УДК 539.3

В. Ф. Чекурін[✉], Л. І. Постолакі

ЗАСТОСУВАННЯ ВАРІАЦІЙНОГО МЕТОДУ ОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ У СКІНЧЕННОМУ ЦИЛІНДРІ

*Розглянуто задачу про визначення осесиметричних залишкових напружень у круговому циліндрі скінченної висоти, зумовлених залишковими несумісними деформаціями. Її розв'язування зведено до: **1**) обчислення залишкових напружень у нескінченному циліндрі і **2**) визначення напружень збурення, зумовлених вільною поверхнею торців циліндра. Для розв'язання другої задачі застосовано варіаційний метод однорідних розв'язків. Проведено числове дослідження залишкових напружень у тілі для двох заданих розподілів несумісних деформацій, залежних від радіальної координати. Запропонований підхід можна використати для оцінки залишкових напружень, які виникають у циліндричних тілах під час їхньої термообробки.*

Ключові слова: *скінченний циліндр, осесиметричні залишкові напруження, залишкові несумісні деформації, варіаційний метод однорідних розв'язків.*

При виготовленні елементів конструкцій чи приладів розподіл залишкових напружень часто може бути критичним для їхніх експлуатаційних властивостей і повинен бути врахований. Тому розвиток ефективних аналітично-числових методів визначення залишкових напружень у твердих тілах є актуальною проблемою.

Відомий теоретично-експериментальний метод визначення залишкових напружень базується на сумісному використанні рівнянь теорії пружності тіл із залишковими напруженнями та результатів фізичних вимірювань [1–3]. Для розв'язування задач, сформульованих в рамках такого підходу, використовували метод прямого інтегрування рівнянь пружності в напруженнях [12] і числові методи [7]. У статтях [6, 9] запропоновано варіаційний метод однорідних розв'язків для визначення залишкових напружень в околі плоского з'єднання різнорідних матеріалів. Цей метод був застосований також для розв'язування задач неруйнівного визначення осесиметричних залишкових напружень в околі кільцевого зварного шва в довгій циліндричній оболонці на основі емпіричних даних, отриманих із використанням магнітопружного методу [8].

У цій статті розглянемо задачу про визначення осесиметричних залишкових напружень у скінченному циліндрі, для розв'язування якої застосуємо варіаційний метод однорідних розв'язків [10]. Формулювання задачі базується на концепції несумісних залишкових деформацій, які є причиною виникнення залишкових напружень у тілі [2, 3, 5, 11]. Апробацію методу проведемо для випадку апріорі заданих кусково-однорідного та неперервного розподілів несумісних деформацій, залежних від радіальної координати.

1. Математична модель залишкових напружень. Розглянемо вільне від навантажень циліндричне тіло $\mathcal{B}$, що займає область простору $\mathcal{V} = (0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -b \le z \le b)$, обмежену поверхнею $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_2$, де $\mathcal{S} = (\rho = 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -b \le z \le b)$, $\mathcal{S}_1 = (0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ z = b)$, $\mathcal{S}_2 = (0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ z = -b)$. Тут ρ, φ, z – циліндричні координати, ρ та z, віднесені до радіуса циліндра R. У тілі діють осесиметричні залишкові напруження, які в його об'ємі $\mathcal{V}$ задовольняють рівняння рівноваги [4]

[✉] chekurin@iapmm.lviv.ua

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sigma_{\rho\rho})+\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{\rho z}-\frac{1}{\rho}\sigma_{\varphi\varphi}=0,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sigma_{\rho z})+\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz}=0, \tag{1}$$

а також співвідношення пружності для тіл із несумісними деформаціями, які в осесиметричному випадку матимуть вигляд

$$\sigma_{\rho\rho}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\big((1-\nu)e_{\rho\rho}+\nu(e_{zz}+e_{\varphi\varphi})\big)-\frac{E}{1-2\nu}e_1(\rho,z),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\big((1-\nu)e_{\varphi\varphi}+\nu(e_{zz}+e_{\rho\rho})\big)-\frac{E}{1-2\nu}e_1(\rho,z),$$

$$\sigma_{zz}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\big((1-\nu)e_{zz}+\nu(e_{\rho\rho}+e_{\varphi\varphi})\big)-\frac{E}{1-2\nu}e_2(\rho,z),$$

$$\sigma_{\rho z}=\frac{E}{1+\nu}e_{\rho z}. \tag{2}$$

Тут $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz}, $\sigma_{\rho z}$ – компоненти осесиметричного тензора напружень, $e_{\rho\rho}$, $e_{\varphi\varphi}$, e_{zz}, $e_{\rho z}$ – компоненти тензора деформації, ν – коефіцієнт Пуассона, E – модуль Юнґа матеріалу циліндра, $e_1(\rho,z)$, $e_2(\rho,z)$ – несумісні залишкові деформації.

На поверхні $\partial\mathcal{V}$ компоненти напружень задовольняють умови ненавантаження:

$$\sigma_{\rho\rho}\big|_{\rho=1}=0,\qquad \sigma_{\rho z}\big|_{\rho=1}=0,$$

$$\sigma_{zz}\big|_{z=\pm b}=0,\qquad \sigma_{\rho z}\big|_{z=\pm b}=0. \tag{3}$$

Компоненти тензора деформації $e_{\rho\rho}$, $e_{\varphi\varphi}$, e_{zz}, $e_{\rho z}$ пов'язані із компонентами вектора переміщень u_ρ та u_z, нормованими на радіус циліндра R, формулами [4]:

$$e_{\rho\rho}=\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho},\qquad e_{\varphi\varphi}=\frac{u_\rho}{\rho},\qquad e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\qquad e_{\rho z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right). \tag{4}$$

Використовуючи співвідношення (1), (2), (4), отримуємо систему рівнянь в переміщеннях для визначення залишкових напружень у тілі за заданих розподілів компонент осесиметричного тензора несумісних залишкових деформацій $e^0_{\rho\rho}=e^0_{\varphi\varphi}=e_1(\rho,z)$, $e^0_{zz}=e_2(\rho,z)$, $e^0_{\rho z}=0$:

$$\nabla^2 u_\rho+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial\rho}-\frac{u_\rho}{\rho^2}=\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial e_1(\rho,z)}{\partial\rho},$$

$$\nabla^2 u_z+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z}=\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial e_2(\rho,z)}{\partial z}, \tag{5}$$

де $e=e_{\rho\rho}+e_{zz}+e_{\varphi\varphi}$, $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – осесиметричний оператор Лапласа.

У випадку, коли деформації e_i, $i=1,2$, залежать лише від радіальної координати ρ: $e_1(\rho)=e^0_1 f_1(\rho)$, $e_2(\rho)=e^0_2 f_2(\rho)$, де e^0_i – задані сталі, а $f_i(\rho)$, $i=1,2$, – задані безрозмірні функції, систему (5) і співвідношення (2) запишемо як

$$\nabla^2 u_\rho + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{u_\rho}{\rho^2} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial e_1(\rho)}{\partial \rho},$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)e_{\rho\rho} + \nu(e_{zz} + e_{\varphi\varphi})\right) - \frac{1}{1-2\nu} e^0 f_1(\rho),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)e_{\varphi\varphi} + \nu(e_{zz} + e_{\rho\rho})\right) - \frac{1}{1-2\nu} e^0 f_1(\rho),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)e_{zz} + \nu(e_{\rho\rho} + e_{\varphi\varphi})\right) - \frac{1}{1-2\nu} f_2(\rho),$$

$$\sigma_{\rho z} = \frac{1}{1+\nu} e_{\rho z}. \tag{7}$$

Тут використано безрозмірні компоненти напружень, деформацій та переміщень:

$$\sigma_{ij} \leftarrow \sigma_{ij}/E e_2^0, \qquad e_{ij} \leftarrow e_{ij}/e_2^0, \qquad ij \in \{\rho\rho, zz, \varphi\varphi, \rho z\},$$

$$u_\rho \leftarrow u_\rho/e_2^0, \qquad u_z \leftarrow u_z/e_2^0, \qquad e^0 \equiv e_1^0/e_2^0.$$

Крайові умови, записані у безрозмірних змінних, збережуть свій вигляд (3).

Рівняння (6), (7) разом із крайовими умовами (3) визначають залишковий напружено-деформований стан в тілі, джерелом виникнення якого є несумісні деформації $e_1(\rho)$, $e_2(\rho)$.

2. Метод розв'язування задачі. Визначення залишкових напружень у скінченному циліндрі зведемо до послідовності задач про визначення основного та збуреного станів.

2.1. Основний стан. За основний (незбурений) стан приймемо залишкові напруження $\sigma_{\rho\rho}^0 = \sigma_{\rho\rho}^0(\rho)$, $\sigma_{\varphi\varphi}^0 = \sigma_{\varphi\varphi}^0(\rho)$, $\sigma_{zz}^0 = \sigma_{zz}^0(\rho)$, $\sigma_{\rho z}^0 = 0$ у безмежному ненавантаженому тілі $\mathcal{B}_0$, що займає область простору $\mathcal{V}^0 = (0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty \le z \le \infty)$, зумовлені несумісними залишковими деформаціями $e_1(\rho)$, $e_2(\rho)$. У цьому стані друге з рівнянь рівноваги (1) задовольняється тотожно, а перше рівняння (1) з урахуванням співвідношень (7) зводиться до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho^0)}{\partial \rho}\right] = e^0\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial f_1(\rho)}{\partial \rho} - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial e_{zz}^0(\rho)}{\partial \rho}. \tag{8}$$

Тут u_ρ^0 – радіальна компонента переміщення у незбуреному стані.

Враховуючи (4), із (7) отримуємо співвідношення, які виражають компоненти залишкових напружень для основного стану через компоненту переміщення u_ρ^0 та несумісні залишкові деформації e_{zz}^0:

$$\sigma_{\rho\rho}^0 = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\frac{\partial u_\rho^0}{\partial \rho} + \nu\left(e_{zz}^0 + \frac{u_\rho^0}{\rho}\right)\right) - \frac{1}{1-2\nu} e^0 f_1(\rho),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^0 = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\frac{u_\rho^0}{\rho} + \nu\left(e_{zz}^0 + \frac{\partial u_\rho^0}{\partial \rho}\right)\right) - \frac{1}{1-2\nu} e^0 f_1(\rho),$$

$$\sigma_{zz}^0 = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)e_{zz}^0 + \nu\left(\frac{\partial u_\rho^0}{\partial \rho} + \frac{u_\rho^0}{\rho}\right)\right) - \frac{1}{1-2\nu} f_2(\rho). \tag{9}$$

Основний стан підпорядкуємо умовам ненавантаження вигляду

$$\sigma^0_{\rho\rho}\Big|_{\rho=1} = 0, \qquad 2\pi\int\limits_0^1 \sigma^0_{zz}\rho\, d\rho = 0\,. \tag{10}$$

2.2. Збурений стан. Збурений стан тіла $\mathcal{B}$ визначається напруженнями $\tilde\sigma_{\rho\rho}(\rho,z)$, $\tilde\sigma_{zz}(\rho,z)$, $\tilde\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,z)$, $\tilde\sigma_{\rho z}(\rho,z)$, зумовленими наявністю вільних від навантаження поверхонь $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$. Безрозмірні компоненти вектора переміщень для збуреного стану $\tilde u_\rho(\rho,z)$, $\tilde u_z(\rho,z)$ задовольняють в об'ємі $\mathcal{V}$ однорідні рівняння в переміщеннях:

$$\nabla^2\tilde u_\rho + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\tilde e}{\partial\rho} - \frac{\tilde u_\rho}{\rho^2} = 0\,,$$

$$\nabla^2\tilde u_z + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\tilde e}{\partial z} = 0\,, \tag{11}$$

а на поверхні $\partial\mathcal{V}$ – неоднорідні умови:

$$\tilde\sigma_{\rho\rho}\Big|_{\rho=1} = 0, \quad \tilde\sigma_{\rho z}\Big|_{\rho=1} = 0, \quad \tilde\sigma_{zz}\Big|_{z=\pm b} = -\sigma^0_{zz}(\rho)\,, \quad \tilde\sigma_{\rho z}\Big|_{z=\pm b} = 0\,. \tag{12}$$

Тут $\tilde e = \tilde e_{\rho\rho} + \tilde e_{zz} + \tilde e_{\varphi\varphi}$.

Неважко переконатися, що компоненти напружень

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho,z) = \sigma^0_{\rho\rho}(\rho) + \tilde\sigma_{\rho\rho}(\rho,z), \quad \sigma_{\varphi\varphi}(\rho,z) = \sigma^0_{\varphi\varphi}(\rho) + \tilde\sigma_{\varphi\varphi}(\rho,z)\,,$$

$$\sigma_{zz}(\rho,z) = \sigma^0_{zz}(\rho) + \tilde\sigma_{zz}(\rho,z), \quad \sigma_{\rho z}(\rho,z) = \tilde\sigma_{\rho z}(\rho,z)\,,$$

задовольняють рівняння (1) і крайові умови (3), а функції $u_\rho(\rho,z) = u^0_\rho(\rho) + \tilde u_\rho(\rho,z)$ та $u_z(\rho,z) = u^0_z(\rho,z) + \tilde u_z(\rho,z)$ задовольняють систему (6), тобто визначають розв'язок вихідної задачі (6), (7), (3).

3. Визначення основного стану. Інтегруючи рівняння (8) з урахуванням обмеженості функції $u^0_\rho(\rho)$ в точці $\rho = 0$, отримуємо

$$u^0_\rho = e^0\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho \rho f_1(\rho)\,d\rho - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho \rho e^0_{zz}(\rho)\,d\rho + \frac{\rho}{2}C_1\,. \tag{13}$$

Підставляючи в перше та третє співвідношення (9) розв'язок (13), а отримані вирази – в крайові умови (10), отримуємо систему рівнянь для знаходження константи C_1 і компоненти e^0_{zz} тензора деформацій в основному стані:

$$C_1 = \frac{2(2\nu-1)}{\nu-1}\int\limits_0^1 \left(e^0(\nu+1)f_1(\rho) - \nu e^0_{zz}(\rho)\right)\rho\,d\rho\,,$$

$$\int\limits_0^1 \left((2\nu-1)e^0_{zz}(\rho) - 2\nu e^0 f_1(\rho) + f_2(\rho)\right)\rho\,d\rho = 0\,,$$

звідки знаходимо

$$C_1 = \frac{2}{(\nu-1)}\int\limits_0^1 \left(e^0(\nu-1)f_1(\rho) + \nu f_2(\rho)\right)\rho\,d\rho\,,$$

$$e^0_{zz}(\rho) = \frac{2e^0\nu f_1(\rho) - f_2(\rho)}{2\nu-1}\,.$$

При цьому компоненти напружень $\sigma^0_{\rho\rho}$, $\sigma^0_{\varphi\varphi}$ та σ^0_{zz} для основного стану матимуть вигляд

$$\sigma^0_{\rho\rho} = \frac{1}{(1+\nu)(1-\nu)(2\nu-1)}\left(\int_0^1 F(\rho)\rho\,d\rho - \frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho F(\rho)\rho\,d\rho\right),$$

$$\sigma^0_{\varphi\varphi} = \frac{1}{(1+\nu)(1-\nu)(2\nu-1)}\left(\int_0^1 F(\rho)\rho\,d\rho + \frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho F(\rho)\rho\,d\rho - F(\rho)\right),$$

$$\sigma^0_{zz} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-\nu)(2\nu-1)}\left(2\int_0^1 F(\rho)\rho\,d\rho - F(\rho)\right), \tag{14}$$

де $F(\rho) = e^0(\nu-1)f_1(\rho) + \nu f_2(\rho)$.

4. Визначення збуреного стану. Розв'язок задачі (11), (12) отримаємо з використанням функції Лява χ [4], яка задовольняє бігармонічне рівняння

$$\nabla^2\nabla^2\chi = 0\,. \tag{15}$$

Звівши рівняння (11) до бігармонічного рівняння, компоненти переміщень $\tilde{u}_\rho$, $\tilde{u}_z$ і напружень $\tilde{\sigma}_{ij}$, $ij \in (\rho\rho, \varphi\varphi, zz, \rho z)$, виразимо через функцію Лява χ такими співвідношеннями [4]:

$$\tilde{u}_\rho = -\frac{\partial^2\chi}{\partial\rho\partial z}, \qquad \tilde{u}_z = \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + 2(1-\nu)\nabla^2\chi\,,$$

$$\frac{1}{2\mu}\tilde{\sigma}_{\rho\rho} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial\rho^2}\right), \qquad \frac{1}{2\mu}\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\nabla^2\chi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\right], \tag{16}$$

$$\frac{1}{2\mu}\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right), \qquad \frac{1}{2\mu}\tilde{\sigma}_{\rho z} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left((1-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right), \tag{17}$$

де $\mu = E/(2(1+\nu))$ – модуль зсуву матеріалу.

Підставляючи формули (16), (17) в умови (12), отримуємо крайові умови для рівняння (15):

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial\rho^2}\right)\Bigg|_{\rho=1} = 0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left((1-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right)\Bigg|_{\rho=1} = 0\,,$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right)\Bigg|_{z=\pm b} = -\sigma^0_{zz}(\rho)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left((1-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right)\Bigg|_{z=\pm b} = 0\,. \tag{18}$$

Тут $\sigma^0_{zz}(\rho)$ визначається за формулою (14).

Задачу (15), (18) розв'язуємо, використовуючи варіаційний метод однорідних розв'язків [10]. Враховуючи симетрію задачі стосовно площини $z = 0$, функцію χ подамо у вигляді

$$\chi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k \sin\mathrm{h}(-\gamma_k z) f_k(\rho) + \overline{B}_k \sin\mathrm{h}(-\overline{\gamma}_k z)\overline{f}_k(\rho)\right), \tag{19}$$

де B_k – невідомі комплексні сталі, риска над буквою означає комплексне спряження.

У представленні (19) функції $f_k(\rho)$ виражаються через функції Бесселя J_0 та J_1 [10]:

$$f_k(\rho) = \rho J_1(\gamma_k \rho) æ_k - \frac{2}{\pi\gamma_k} J_0(\gamma_k \rho),$$

де γ_k – корені трансцендентного рівняння

$$(\gamma_k)^2 \left(J_0^2(\gamma_k) + J_1^2(\gamma_k)\right) + 2(\nu - 1) J_1^2(\gamma_k) = 0,$$

а сталі $æ_k$ визначаються як

$$æ_k = \frac{2J_1(\gamma_k)}{\pi\left((2\nu - 2)J_1(\gamma_k) - \gamma_k J_0(\gamma_k)\right)}.$$

Подамо компоненти тензора напружень $\tilde{\sigma}_{ij}$ осесиметричної задачі для скінченного циліндра у вигляді лінійної комбінації однорідних комплексних розв'язків [10]:

$$\tilde{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sigma_{k\rho\rho}(\rho, z) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{k\rho\rho}(\rho, z)\right), \tag{20}$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sigma_{k\varphi\varphi}(\rho, z) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{k\varphi\varphi}(\rho, z)\right), \tag{21}$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}(\rho, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sigma_{kzz}(\rho, z) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{kzz}(\rho, z)\right), \tag{22}$$

$$\tilde{\sigma}_{\rho z}(\rho, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sigma_{k\rho z}(\rho, z) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{k\rho z}(\rho, z)\right), \tag{23}$$

де

$$\sigma_{k\rho\rho}(\rho, z) = 2\mu\gamma_k \cosh(\gamma_k z)\left((\nu - 1) f_k''(\rho) + \frac{\nu}{\rho} f_k'(\rho) + \nu\gamma_k^2 f_k(\rho)\right),$$

$$\sigma_{k\varphi\varphi}(\rho, z) = 2\mu\gamma_k \cosh(\gamma_k z)\left(\nu f_k''(\rho) + \frac{\nu - 1}{\rho} f_k'(\rho) + \nu\gamma_k^2 f_k(\rho)\right),$$

$$\sigma_{kzz}(\rho, z) = 2\mu\gamma_k \cosh(\gamma_k z)\left((2 - \nu)\left(f_k''(\rho) + \frac{1}{\rho} f_k'(\rho)\right) + (1 - \nu)\gamma_k^2 f_k(\rho)\right),$$

$$\sigma_{k\rho z}(\rho, z) = 2\mu \sinh(\gamma_k z) \times$$

$$\times\left((1 - \nu)\left(f_k'''(\rho) + \frac{1}{\rho} f_k''(\rho)\right) + \left((1 - \nu)\left(\gamma_k^2 - \frac{1}{\rho}\right) - \gamma_k^2\right) f_k'(\rho)\right).$$

Підпорядкуємо розв'язок (19) умовам (18), застосовуючи варіаційний підхід [5]. Для цього введемо квадратичний функціонал

$$\Phi = \int_0^1 \left[\left(\tilde{\sigma}_{zz}\Big|_{z=b} + \sigma_{zz}^0(\rho)\right)^2 + \left(\tilde{\sigma}_{\rho z}\Big|_{z=b}\right)^2\right] = \rho\, d\rho. \tag{24}$$

Підставляючи подання (22), (23) у функціонал (24) і використовуючи необхідні умови мінімуму функціонала:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial B_m} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial \bar{B}_m} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

приходимо до розв'язування безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невизначених комплексних сталих $B_k^1 = B_k$, $B_k^2 = \overline{B}_k$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{2} M_{mk}^{\ell p} B_k^p = K_m^{\ell} . \tag{25}$$

Коефіцієнти системи (25) $M_{mk}^{\ell p}$ та K_m^{ℓ}, $\ell = 1, 2$, $m = 1, 2, \ldots$, виражаються формулами

$$M_{mk}^{\ell p} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sigma_{kzz}^p(\rho) \sigma_{mzz}^{\ell}(\rho) + \sigma_{k\rho z}^p(\rho) \sigma_{m\rho z}^{\ell}(\rho) \right) \rho \, d\rho , \tag{26}$$

$$K_m^{\ell} = -\int_0^1 \left(\sigma_{zz}^0(\rho) \sigma_{mzz}^{\ell}(\rho) \right) \rho \, d\rho . \tag{27}$$

У формулах (26), (27) використано такі позначення:

$$\sigma_{kzz}^1(\rho) = \sigma_{kzz}(\rho, b), \quad \sigma_{kzz}^2(\rho) = \overline{\sigma}_{kzz}(\rho, b), \quad \sigma_{k\rho z}^1(\rho) = \sigma_{k\rho z}(\rho, b) ,$$

$$\sigma_{k\rho z}^2(\rho) = \overline{\sigma}_{k\rho z}(\rho, b), \quad \sigma_{mzz}^1(\rho) = \sigma_{mzz}(\rho, b), \quad \sigma_{mzz}^2(\rho) = \overline{\sigma}_{mzz}(\rho, b) ,$$

$$\sigma_{m\rho z}^1(\rho) = \sigma_{m\rho z}(\rho, b), \quad \sigma_{m\rho z}^2(\rho) = \overline{\sigma}_{m\rho z}(\rho, b) .$$

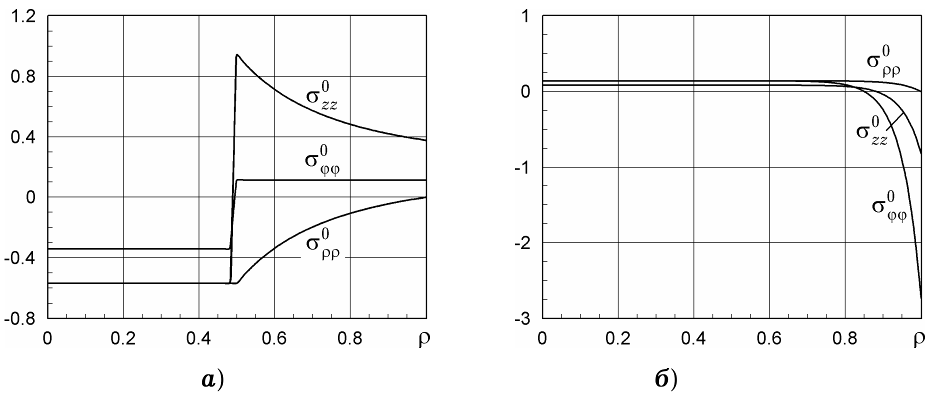
5. Числові дослідження. Дослідимо залишкові напруження в тілі для заданих розподілів несумісних деформацій $e_1(\rho) = e_1^0 f_1(\rho)$ та $e_2(\rho) = e_2^0 f_2(\rho)$. Обмежимося випадком $f_1(\rho) = f_2(\rho) = f(\rho)$. Розглянемо дві різні функції $f(\rho)$: кусково-сталу

$$f(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \le \rho_1, \\ 1/2, & \rho > \rho_1, \end{cases} \tag{28}$$

і неперервну

$$f(\rho) = e^{(\rho - 1)/a}, \qquad a = \text{const} . \tag{29}$$

Графіки залежностей від радіальної координати ρ компонент напружень $\sigma_{\rho\rho}^0$, $\sigma_{\varphi\varphi}^0$, σ_{zz}^0 в *основному стані* показано на рис. 1***а*** та рис. 1***б*** для розподілів залишкових несумісних деформацій у вигляді (28) і (29) відповідно. Обчислення виконано при $\rho_1 = 0.5$, $\nu = 0.25$, $e^0 = 2$, $a = 0.05$.



а) ***б***)

Рис. 1

Як бачимо, характер розподілу несумісних деформацій істотно впливає на залишкові напруження в безмежному циліндрі.

Для визначення *збуреного стану* систему (25) розв'язували методом редукції, зберігаючи у розвиненнях (20)–(23) скінченне число доданків N. Це приводить до скінченної системи:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{2} M_{mk}^{\ell p} B_k^p = K_m^{\ell}, \qquad \ell = 1,2, \qquad m = 1,2,\ldots,N .$$

Числові дослідження для циліндра висотою $2b = 1$ провели, послідовно збільшуючи кількість доданків у розвиненнях (20)–(23), аж до його значення N, при якому величина $\varepsilon \equiv 1/4\pi \cdot \sqrt{\Phi_N}$, яка визначає середньоквадратичну похибку розв'язку задачі, не перевищувала заданого значення. Тут Φ_N – значення функціонала (24), обчислене на розв'язку, отриманому з використанням редукованої системи N рівнянь.

Розв'язки задачі обчислено при $N = 15$. Для такого N отримали значення похибок $\varepsilon = 1.5 \cdot 10^{-3}$ та $\varepsilon = 9.4 \cdot 10^{-4}$ відповідно для функцій $f(\rho)$ у вигляді (28) і (29).

Залежності компонент напружень $\tilde{\sigma}_{\rho\rho}$, $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$, $\tilde{\sigma}_{zz}$ у збуреному стані від радіальної координати ρ показано на рис. 2 – рис. 4. Криві отримано для різних значень z: $z = 0.1, 0.3, 0.45$. Варіанти ***а***) і ***б***) графіків на рис. 2 – рис. 4 відповідають розподілам залишкових несумісних деформацій, обчисленим для функцій $f(\rho)$ у вигляді (28) і (29) відповідно.

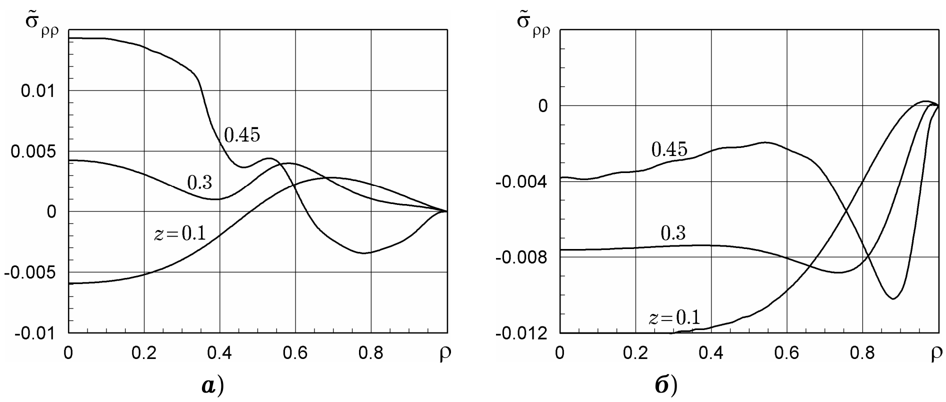


Рис. 2

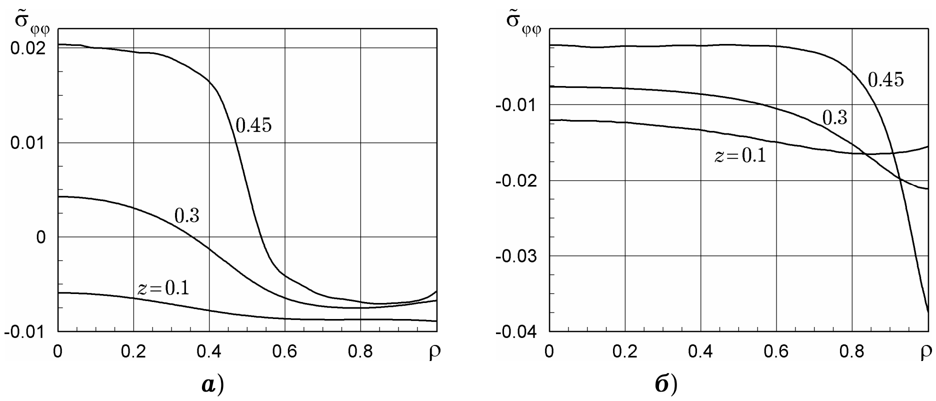
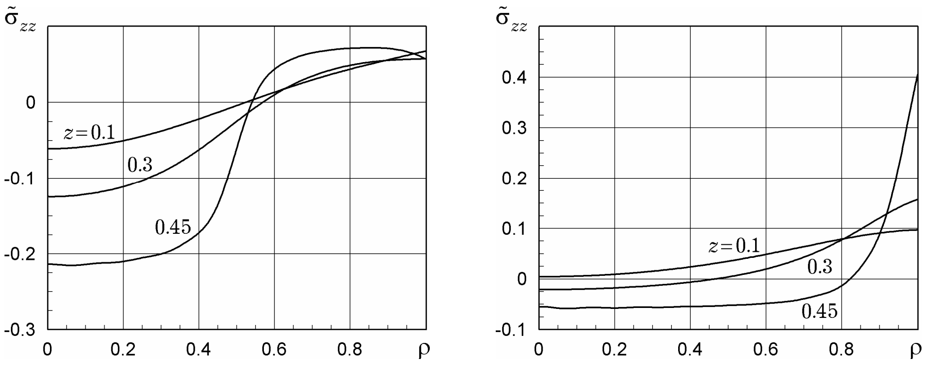


Рис. 3

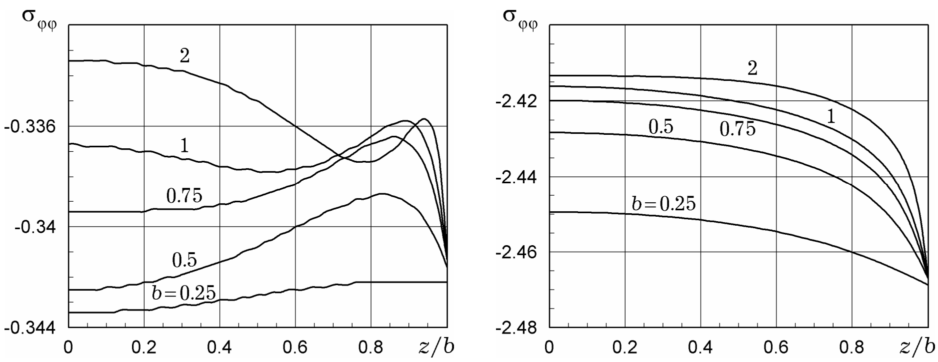


а) ***б***)

Рис. 4

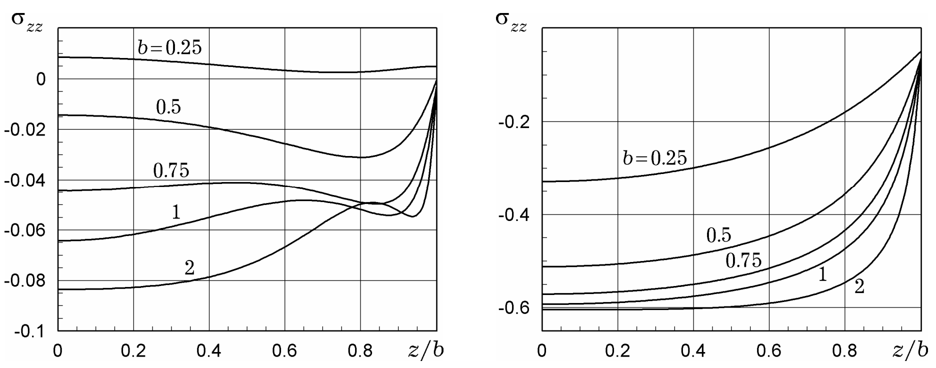
Напруження збурення, представлені на цих рисунках, мають чітко виражений крайовий характер – вони зменшуються за абсолютною величиною з віддаленням від вільних торців циліндра.

Крайовий ефект спостерігається також і в розподілах повних залишкових напружень. На рис. 5 і рис. 6 показано залежності компонент напружень $\sigma_{\varphi\varphi} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} + \sigma^0_{\varphi\varphi}$ і $\sigma_{zz} = \tilde{\sigma}_{zz} + \sigma^0_{zz}$ від осьової координати z на поверхні $\rho = 1$, розраховані для різних значень висоти циліндра $2b$ і різних розподілів залишкових несумісних деформацій: варіанти ***а***) і ***б***) на рис. 5 і рис. 6 відповідають розподілам залишкових несумісних деформацій, обчислених для функцій $f(\rho)$ вигляду (28) і (29). Криві на рисунках обчислено для значень $b = 0.25$, 0.5, 0.75, 1, 2.



а) ***б***)

Рис. 5



а) ***б***)

Рис. 6

Висновки. Розглянуто задачу про визначення осесиметричних залишкових напружень у круговому циліндрі скінченної висоти, зумовлених залишковими несумісними деформаціями, залежними від радіальної координати. Її розв'язування зведено до послідовності двох задач: обчислення залишкових напружень у нескінченному циліндрі (*основний стан*) і визначення додаткових напружень, зумовлених вільною поверхнею торців циліндра (*збурений стан*). Для розв'язування другої задачі застосовано варіаційний метод однорідних розв'язків, що дозволило звести її до безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку розв'язано методом редукції.

Ефективність запропонованого підходу досліджено для двох випадків розподілу несумісних залишкових деформацій. Результати числового розв'язування показали добру збіжність методу редукції як у випадку неперервного, так і кусково-сталого розподілів компонент залишкових несумісних деформацій в тілі.

Запропонований підхід можна застосувати, зокрема, для розрахунку залишкових напружень, які виникають у циліндричних тілах у процесі термообробки. Підхід можна розвинути і на випадок залишкових несумісних деформацій, залежних від двох координат – радіальної та осьової.

1. *Осадчук В., Пороховський Ю., Банахевич Ю.* Математична модель розрахунково-експериментального визначення залишкових напружень у кільцевих зварних з'єднаннях труб на основі уточненої теорії оболонок // Машинознавство. – 2010. – № 3-4. – С. 13–19.
2. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
3. *Подстригач Я. С.*, *Осадчук В. А.*, *Марголин А. М.* Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – Киев: Наук. думка, 1991. – 296 с.
4. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
   Те саме: *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York etc.: McGraw-Hill Book Co., 1970. – xxiv+567 p.
5. *Чекурин В. Ф.* Обратная задача неразрушающего контроля уровня закалки листового стекла // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 86–97.
   Те саме: *Chekurin V. F.* Inverse problem of nondestructive control of the level of hardening of sheet glass // Mech. Solids. – 1998. – **33**, No. 3. – P. 68–77.
6. *Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І.* Теоретично-експериментальне визначення залишкових напружень у плоских з'єднаннях // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 2. – С. 153–162.
   Те саме: *Chekurin V. F., Postolaki L. I.* Theoretical and experimental determination of residual stresses in plane joints // Mater. Sci. – 2009. – **45,** No. 2. – Article 318.
   – https://doi.org/10.1007/s11003-009-9181-8.
7. *Чекурін В., Брич Т.* Скінченно-елементний метод розв'язування задач поляризаційно-оптичної томографії напружень у заготовках волоконних світловодів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 13. – С. 163–172.
8. *Чекурін В., Постолакі Л.* Задача неруйнівного визначення залишкових напружень у трубопроводі за даними магнітопружних вимірювань // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 20. – С. 218–228.
9. *Чекурін В., Постолакі Л.* Обернена задача визначення залишкових напружень в околі з'єднання різнорідних матеріалів // Машинознавство. – 2010. – № 6. – С. 3–7.
10. *Chekurin V. F., Postolaki L. I.* A variational method of homogeneous solutions for axisymmetric elasticity problems for cylinder // Mathematical modeling and computing. – 2015. – **2**, No. 2. – P. 128–139.
11. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids. – Dordrecht etc.: Martinus Nijhof Publ., 1987. – xii+587 p. – DOI: 10.1007/978-94-009-3489-4.
12. *Tokovyy Y. V., Ma C. C.* Analysis of residual stresses in a long hollow cylinder // Int. J. Press. Ves. Pip. – 2011. – **88**, No. 5-7. – P. 248–255.
   – doi:101016/jijpvp201104002.

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

Рассмотрена задача об определении осесимметричных остаточных напряжений в круговом цилиндре конечной высоты, обусловленных остаточными несовместными деформациями. Ее решение сведено к: ***1****) вычислению остаточных напряжений в бесконечном цилиндре и* ***2****) определению напряжений возмущения, обусловленных свободной поверхностью торцов цилиндра. Для решения второй задачи применен вариационный метод однородных решений. Проведено численное исследование остаточных напряжений в теле для двух заданных распределений несовместных деформаций, зависимых от радиальной координаты. Предложенный подход можно использовать для оценки остаточных напряжений, возникающих в цилиндрических телах во время их термообработки.*

Ключевые слова*: конечный цилиндр, осесимметричные остаточные напряжения, остаточные несовместные деформации, вариационный метод однородных решений.*

APPLICATION OF THE VARIATIONAL METHOD OF HOMOGENEOUS SOLUTIONS FOR DETERMINATION OF AXISYMMETRIC RESIDUAL STRESSES IN FINITE CYLINDER

The problem on determination of axisymmetric residual stresses in a circular cylinder of finite height caused by residual incompatible strains is considered. The problem is reduced to ***1****) the calculation of residual stresses in an infinite cylinder and* ***2****) determination of the perturbation stresses caused by free surface of the cylinder end faces. A variational method of homogeneous solutions is used to solve the second problem. A numerical study of residual stresses in the body for two given distributions of incompatible strains, depending on the radial coordinate, is conducted. The proposed approach can be used to estimate the residual stresses that occur in cylindrical bodies in their heat treatment process.*

Key words*: finite cylinder, axisymmetric residual stresses, residual incompatible strains, variational method of homogeneous solutions .*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
28.11.17