубезмоментной теории, теории краевого эффекта, тангенциального и изгибного состояний [4—6], особенно при рассмотрении задач о локализованных воздействиях и задач для оболочек с неоднородной структурой (наличие, например, дискретных макровключений).

1. *Власов В. З.* Пологие оболочки. Действие гидростатической нагрузки и температуры. Математические аналогии.— Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. № 10, 1951.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек.— Гостехиздат, М. : 1953.— 544 с.
3. *Майзель В. М.* Температурная задача термоупругости.— Киев : Изд-во АН УССР, 1951.— 152 с.
4. *Нерубайло Б. В.* Применение асимптотического метода в задачах термоупругости цилиндрических оболочек.— Прикл. механика, 1979, **15**, № 3, с. 36—45.
5. *Нерубайло Б. В.* Ортотропная цилиндрическая оболочка при действии локальной нагрузки.— Там же, № 6, с. 40—48.
6. *Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В.* О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек.— Докл. АН СССР, 1983, **269**, № 1, с. 54—56.
7. *Подстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурные напряжения в оболочках.— Киев : Изд-во АН УССР, 1961.— 212 с.
8. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки.— М. : Физматгиз, 1963.— 635 с.

Моск. авиац. ин-т Получено 07.12.83

УДК 539:375:534.1

Г. С. Кит, О. В. Побережный

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ТЕЛЕ С РАЗРЕЗАМИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В данной статье рассмотрена динамическая задача для пространства с разрезами при антиплоской деформации. Соответствующая краевая задача методом теории потенциала сведена к системам сингулярных интегродифференциальных уравнений. Найдены перемещения и коэффициенты интенсивности напряжений для прямолинейной трещины.

Рассмотрим упругое изотропное пространство, содержащее N полосовидных вдоль оси z разрезов L_i $(i = \overline{1, N})$. Предположим, что тело с разрезами находится в условии антиплоской деформации. В этом случае единственным отличным от нуля перемещением будет W, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $c_2^2 = \mu/\rho$; μ, ρ — модуль сдвига и плотность материала среды; $W(x, y, t)$ — перемещение вдоль оси z. Не исчезающие в этом случае компоненты тензора напряжений определяются соотношением

$$\sigma_{nz} = \mu\frac{\partial W}{\partial n}, \quad (x, y) \in L. \tag{2}$$

Здесь n — нормаль к контуру L $(\bigcup L_i)$. Относительно контуров L_i предполагаем, что они являются разомкнутыми кривыми Ляпунова. Знаками «+» и «—» обозначаем значение соответствующих величин слева и справа от контура L.

Для определения перемещений W имеем граничные условия

$$(\sigma_{nz}^i)^+ = -(\sigma_{nz}^i)^- = \sigma_{nz}^i. \tag{3}$$

Решение поставленной задачи построим следующим образом. Применяя к соотношениям (1)—(3) интегральное преобразование Лапласа — Карсона,