УДК 517.948

И. М. Ковальчик

ИНТЕГРАЛЫ ОТ ВАРИАЦИЙ И ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО ГАУССОВЫМ МЕРАМ В ПРОИЗВЕДЕНИИ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\mathbb{R}_m$ — m-мерное эвклидово пространство, $C_m = C_m(Q_m)$ — пространство непрерывных действительных функций, определенных на m-мерном кубе $Q_m = \{t = (t_1, \ldots, t_m),\ 0 \leqslant t_i \leqslant 1,\ i = \overline{1, m}\}$ и исчезающих на гранях $t_i = 0$ $(i = \overline{1, m})$ куба, $C_m^p = \underbrace{C_m \times \ldots \times C_m}_{p}$ и $\mathfrak{A}_k$ $(k = \overline{1, p})$ — борелевские поля подмножеств каждого из пространств C_m. Предположим, что на $\mathfrak{A}_k$ задана гауссова мера μ_k со средним значением, равным нулю, и непрерывной на Q_{2m} корреляционной функцией $\mathcal{K}_k : Q_{2m} \to \mathbb{R}_1$ $(k = \overline{1, p})$. Пусть далее, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in C_m^p$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_p$ и $\mu = \mu_1 \times \ldots \times \mu_p$ — произведение гауссовых мер.

Теорема 1. Пусть $a_k(\mathbf{t}) = \int\limits_{Q_m} \mathcal{K}_k(\mathbf{t}, \mathbf{s})\, dg(\mathbf{s})$ $(k = \overline{1, p})$, где $g_k : Q_m \to \mathbb{R}_1$ $(k = \overline{1, p})$ — функции ограниченной вариации на Q_m, а $f : C_m^p \to \mathbb{R}_1$ — $\mathfrak{A}$-измеримый и μ-интегрируемый функционал, обладающий полным дифференциалом в смысле Гато $\delta f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$, таким, что частные дифференциалы удовлетворяют условию $\forall\, k = \overline{1, p}\ \forall\, \delta > 0$,

а
$$\sup_{|\varepsilon_k| < \delta} |\delta_{x_k} f(x_1, \ldots, x_k + \varepsilon_k a_k, \ldots, x_p;\ a_k)|$$

μ-интегрируем. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_{C_m^p} \delta f(\mathbf{x}, \mathbf{a})\, \mu(d\mathbf{x}) = \int\limits_{C_m^p} f(\mathbf{x}) \left(\sum_{k=1}^{p} \int\limits_{Q_m} x_k(\mathbf{t})\, dg_k(\mathbf{t}) \right) \mu(d\mathbf{x}). \tag{1}$$

При доказательстве существенно используются два следующих утверждения.

Лемма 1. Пусть функционал $f(\mathbf{x}, \lambda)$, зависящий от вектор-функции $\mathbf{x} \in C_m^p$ и параметра $\lambda \in [a, b]$, μ-интегрируем по $\mathbf{x}$ $\forall\, \lambda \in [a, b]$, обладает производной $\frac{\partial f(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda}$ $\forall\, \mathbf{x} \in C_m^p$ $\forall\, \lambda \in [a, b]$ и такой, что $\sup\limits_{\lambda \in [a, b]} \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} \right|$ μ-интегрируем. Тогда справедлива формула

$$\frac{d}{d\lambda} \int\limits_{C_m^p} f(\mathbf{x}, \lambda)\, \mu(d\mathbf{x}) = \int\limits_{C_m^p} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda}\, \mu(d\mathbf{x}).$$

Доказательство очевидно из оценки

$$\left| \frac{f(\mathbf{x}, \lambda + \Delta\lambda) - f(x, \lambda)}{\Delta\lambda} \right| = \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}, \lambda + \Theta\Delta\lambda)}{\partial \lambda} \right| \leqslant \sup_{\lambda \in [a, b]} \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} \right| \quad (0 < \Theta < 1)$$

и предположения леммы.

Лемма 2. Пусть $f : C_m^p \to \mathbb{R}_1$ — $\mathfrak{A}$-измеримый и μ-интегрируемый функционал, $a_k(\mathbf{t}) = \int\limits_{Q_m} \mathcal{K}_k(\mathbf{t}, \mathbf{s})\, dg_k(\mathbf{s})$, $g_k : Q_m \to \mathbb{R}_1$ $(k = \overline{1, p})$ — функции ограниченной вариации на Q_m. Тогда

$$\int\limits_{C_m^p} f(\mathbf{x})\, \mu(d\mathbf{x}) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{Q_m} a_k(\mathbf{t})\, dg_k(t) \right\} \times$$

$$\times \int\limits_{C_m^p} f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{p} \int\limits_{Q_m} x_k(\mathbf{t})\, dg_k(\mathbf{t}) \right\} \mu(d\mathbf{x}). \tag{2}$$

Доказательство этой формулы может быть получено заменой исходного преобразования аналогичным преобразованием в конечномерном пространстве с обоснованием предельного перехода. Такой подход хорошо известен, поэтому соответствующих выкладок проводить не будем.

При $m = p = 1$ методами теории случайных процессов формула (2) установлена в работе [3].

Теперь уже просто получается равенство (1). Действительно, перепишем формулу (2) в виде

$$\int\limits_{C_m^p} f(x_1 + \varepsilon_1 a_1, \ \ldots, \ x_p + \varepsilon_p a_p)\, \mu(d\mathbf{x}) =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k^2 \int\limits_{Q_{2m}} \mathcal{K}_k(\mathbf{t}, \mathbf{s})\, dg_k(\mathbf{t})\, dg_k(\mathbf{s})\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{C_m^p} f(\mathbf{x}) \exp\left\{\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k \int\limits_{Q_m} x_k(\mathbf{t})\, dg_k(\mathbf{t})\right\} \mu(d\mathbf{x}).$$

Зафиксируем некоторое ε_k и положим $\varepsilon_i = 0$ при $i \neq k$ $(i, k = \overline{1, p})$. Продифференцируем полученные p равенств по ε_k $(k = \overline{1, p})$, а затем сложим. Тогда

$$\int\limits_{C_m^p} \left\{\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f(x_1, \ \ldots, \ x_{k-1}, \ x_k + \varepsilon_k a_k, \ x_{k+1}, \ \ldots, \ x_p)}{\partial \varepsilon_k}\bigg|_{\varepsilon_k = 0} -\right.$$

$$\left. - f(\mathbf{x}) \left(\sum_{k=1}^{p} \int\limits_{Q_m} x_k(\mathbf{t})\, dg_k(\mathbf{t})\right)\right\} \mu(d\mathbf{x}) = 0.$$

Отсюда вытекает формула (1), так как первое слагаемое под знаком интеграла есть полный дифференциал по Гато функционала f. Возможность дифференцирования по параметру ε_k под знаком континуального интеграла следует из леммы 1.

При $m = p = 1$ формула (1) впервые установлена Л. А. Яновичем (см. монографию [4]). Из формулы (1) вытекает соотношение между интегралом по мере μ и частными функциональными производными.

Теорема 2. Пусть:

1) функционал $f : C_m^p \to \mathbb{R}_1$ удовлетворяет условиям теоремы 1,

2) $\max\limits_{\mathbf{t} \in Q_m} | x_k(\mathbf{t}) f(\boldsymbol{x}) |$ $(k = \overline{1, p})$ — $\mathfrak{A}$-измеримые и μ-интегрируемые функционалы,

3) функционал $f : C_m^p \to \mathbb{R}_1$ обладает частными функциональными производными $\dfrac{\delta f(\mathbf{x})}{\delta x_k(t)}$, которые измеримы на $C_m^p \times Q_m$, интегрируемы на Q_m по $\mathbf{t}$ при фиксированных x_k $(k = \overline{1, p})$ и μ-интегрируемы по $\mathbf{x} \in C_m^p$. Тогда почти для всех $\mathbf{t} \in Q_m$

$$\int\limits_{Q_m} \mathcal{K}_k(\mathbf{t}, \mathbf{s})\, d\mathbf{s} \int\limits_{C_m^p} \frac{\delta f(\mathbf{x})}{\delta x_k(\mathbf{s})} \mu(d\mathbf{x}) = \int\limits_{C_m^p} f(\mathbf{x})\, x_k(\mathbf{t})\, \mu(d\mathbf{x}) \quad (k = \overline{1, p}). \tag{3}$$

Доказательство. В формуле (1) подставим вместо $a_k(\mathbf{t})$ их выражения, дифференциал функционала $\delta f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ выразим через частные функциональные производные и сделаем элементарные преобразования, воспользовавшись, в частности, симметрией корреляционных функций

$\mathcal{K}_k(\mathbf{t}, \mathbf{s})$ $(k = \overline{1, p})$. Тогда получим

$$\int\limits_{C_m^p} \left\{ \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{Q_m} \frac{\delta f(\mathbf{x})}{\delta x_k(\mathbf{s})} \left(\int\limits_{Q_m} \mathcal{K}_k(\mathbf{t}, \mathbf{s})\, dg_k(\mathbf{t}) \right) d\mathbf{s} \right\} \mu(d\mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{C_m^p} f(\mathbf{x}) \left(\int\limits_{Q_m} x_k(\mathbf{t})\, dg_k(\mathbf{t}) \right) \mu(d\mathbf{x}).$$

На основании теоремы Фубини

$$\sum_{k=1}^{p} \int\limits_{Q_m} \left\{ \int\limits_{Q_m} \mathcal{K}_k(\mathbf{t}, \mathbf{s})\, d\mathbf{s} \int\limits_{C_m^p} \frac{\delta f(\mathbf{x})}{\delta x_k(\mathbf{s})} \mu(d\mathbf{x}) - \int\limits_{C_m^p} f(\mathbf{x})\, x_k(\mathbf{t})\, \mu(d\mathbf{x}) \right\} dg_k(\mathbf{t}) = 0.$$

В силу произвольности функций $g_k(\mathbf{t})$ $(k = \overline{1, p})$ почти для всех $\mathbf{t} \in Q_m$ имеем

$$\int\limits_{Q_m} \mathcal{K}_k(\mathbf{t}, \mathbf{s})\, d\mathbf{s} \int\limits_{C_m^p} \frac{\delta f(\mathbf{x})}{\delta x_k(\mathbf{s})} \mu(d\mathbf{x}) = \int\limits_{C_m^p} f(\mathbf{x})\, x_k(\mathbf{t})\, \mu(d\mathbf{x}).$$

Теорема 2 доказана.

Следует отметить, что при $m = p = 1$ формулы типа (1), (3) выведены в работе [4] для вариаций и производных n-го порядка в локально выпуклых линейных топологических пространствах. Воспользовавшись методикой, разработанной в работе [4], можно обобщить формулы (1), (3) на случай дифференциалов и функциональных производных n-го порядка.

Пусть μ_k $(k = \overline{1, p})$ — обобщенные меры Винера в пространстве C_m в смысле Китагава — Ченцова [2]. Тогда формула (3) принимает вид

$$\frac{1}{2} \int\limits_{Q_m} \prod_{k=1}^{m} \min(t_k, s_k)\, ds_1, \ \ldots \ ds_m \int\limits_{C_m^p} \frac{\delta f(\mathbf{x})}{\delta x_k(\mathbf{s})} W(d\mathbf{x}) = \int\limits_{C_m^p} f(\mathbf{x})\, x_k(\mathbf{t})\, W(d\mathbf{x}).$$

После применения к обеим частям этого равенства оператора $\dfrac{\partial^{2m}}{\partial t_1^2 \ldots \partial t_m^2}$ получим равенство

$$\int\limits_{C_m^p} \frac{\delta f(\mathbf{x})}{\delta x_k(\mathbf{s})} W(d\mathbf{x}) = 2 \cdot (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial t_1^2 \ldots \partial t_m^2} \int\limits_{C_m^p} f(\mathbf{x})\, x_k(\mathbf{t})\, W(d\mathbf{x}) \quad (k = \overline{1, p}). \tag{4}$$

Если положить в соотношении (4) $m = 2$, то получим формулу (4.2) из работы [1].

1. *Ковальчик И. М.* Формулы преобразования обобщенной меры Винера в пространстве непрерывных вектор-функций двух переменных и их приложения.— Львов, 1981.— 72 с. (Препринт / АН УССР. Физ.-мех. ин-т; № 53).
2. *Ченцов Н. Н.* Винеровские случайные поля от нескольких параметров.— Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 4, с. 607—609.
3. *Шаташвили А. Д.* Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих гауссовским процессам при линейных преобразованиях.— Тр. вычисл. центра АН ГССР, 1963, 3, с. 241—263.
4. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.— Минск : Наука и техника, 1976.— 384 с.

Львов. политехн. ин-т — Получено 11.10.83