**Теорема 4.** Если для ветвящейся цепной дроби (1) выполняются условия (7) и $\beta_{i_1 \ldots i_k} \geqslant 0$, $g_0\beta_0 + y_0 > 0$, $y_{i_1 \ldots i_k} \geqslant 0$ $(i_k = \overline{1, N}, \ k = \overline{1, p})$, то

$$\operatorname{Im}(A_p/B_p) \leqslant 0, \quad |A_p/B_p| \leqslant (g_0\beta_0 + y_0)^{-1}.$$

В работе [1] рассмотрены примеры положительно определенных ветвящихся цепных дробей и установлены их признаки сходимости. Результаты, изложенные в настоящей статье, являются многомерным обобщением известных результатов, установленных для цепных дробей [3].


1. *Боднар Д. И.* Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 8, с. 3—7.
2. *Крупка З. И., Шмойлов В. И.* О параллельном вычислении алгоритмов, представленных ветвящимися цепными дробями.— Многопроцессорные вычисл. структуры, 1980, вып. 2, с. 78—90.
3. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions.— New York : D. Van Nostrand company, 1948.— 433 p.



Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов



Получено 08.06.83



УДК 512.8



**Д. М. Билонога, В. Р. Зелиско**


## О ЛИНЕАРИЗАЦИИ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть $A(x)$ — неособенная полиномиальная $n \times n$-матрица с элементами из $\mathbb{C}[x]$, которую запишем в виде матричного многочлена

$$A(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_l x^l. \qquad (1)$$

Через $E_{l-1}$ обозначим прямую сумму $l-1$ единичных матриц $E$ $n$-го порядка. Известно, например, что числовая $ln \times ln$-матрица $T$ называется линеаризацией матричного многочлена (1), если существуют матрицы $G(x)$, $F(x) \in GL(ln, \mathbb{C}[x])$ такие, что

$$A(x) \oplus E_{l-1} = G(x)(E_l x - T) F(x). \qquad (2)$$

Там же доказано, что каждый регулярный ($\det A_l \neq 0$) матричный многочлен имеет линеаризацию. Примером линеаризации регулярного матричного многочлена вида (1) является матрица

$$C_A = \begin{Vmatrix} 0 & E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E \\ -\bar{A}_0 & -\bar{A}_1 & -\bar{A}_2 & \ldots & -\bar{A}_{l-2} & -\bar{A}_{l-1} \end{Vmatrix}, \qquad (3)$$

где $\bar{A}_i = A_l^{-1} A_i$, $i = 0, 1, \ldots, l-1$. Исследуем вопрос о том, как связаны между собой линеаризации эквивалентных и полускалярно эквивалентных регулярных полиномиальных матриц.

Если $D(x)$ — форма Смита матричного многочлена $A(x)$ [1], т. е. $D(x) = P(x) A(x) Q(x)$, где $P(x)$, $Q(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$, то формой Смита характеристической матрицы $E_l x - T$ линеаризации $T$ матричного многочлена $A(x)$, как легко проверить, является матрица $\operatorname{diag}(\overbrace{E, \ldots, E, D(x)}^{l})$, причем соответствующие преобразующие матрицы имеют вид

$$\bar{P}(x) = R \operatorname{diag}(P(x), \overbrace{E, \ \ldots, \ E}^{l-1}) G(x),$$

$$\bar{Q}(x) = F(x) \operatorname{diag}(Q(x), \overbrace{E, \ \ldots, \ E}^{l-1}) R.$$

Здесь

$$R = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & E \\ \vdots & E_{l-2} & \vdots \\ E & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

На этом основании, используя результаты работ [3, 4], получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** Если произвольная линеаризация регулярного матричного многочлена (1) (например, вида (3)) является матрицей простой структуры или алгебраическая кратность ее собственных значений не превышает двух, то матричный многочлен $A(x)$ разлагается в произведение линейных множителей.

Отметим, что как следствие из теоремы 1 получается результат работы [5].

Пусть теперь унитальный ($A_l = E$) матричный многочлен $A(x)$ полускалярно эквивалентными преобразованиями приводится к треугольной форме с инвариантными множителями по диагонали [2]:

$$CA(x)\,Q(x) = D_1(x) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \varepsilon_n(x) \end{Vmatrix}.$$

Совершив над блоками матрицы $E_l x - C_A$ полускалярно эквивалентные преобразования, можно показать, что

$$\overline{C}(E_l x - C_A)\,\overline{Q}(x) = \begin{Vmatrix} E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & E & 0 \\ Ex & Ex^2 & & Ex^{l-1} & D_1(x) \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

где $\overline{C}$, $\overline{Q}(x)$ — обратимые над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}[x]$ матрицы порядка $nl$, причем последнюю блочную строку матрицы, стоящей в правой части равенства (4), можно упростить, учтя вид матрицы $D_1(x)$.

**Теорема 2.** Для того чтобы линеаризации двух регулярных матричных многочленов одной степени были подобны, необходимо и достаточно, чтобы эти матричные многочлены были эквивалентны.

*Доказательство. Необходимость.* Пусть $L_A$, $L_B$ — линеаризации регулярных матричных многочленов одной степени $A(x)$ и $B(x)$ соответственно, причем $L_A = PL_BP^{-1}$ для некоторой неособенной матрицы $P$. Из подобия $L_A$ и $L_B$ следует [1] скалярная эквивалентность характеристических матриц, т. е. $E_l x - L_B = S(E_l x - L_A)R$. Но поскольку

$$E_l x - L_A = F_1(x)(A(x) \oplus E_{l-1})\,G_1(x),$$
$$E_l x - L_B = F_2(x)(B(x) \oplus E_{l-1})\,G_2(x),$$

то

$$B(x) \oplus E_{l-1} = F_2^{-1}(x)\,SF_1(x)(A(x) \oplus E_{l-1})\,G_1(x)\,RG_2^{-1}(x)$$

и матрицы $A(x) \oplus E_{l-1}$, $B(x) \oplus E_{l-1}$, а следовательно, $A(x)$ и $B(x)$ эквивалентны.

*Достаточность.* Доказательство проводится обратным путем, т. е. из эквивалентности матричных многочленов $A(x)$ и $B(x)$ следует эквивалентность $A(x) \oplus E_{l-1}$ и $B(x) \oplus E_{l-1}$, затем получается эквивалентность матриц $E_l x - L_A$ и $E_l x - L_B$, а тем самым и подобие $L_A$ и $L_B$.

На основании теоремы 2 с учетом вида (3) матрицы $C_A$ легко получить следующий результат.

**Теорема 3.** Для того чтобы эквивалентные регулярные матричные многочлены $A(x)$ и $B(x)$ одной степени $l$ были подобны, необходимо и достаточно, чтобы среди преобразующих матриц $P$, для которых $C_A = PC_BP^{-1}$, существовала матрица $\overline{P} = \mathrm{diag}\,(\overbrace{P_1, \ldots, P_1}^{l})$, причем $A(x) = P_1B(x)P_1^{-1}$.

Пусть регулярный матричный многочлен $A(x)$ представим в виде прямой суммы блоков

$$A(x) = A_1(x) \oplus \cdots \oplus A_p(x), \tag{5}$$

где $A_i(x)$ — квадратные матрицы порядка $n_i$.

**Теорема 4.** Линеаризация вида (3) матричного многочлена (5) ортогонально подобна прямой сумме линеаризаций $C_{A_i}$ соответствующих блоков, т. е. $C_A = T\,(C_{A_1} \oplus \ldots \oplus C_{A_p})\,T^{-1}$, где $T$ — ортогональная матрица.

Доказательство. Ограничимся сначала случаем, когда регулярный матричный многочлен $A(x)$ представляется в виде $A(x) = B(x) \oplus C(x)$, где $B(x)$ и $C(x)$ — регулярные матричные многочлены степени $l$. Тогда

$$C_A = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & E_{n_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n_2} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & E_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E_{n_2} \\ -\overline{B}_0 & 0 & -\overline{B}_1 & 0 & \ldots & -\overline{B}_{l-1} & 0 \\ 0 & -\overline{C}_0 & 0 & -\overline{C}_1 & \ldots & 0 & -\overline{C}_{l-1} \end{matrix} \right\|.$$

Рассмотрим ортогональную матрицу вида

$$T = \left\| \begin{matrix} E_{n_1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & E_{n_1} & 0 \\ 0 & E_{n_2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n_2} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E_{n_2} \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} l \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} l \end{matrix}.$$

Умножение $T$ на матрицу $C_A$ приводит к переписыванию $C_A$ так, что сначала записываются все нечетные блочные строки в порядке следования, а потом — — четные. Аналогично, умножив $C_A$ на $T^{-1}$, получим матрицу, в которой сначала стоят нечетные блочные столбцы матрицы $C_A$ в порядке следования, потом — четные. Таким образом,

$$TC_AT^{-1} = \left\| \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & E_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & E_{n_1} \\ -\overline{B}_0 & -\overline{B}_1 & -\overline{B}_2 & \ldots & -\overline{B}_{l-1} \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & E_{n_2} & 0 & \ldots & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & E_{n_2} \\ -\overline{C}_0 & -\overline{C}_1 & -\overline{C}_2 & \ldots & -\overline{C}_{l-1} \end{matrix} \end{matrix} \right\| =$$

$$= C_B \oplus C_C.$$

В общем случае, если $A(x)$ имеет вид (5), то матрица

$$T = \left\| \begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
E_{n_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & E_{n_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & E_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
0 & E_{n_2} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & E_{n_2} & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & E_{n_2} & \ldots & 0 \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
0 & 0 & \ldots & E_{n_p} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & E_{n_p} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & E_{n_p}
\end{array} \right\|$$

приводит к желаемому результату.


1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.— К. : Наук. думка, 1981.— 224 с.
3. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев : Наук. думка, 1976, с. 29—40.
4. *Казимирский П. С., Петричкович В. М.* Разложимость полиномиальных матриц на линейные множители.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 3—9.
5. *Петков М.* Върху две квадратни матрични уравнения.— Физ.-мат. описание, 1975, 18, № 2, с. 126—127.



Ин-т прикл. пробл. механики и
математики АН УССР, Львов



Получено 28.09.83



УДК 512.552.12



Б. В. Забавский


## ФАКТОРИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОММУТАТИВНОЙ ОБЛАСТИ БЕЗУ

Пусть $R$ — коммутативная область с единичным элементом.

**Предложение 1** [1]. Каждый неглавный идеал кольца содержится хотя бы в одном максимальном элементе множества всех неглавных идеалов кольца $R$.

**Определение 1.** Идеал $N$ кольца $R$ называется максимально неглавным, если $N$ является максимальным элементом множества всех неглавных идеалов кольца $R$.

**Предложение 2.** Всякий максимально неглавный идеал является простым идеалом кольца $R$.

**Следствие 1.** Для всякого максимально неглавного идеала $N$ фактор-кольцо $R/N$ является коммутативной областью главных идеалов.

**Теорема 1.** Кольцо $R$ является нетеровым, если выполняются следующие условия: 1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M^n = 0$ для всякого максимального идеала $M$, 2) всякий максимальный идеал является главным.

Доказательство. Если кольцо $R$ не нетерово, то на основании предложения 1 в $R$ существует хотя бы один максимально неглавный идеал $N$. Тогда $N \subset mR$, где $mR$ — максимальный идеал. Пусть $a \in N$ и $a \neq 0$, тогда $a = ma_1$. Аналогично $a_1 = ma_2$ и т. д. Значит $a \in m^nR$ для всякого