УДК 517.98

О. М. Голубчак[1], А. В. Загороднюк[2*]

ТОПОЛОГІЧНІ ТА АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ НА МНОЖИНІ МУЛЬТИМНОЖИН

Показано, що множину скінченних мультимножин можна ототожнити з простором симетричних поліномів на лінійному просторі скінченних послідовностей, поповнення якого у відповідній метриці дає топологізацію множини мультимножин як підпростору простору симетричних аналітичних функцій на ℓ_1. *Однією з можливих топологізацій є топологія гільбертового простору. Розглянуто деякі алгебраїчні операції на множині мультимножин, зокрема аналоги дробових відображень.*

Ключові слова: *мультимножини, симетричні поліноми, простори симетричних аналітичних функцій.*

Вступ і попередні відомості. Нагадаємо, що функцію f з комплексного простору ℓ_1 в поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ називають *симетричною*, якщо для кожної підстановки σ на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$

$$f(\sigma(x)) = f\big(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)},\ldots\big) = f(x), \quad x = (x_1,\ldots,x_n,\ldots) \in \ell_1 .$$

Алгебру всіх неперервних симетричних поліномів на ℓ_1 позначимо через $P_s(\ell_1)$. Симетричні поліноми та аналітичні функції від нескінченної кількості змінних досліджено у роботах [1, 2, 4, 7]. Нагадаємо, що послідовність поліномів називають алгебраїчним базисом в алгебрі $P_s(\ell_1)$, якщо вона є алгебраїчно незалежною і породжує цю алгебру. Використаємо декілька стандартних базисів, які відомі з комбінаторики.

Степеневий базис складається з поліномів (див. [7])

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n , \qquad x = (x_1,\ldots,x_n,\ldots) \in \ell_1 .$$

Елементарні симетричні поліноми $G_n(x) = \sum x_{i_1}\ldots x_{i_n}$ утворюють інший базис в $P_s(\ell_1)$ і пов'язані з поліномами F_n відомою формулою Ньютона

$$nG_n = G_{n-1}F_1 - G_{n-2}F_2 + \ldots + (-1)^n F_n .$$

Також існує повний базис симетричних функцій H_n, які визначаютьсяі рівністю

$$nH_n = H_{n-1}F_1 + H_{n-2}F_2 + \ldots + H_1F_{n-1} + F_n .$$

У цій роботі розглянемо зображення множин у просторі симетричних поліномів на ℓ_1 і природні топологізації цієї множини. Подібні питання, пов'язані з симетричними поліномами на $L_\infty[0,1]$, розглядались у [9]. Також дослідимо деякі алгебраїчні операції на множині мультимножин і побудуємо аналоги дробових відображень.

1. Зображення множини скінченних мультимножин у просторі поліномів. Нехай M_0 – множина всіх скінченних мультимножин. Це означає, що кожен елемент $u \in M_0$ можна подати у вигляді $u = \{a^m, b^n, c^k, \ldots\}$, де

[*] azagorodn@gmail.com

$a, b, c, \ldots$ – ненульові комплексні числа, $m, n, k, \ldots$ – кількість повторень $a, b, c, \ldots$ в u відповідно.

Нехай c_{00} – лінійний простір усіх скінченних послідовностей $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Задамо таке відношення еквівалентності: $x \sim y$, x, $y \in c_{00}$, якщо існує підстановка $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ така, що

$$\sigma(x) = \left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots\right) = y.$$

Нехай $c_{00/\sim}$ – фактор-множина відносно цього відношення еквівалентності. Очевидно, що тотожнє відображення

$$I : \{a^m, b^n, c^k, \ldots\} \mapsto \left(\underbrace{a \ldots a}_{m}, \underbrace{b \ldots b}_{n}, \underbrace{c \ldots c}_{k}, \ldots, 0, \ldots, 0, \ldots\right)$$

є бієкцією між M_0 та $c_{00/\sim}$.

Зазначимо, що M_0 – комутативна напівгрупа відносно операції об'єднання: $uv = u \bigcup v$, $u, v \in M_0$. Будемо казати, що поліноми $p(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ є нормованими, якщо $a_n = 1$ і $a_0 \neq 0$. Множина всіх нормованих поліномів $P_N(\mathbb{C})$ утворює комутативну напівгрупу відносно множення.

Твердження 1. *Нехай* $\mathbb{P} = \{P_n\}$ *– алгебраїчний базис в алгебрі* $P_s(c_{00})$ *симетричних поліномів на* c_{00}. *Тоді відображення* $\tau_{\mathbb{P}} : c_{00/\sim} \to P_N(\mathbb{C})$ *таке, що*

$$\tau_{\mathbb{P}} : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots) \mapsto t^n - P_n(x)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n P_1(x),$$

є бієкцією, а якщо $P_n = G_n$, *то* $\tau_{\mathbb{G}} \circ I$ *є ізоморфізмом напівгруп* M_0 *і* $P_N(\mathbb{C})$.

Д о в е д е н н я. З теореми Вієта випливає, що кожен нормований поліном p має вигляд $p(t) = t^n - G_n(x)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n G_1(x)$, де $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_k \neq 0$ для будь-якого k, і $\{x_1, \ldots, x_n\} \in M_0$ є множиною нулів полінома p. Отже, відображення $\tau_{\mathbb{G}} \circ I$ є сюр'єктивним на $P_N(\mathbb{C})$. Навпаки, якщо $u = \{x_1, \ldots, x_n\} \in M_0$, $x = I(u) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$, то $\tau_{\mathbb{G}} \circ I(x) \in P_N(\mathbb{C})$. Отже, $\tau_{\mathbb{G}} \circ I$ є ін'єктивним. Якщо p і q належать до $P_N(\mathbb{C})$, u є мультимножиною нулів p і v є мультимножиною нулів q, тоді $u \bigcup v$ є мультимножиною нулів pq. Таким чином, $\tau_{\mathbb{G}} \circ I$ є ізоморфізмом напівгруп. Нехай тепер $\mathbb{P} = \{P_n\}$ є довільним однорідним алгебраїчним базисом в $P_s(c_{00})$. Тоді існує поліноміальний автоморфізм $\Phi_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ такий, що

$$\left(P_1(x), \ldots, P_n(x)\right) = \left(\Phi_n(G_1(x)), \ldots, \Phi_n(G_n(x))\right),$$

$\Phi(G_1) = aG_1$ для деяких $a \neq 0$, $p = t^n - P_n(x)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n P_1(x) \in P_N(\mathbb{C})$ для всіх $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in M_0$ (див. [8]). Тому відображення $p \mapsto t^n - G_n(x)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n G_1(x)$ є бієкцією. Твердження доведено. ♦

Нехай $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис n-однорідних симетричних поліномів на c_{00} і $\overline{\mathbb{P}}$ є множиною $\{(P_n(x))_{n=1}^{\infty}, x \in c_{00}\}$. Зауважимо, що, якщо d – деяка метрика на c_{00}, то в загальному випадку її не можна продовжити до метрики ρ на $c_{00/\sim}$ такої, що $\rho([x],[y]) = d(x, y)$, де $[x] = \{z \in c_{00} : z \sim x\}$. Проте на

$\overline{\mathbb{P}}$ існує інша природна метрика. Нехай $u = (u_n)_{n=1}^{\infty} = (P_n(x))_{n=1}^{\infty}$ і $v = (v_n)_{n=1}^{\infty} = (P_n(y))_{n=1}^{\infty}$. Означимо

$$\rho(u,v) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n - v_n|^{1/n}.$$

Твердження 2. *Функція* $\rho(u,v)$ *є метрикою на* $\overline{\mathbb{P}}$.

Д о в е д е н н я. З означення ρ випливає, що

$$\rho(u-v,0) = \rho(u,v).$$

Достатньо перевірити нерівність трикутника. Оскільки

$$|u_n + v_n|^{1/n} \le (|u_n| + |v_n|)^{1/n} \le |u_n|^{1/n} + |v_n|^{1/n},$$

отримаємо нерівності

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n + v_n|^{1/n} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} (|u_n| + |v_n|)^{1/n} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^{1/n} + \sup_{j\in\mathbb{N}} |v_j|^{1/j}$$

і

$$\rho(u+v,0) \le \rho(u,0) + \rho(v,0).$$

Для завершення доведення необхідно замінити u на $u-w$ і v на $w-v$. Твердження доведено. ♦

2. Зображення множини мультимножин у просторах аналітичних функцій. Нехай $\mathcal{F}$ – деякий топологічний векторний простір функцій, заданих на $c_{00/\sim}$, такий, що функціонал $\delta_u : f \mapsto f(u)$ є неперервним для кожного $u \in c_{00/\sim}$. Тоді $c_{00/\sim}$ можна ототожнити з підмножиною лінійних неперервних функцій на $\mathcal{F}$ і, отже, розглянути природну топологізацію простору $c_{00/\sim}$ і його поповнення (якщо топологія метризовна).

Розглянемо простір $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ поліномів на c_{00} вигляду $Q(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n P_n(x)$, де $P_n \in \mathbb{P}$, $P_0 = 1$. Очевидно, що $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ є лінійним підпростором і функції δ_x, $\delta_x(Q) = Q(x)$ є лінійними функціоналами на цьому просторі.

Розглянемо на c_{00} таку нормовану топологію, відносно якої всі поліноми з $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ є неперервними. Така топологія існує, зокрема, це топологія, породжена нормою $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ простору ℓ_1. Справді, оскільки поліноми P_n є симетричними, то їх можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів F_n, які є визначеними і неперервними на ℓ_1.

Нехай $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ – поповнення простору $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ відносно топології рівномірної збіжності на обмежених множинах ℓ_1, тобто $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ є простором Фреше, породженим послідовністю норм $\|f\| = \sup_{\|x\|\le r} |f(x)|$, $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, де $\mathbb{Q}$ – поле раціональних чисел. Таким чином, множина скінченних мультимножин вкладається у множину лінійних неперервних функціоналів $\mathcal{H}'_{\mathbb{P}}$ простору $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$.

Теорема 1. *Припустимо, що* $\|P_n\|_{\ell_1} = \sup_{\|x\|_{\ell_1}\le 1} |P_n(x)| = 1$. *Тоді простір* $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ *є ізоморфним до простору всіх цілих функцій* $H(\mathbb{C})$ *на* $\mathbb{C}$, *а простір* $\mathcal{H}'_{\mathbb{P}}$ *є ізоморфний до простору функцій експоненціального типу на* $\mathbb{C}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $f(x) = \sum a_n P_n(x) \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}}$. Тоді $f(x)$ є цілою функцією на ℓ_1 і радіус обмеженості ρ_0 цієї функції є нескінченним. З іншого боку, відомо (див. [6]), що

$$\rho_0(f) = \left(\limsup_{n\to\infty} \|a_n P_n\|^{1/n}\right)^{-1} = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1}.$$

Таким чином, $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ тоді й тільки тоді, коли $g(t) = \sum a_n t^n \in H(\mathbb{C})$. Відображення $f \mapsto g$ є ізоморфізмом просторів $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ та $H(\mathbb{C})$. Добре відомо, що $H'(\mathbb{C})$ ізоморфний до простору функцій експоненціального типу. Теорему доведено. ♦

Простір $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ можемо поповнити відносно деякої гільбертової норми. Скалярний добуток на $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ означимо формулою $\langle P_k, P_m\rangle = \delta_{k,m}$, де $\delta_{k,m}$ – символ Кронекера. Через $E_{\mathbb{P}}$ позначимо гільбертів простір, який є поповненням $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$ відносно норми, породженої цим скалярним добутком.

Теорема 2. *Припустимо, що* $\left(\limsup_{n\to\infty} \|P_n\|_{\ell_1}^{1/n}\right)^{-1} = r > 0$. *Тоді для кожного* $x \in \ell_1$ *такого, що* $\|x\|_{\ell_1} < r$, *лінійний функціонал, що визначається на* $\mathbb{P}$ *формулою* $\delta_x(P) = P(x)$, *є визначеним і неперервним на просторі* $E_{\mathbb{P}}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\|x\|_{\ell_1} < r$. Згідно з умовою теореми, для будь-якої послідовності $(a_n) \in \ell_2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x)$ збігається, тобто функціонал δ_x визначено на всіх елементах $\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x) \in E_{\mathbb{P}}$. Крім того, оскільки для $x \in \ell_1$ таких, що $\|x\|_{\ell_1} < r$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ абсолютно збігається, то послідовність $(P_n(x))_{n=1}^{\infty}$ належить до простору ℓ_1 і, зокрема, ця послідовність належить до простору ℓ_2. Тому

$$\left|\sum a_n P_n(x)\right|^2 \le \sum |a_n|^2 \sum |P_n(x)|^2 < \infty.$$

Теорему доведено. ♦

► ***Приклад.*** Розглянемо простір $E_{\mathbb{P}}$ для випадку $\mathbb{P} = \{G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots\}$. З [5] відомо, що $\|G_n\|_{\ell_1} = \dfrac{1}{n!}$. Тому поліноми $P_n = G_n$ задовольняють умови теореми при $r = \infty$. Розглянемо такі елементи $x^n \in \ell_1$:

$$x^n = (\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{n-1,n}, 0, \ldots),$$

де $\alpha_{0,n}, \ldots, \alpha_{n-1,n}$ – корені n-го степеня з одиниці. З теореми Вієта і властивостей коренів з одиниці випливає, що $G_k(x^n) = 0$ при $k < n$ і $G_n(x^n) = (-1)^{n+1}$. Крім того, $G_k(x^n) = 0$ для $k > n$ за означенням G_k. Отже, елементи $\{(-1)^{n+1} G_n\}$ і функціонали $\{\delta_{x^n}\}$ утворюють біортогональні послідовності. Іншими словами,

$$\langle G_n, G_n \rangle = (-1)^{n+1}\delta_{x^n}(G_n) = 1$$

і для кожного $f \in E_{\mathbb{P}}$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n$,

$$\langle f, G_n \rangle = (-1)^{n+1} f(x^n) = (-1)^{n+1} a_n .$$

Враховуючи, що, згідно з теоремою 2, функціонал δ_x є неперервним на гільбертовому просторі $E_{\mathbb{P}}$ для кожного $x \in \ell_1$, то δ_x можемо подати у вигляді $\delta_x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{x^n}$, де $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, при цьому $c_n = (-1)^{n+1} G_n(x)$. ◀

3. Алгебраїчні операції на множині мультимножин. У [3, 5] були введені такі операції на ℓ_1:

$$x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2), \qquad x \lozenge y = (x_i y_j)_{i,j=1}^{\infty} .$$

Легко перевірити, що $F_k(x \bullet y) = F_k(x) + F_k(y)$ і $F_k(x \lozenge y) = F_k(x) F_k(y)$, $x, y \in \ell_1$.

Нехай $\mathbb{I} = (1, 0, \ldots) \in \ell_1$. Очевидно, що $F_k(x \bullet 0) = F_k(x)$ і $F_k(x \lozenge \mathbb{I}) = F_k(x)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $x \in \ell_1$.

У [5] доведено, що, якщо $x \neq 0$, то не існує $y \in \ell_1$ такого, що $F_k(x \bullet y) = 0$ для всіх k. Також доведено, що $F_k(x \lozenge y) = 1$ для будь-якого k тоді й тільки тоді, коли $x = \lambda \mathbb{I}$ і $y = \frac{1}{\lambda} \mathbb{I}$ для деяких $\lambda \neq 0$.

Більше того, в [5] показано, що алгебраїчний гомоморфізм $A : P_s(\ell_1) \to P_s(\ell_1)$ вигляду $A(F_k) = a_k F_k$ є неперервним у топології рівномірної збіжності на обмежених множинах ℓ_1 тоді й тільки тоді, коли $a_k = \varphi(F_k)$ для деяких неперервних комплексних гомоморфізмів φ. Зокрема, гомоморфізм $F_k \mapsto -F_k$, $k = 1, 2, \ldots$, є розривним.

Нехай $H_{bs}(\ell_1)$ є поповненням простору на $P_s(\ell_1)$ в топології рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Покажемо, що для будь-якого $x \in \ell_1$, $\|x\| < 1$, існує $h \in \ell_1$ такий, що $F_k(h) = \frac{1}{1 - F_k(x)}$, і гомоморфізм в алгебру симетричних аналітичних функцій в кулі простору ℓ_1 з центром у нулі і радіуса 1, який повністю визначається відображенням $F_k \mapsto \frac{1}{1 - F_k}$, є неперервним.

Позначимо $\bullet_{n=1}^{m} u_n \bullet \ldots \bullet u_n$ і $\lozenge_{n=1}^{m} u_n = u_1 \lozenge \ldots \lozenge u_m$, $u_n \in \ell_1$. Якщо існує границя $\lim_{m \to \infty} \bullet_{n=1}^{m} u_n$ в ℓ_1, то позначимо її $\bullet_{n=1}^{\infty} u_n$. Також використаємо позначення $x^{\lozenge n} = \underbrace{x \lozenge \ldots \lozenge x}_{n}$.

Теорема 3. *Нехай* $x \in \ell_1$, $\|x\| < 1$. *Тоді* $x = \bullet_{n=0}^{\infty} x^{\lozenge n} \in \ell_1$, *де* $x^{\lozenge 0} = (1, 0, 0, \ldots)$, *і*

1°) *відображення* $x \mapsto \bullet_{n=0}^{\infty} x^{\lozenge n}$ *є аналітичним на кулі* B_1 *з центром в нулі і радіуса* 1 *і обмеженим на довільній кулі з центром в нулі і радіуса, меншого від* 1;

2°) *для будь-якого* m

$$F_m(\bullet_{n=1}^{\infty} x^{\Diamond n}) = \frac{1}{1 - F_m(x)}, \qquad \|x\| < 1.$$

Д о в е д е н н я. З [5] маємо нерівності

$$\|x \bullet y\| \le \|x\| + \|y\|, \qquad \|x \Diamond y\| \le \|x\|\|y\|.$$

Отже,

$$\left\|\bullet_{n=1}^{\infty} x^{\Diamond n}\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1 - \|x\|} < \infty.$$

Більше того, якщо $\|x\| \le r < 1$, то $\left\|\bullet_{n=1}^{\infty} x^{\Diamond n}\right\| \le \frac{1}{1 - r} < \infty$. Отже,

$$F_m(\bullet_{n=1}^{\infty} x^{\Diamond n}) = \sum_{n=0}^{\infty} F_m(x^{\Diamond n}) = \sum_{n=0}^{\infty} (F_m(x))^n = \frac{1}{1 - F_m(x)} < \infty.$$

Тому $\|F_m(x)\| < 1$, якщо $\|x\| < 1$. Теорему доведено. ♦

У загальному випадку, повторюючи міркування теореми 1, отримаємо, що для будь-якого числа c, $\|c\| \le 1/r$, відображення

$$x \mapsto \bullet_{n=k}^{\infty} (cx)^{\Diamond n} \tag{1}$$

є аналітичним відображенням кулі B_r з центром у нулі і радіуса r і для будь-якого натурального m

$$F_m(\bullet_{n=k}^{\infty} (cx)^{\Diamond n}) = \frac{c^{mk} F_m^k(x)}{1 - c^m F_m(x)}.$$

Таким чином, відображення вигляду (1) можна розглядати як дробові відображення на множині мультимножин.

1. *Голубчак О. М.* Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 // Карпат. мат. публікації. – 2011. – **3**, № 1. – С. 34–39. http://journals.pu.if.ua/index.php/cmp/article/view/49/41.
2. *Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. London Math. Soc. – 2003. – **35**, No. 1. – P. 55–64. – https://doi.org/10.1112/S0024609302001431.
3. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // Rev. Mat. Complut. – 2014. – **27**, No. 2. – P. 575–585. – https://doi.org/10.1007/s13163-013-0128-0.
4. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2012. – **55**, No. 1. – P. 125–142. – https://doi.org/10.1017/S0013091509001655.
5. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – **395**, No. 2. – P. 569–577. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.04.087.
6. *Dineen S.* Complex analysis on infinite dimensional spaces. – London: Springer, 1999. – xv+543 p.
7. *González M., Gonzalo R., Jaramillo J. A.* Symmetric polynomials on rearrangement-invariant function spaces // J. London Math. Soc. – 1999. – **59**, No. 2. – P. 681–697. – https://doi.org/10.1112/S0024610799007164.
8. *Novosad Z., Zagorodnyuk A.* Polynomial automorphisms and hypercyclic operators on spaces of analytic functions // Archiv der Mathematik. – 2007. – **89**, No. 2. – P. 157–166. – https://doi.org/10.1007/s00013-007-2043-4.
9. *Vasylyshyn T. V.* Topology on the spectrum of the algebra of entire symmetric functions of bounded type on the complex L_∞ // Карпат. мат. публікації. – 2017. – **9**, No. 1. – P. 22–27. – https://doi.org/10.15330/cmp.9.1.22-27.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА МНОЖЕСТВЕ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

Показано, что множество конечных мультимножеств можно отождествить с пространством симметричных полиномов на линейном пространстве конечных последовательностей, пополнение которого в соответствующей метрике дает топологизацию множества мультимножеств как подпространства пространства симметричных аналитических функций на ℓ_1. *Одной из возможных топологизаций является топология гильбертового пространства. Рассмотрены некоторые алгебраические операции на множестве мультимножеств, в частности аналоги дробных отображений.*

Ключевые слова: *мультимножества, симметрические полиномы, пространства симметрических аналитических функций.*

TOPOLOGICAL AND ALGEBRAICAL STRUCTURES ON THE SET OF MULTISETS

It is shown that the set of finite multisets can be identified with the space of symmetric polynomials on the linear space of finite sequences, which can be completed by a suitable metric and yields a topologization of the set of multisets as a subspace of the space of symmetric analytic functions on ℓ_1. *Among possible topologizations there is a Hilbert space topology. Also, some algebraic operations on the set of multisets are considered, including counterparts of fractional mappings.*

Key words: *multisets, symmetric polynomials, spaces of symmetric analytic functions.*

[1] Івано-Франків. коледж
Львів. нац. аграрн. ун-ту, Івано-Франківськ,
[2] Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
12.03.19