В общем случае, если $A(x)$ имеет вид (5), то матрица

$$T \doteq \left\| \begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
E_{n_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & E_{n_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & E_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
0 & E_{n_2} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & E_{n_2} & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & E_{n_2} & \ldots & 0 \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
0 & 0 & \ldots & E_{n_p} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & E_{n_p} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & E_{n_p}
\end{array} \right\|$$

приводит к желаемому результату.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.— К. : Наук. думка, 1981.— 224 с.
3. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев : Наук. думка, 1976, с. 29—40.
4. *Казимирский П. С., Петричкович В. М.* Разложимость полиномиальных матриц на линейные множители.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 3—9.
5. *Петков М.* Върху две квадратни матрични уравнения.— Физ.-мат. описание, 1975, 18, № 2, с. 126—127.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 28.09.83

УДК 512.552.12

Б. В. Забавский

ФАКТОРИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОММУТАТИВНОЙ ОБЛАСТИ БЕЗУ

Пусть R — коммутативная область с единичным элементом.

Предложение 1 [1]. Каждый неглавный идеал кольца содержится хотя бы в одном максимальном элементе множества всех неглавных идеалов кольца R.

Определение 1. Идеал N кольца R называется максимально неглавным, если N является максимальным элементом множества всех неглавных идеалов кольца R.

Предложение 2. Всякий максимально неглавный идеал является простым идеалом кольца R.

Следствие 1. Для всякого максимально неглавного идеала N фактор-кольцо R/N является коммутативной областью главных идеалов.

Теорема 1. Кольцо R является нетеровым, если выполняются следующие условия: 1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M^n = 0$ для всякого максимального идеала M, 2) всякий максимальный идеал является главным.

Доказательство. Если кольцо R не нетерово, то на основании предложения 1 в R существует хотя бы один максимально неглавный идеал N. Тогда $N \subset mR$, где mR — максимальный идеал. Пусть $a \in N$ и $a \neq 0$, тогда $a = ma_1$. Аналогично $a_1 = ma_2$ и т. д. Значит $a \in m^n R$ для всякого натурального n. Отсюда $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} m^n R$. Так как $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} m^n R = 0$, то $a = 0$, что невозможно. Как следствие получаем хорошо известный результат.

Следствие 2. Пусть R — локальное кольцо с максимальным идеалом M, тогда R — нетерово кольцо, если выполняются условия: 1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M^n = 0$, 2) M — главный идеал R.

Определение 2. Элемент a, $a \neq 0$, называется факториальным, если его можно однозначно представить как конечное произведение простых элементов R с точностью до обратимых множителей.

Предложение 3. Всякий элемент R, который не содержится в никаком максимально неглавном идеале, является факториальным элементом.

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент, который не содержится в никаком максимально неглавном идеале. Обозначим через S множество всех идеалов, которые содержат a. В силу определения S имеем, что всякий идеал из S является главным. Очевидно, что S — модулярная структура. Если элемент a необратим, то он содержится в некотором максимальном главном идеале m_1R кольца R. Отсюда $a = m_1a_1$. Рассмотрим элемент a_1. Если он необратим, то $a_1 = m_2a_2$, где m_2 порождает максимальный идеал кольца R. Продолжая этот процесс, получаем цепь идеалов вида $aR \subseteq a_1R \subseteq a_2R \subseteq \ldots$

Пусть $K = \bigcup\limits_i a_iR$. Очевидно, что $K \in S$. Тогда данная цепь идеалов является цепью в S, причем все ее факторы простые, т. е. это ряд Жордано — Гельдера. Тогда $a = m_1m_2\ldots m_k$, где m_i — простые элементы кольца R. На основании теоремы Шрейера для модулярных структур это разложение однозначно, т. е. a — факториальный элемент.

Пусть R — коммутативная область Безу с единичным элементом.

Предложение 4. Всякие два максимально неглавные идеала R являются попарно взаимно простыми.

Доказательство. Пусть K, H — произвольные максимально неглавные идеалы кольца R. Выберем элементы a и b таким образом, что $a \in K \setminus H$, $b \in H \setminus K$. Так как R — область Безу, то $aR + bR = dR$, значит, существуют такие $u \in R$, $v \in R$, что $au + bv = d$, $a = a'd$, $b = b'd$. Очевидно, что $d \notin K$, $d \notin H$. Тогда $a' \notin K$, $b' \notin H$, так как K и H являются простыми идеалами, и $a'u + b'v = 1$, откуда $K + H = R$.

Обозначим через $N(R)$ пересечение всех максимальных неглавных идеалов кольца R.

Предложение 5. Пусть K — идеал кольца R такой, что для всякого элемента $a \in K$ и всякого факториального элемента $f \in R$ элемент $f + a$ является факториальным элементом, тогда $K \subseteq N(R)$.

Доказательство. Пусть элемент $a \in K$ такой, что для него не справедливо утверждение данного предложения, т. е. существует такой максимально неглавный идеал N, что $a \notin N$. Тогда $N + aR = fR$, где f — некоторый факториальный элемент кольца R. Отсюда получаем, что существуют такие $n \in N$, $s \in R$, что $n + as = f$. На основании определения K элемент $n = f - as$ является факториальным, что невозможно в силу предложения 3 работы [1].

1. *Забавский Б. В.* О максимальных элементах множества неглавных идеалов коммутативной области Безу.— В кн.: XVII Всесоюз. алгебр. конф. (Минск, сент. 1983 г.) : Тез. докл. Минск, 1983, ч. II, с. 75.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 05.10.83