

**ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОГО ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ**

*Побудовано точний розв'язок нестационарної задачі для пружного шару з циліндричним жорстким включенням, на циліндричній поверхні якого задано умови гладкого контакту. На одній з граней шару задано осесиметричне нормальне нестационарне стискальне навантаження, а інша грань зчеплена з абсолютно жорсткою основою або спирається на гладку основу без тертя. Для побудови полів переміщень та напружень у шарі до осесиметричних рівнянь руху послідовно застосовано інтегральні перетворення Лапласа та Вебера, що приводить до неоднорідної векторної крайової задачі відносно невідомих трансформант переміщень. Задачу розв'язано з використанням матричного диференційного числення. Досліджено нормальні напруження на циліндричній поверхні включення та на нижній грані пружного шару. Розв'язок проаналізовано для випадку квазістатичних коливань.*

**Ключові слова:** нескінченний пружний шар, циліндричне жорстке включення, динамічна задача, інтегральні перетворення.

**Вступ.** Дефекти різної природи спричинюють концентрацію напружень у пружних тілах та суттєво впливають на міцність конструкцій [3, 9, 12, 17]. Задачі теорії пружності для шару, послабленого дефектами канонічної форми, в тому числі циліндричними, розглядалися багатьма авторами в статичній постановці. Складність таких задач визначається типом умов на межі дефекту. Найскладнішим є випадок, коли на дефекті задано умови першої основної задачі. У такій постановці наближені розв'язки відповідних задач запропоновано в роботах [1, 2, 6, 10]. У випадку, коли на циліндричній поверхні дефекту задано умови гладкого контакту, вдається отримати точний розв'язок, наприклад, для півпростору [27]. У [24] знайдено числовий розв'язок задачі за різних типів навантажень циліндричного включення, жорстко закріпленого у пружному півпросторі. Ключовим моментом в його побудові є використання інтегрального перетворення типу Вебера. Найзагальніший вигляд таких перетворень отримано в [11]. Розв'язок задачі для шару з циліндричним включенням наведено в [15], де застосовано векторне інтегральне перетворення типу Вебера без використання зображень Папковича – Нойбера, що суттєво спростило розв'язування. Задачу для пружного шару з циліндричним включенням з урахуванням власної ваги шару розглянуто в [14]. З використанням методу інтегральних перетворень знайдено числовий розв'язок осесиметричної задачі теорії пружності для циліндра скінченної довжини з закріпленою бічною поверхнею з урахування власної ваги [16]. У роботі [19] побудовано аналітичний розв'язок тривимірної задачі теорії пружності для однорідного ізотропного циліндра з вільною бічною поверхнею за дії нормального стискального навантаження на торцях. Рівновагу пружного скінченного циліндра під дією осесиметричного нормального навантаження досліджено в [22].

Динамічні задачі теорії пружності пов'язані з розвитком багатьох галузей механіки [18, 21, 28]. У монографіях [4, 7] розглянуто динамічні задачі для неklasичних областей, а також досліджено проблеми дифракції пружних хвиль і визначено динамічні напруження біля концентраторів напружень різної природи, у тому числі на циліндричній перешкоді, що дозволяє визначити дифракційне поле біля відзеркалюючих поверхонь. Теорію гармонічних коливань і поширення хвиль у пружних тілах викладено в [5]. У [23] розглянуто задачу про динамічні напруження, що виникають біля ци-

---

✉ 81anna81@gmail.com

ліндричного включення довільної густини, при поширенні плоскої хвилі у пружному середовищі та виявлено її залежність від кількості хвиль падіння і коефіцієнта Пуассона. Динамічну задачу для нескінченного пружного ізотропного середовища з циліндричним включенням розглянуто у [20], де визначено гармонічне поле, що виникає за рахунок включення, і записано динамічний тензор Ешелбі у замкненій формі. Застосування методу граничних елементів дозволило отримати закономірності сталих коливань плоского жорсткого включення у тривимірному пружному тілі [8].

Проте багато практично важливих динамічних задач залишаються нерозв'язаними [25, 26]. Однією із таких задач є побудова точного динамічного розв'язку для пружного шару з циліндричним включенням.

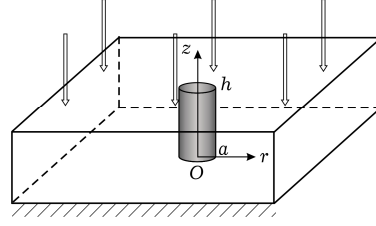


Рис. 1. Схема задачі.

**1. Постановка задачі та її зведення до одновимірної.** Розглянемо пружний шар  $a \leq r < \infty$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ,  $0 \leq z \leq h$  у циліндричній системі координат (рис. 1). На грані  $z = h$  діє осесиметричне нормальне нестационарне стискальне навантаження

$$\sigma_z(r, h, t) = -p(r, t), \quad \tau_{rz}(r, h, t) = 0, \quad (1)$$

а грань  $z = 0$  є жорстко закріпленою:

$$u_r(r, 0, t) = 0, \quad u_z(r, 0, t) = 0. \quad (2)$$

Між жорстким включенням та шаром задано умови гладкого контакту

$$u_r(a, z, t) = 0, \quad \tau_{rz}(a, z, t) = 0. \quad (3)$$

Потрібно знайти хвильове поле пружного шару  $u_r(r, z, t)$ ,  $u_z(r, z, t)$ , яке задовольняє осесиметричні рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{2}{\alpha + 1} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} &= \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{2}{\alpha - 1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

з нульовими початковими умовами. Тут  $\alpha = 3 - 4\mu$ ,  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона,  $G$  – модуль зсуву,  $\rho$  – густина.

Позначимо через  $c^2 = \frac{G}{\rho}$ ,  $c_1^2 = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} c^2$  швидкості поширення відповідно поперечної і поздовжньої хвилі та введемо безрозмірні координати

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \xi = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{ct}{a}, \quad \rho \in [1, \infty), \quad \xi \in [0, 1]. \quad (5)$$

Позначивши  $u_r(r, z, t) = U(\rho, \xi, \tau)$ ,  $u_z(r, z, t) = W(\rho, \xi, \tau)$ , запишемо рівняння руху (4) в нових координатах (5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) - \frac{U}{\rho^2} + \alpha^2 \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{2\alpha}{\alpha + 1} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial \xi} &= \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) + \alpha^2 \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) &= \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Умови гладкого контакту (3) при  $r = a$  з урахуванням (5) набудуть вигляду

$$U(1, \xi, \tau) = 0, \quad \frac{\partial W(1, \xi, \tau)}{\partial \rho} = 0. \quad (7)$$

Умови (1), (2) на гранях  $z = 0$  і  $z = h$  запишемо таким чином:

$$U(\rho, 0, \tau) = 0, \quad W(\rho, 0, \tau) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial U(\rho, 1, \tau)}{\partial \rho} + \frac{U(\rho, 1, \tau)}{\rho} + \alpha \bar{\mu} \frac{\partial W(\rho, 1, \tau)}{\partial \xi} = -\frac{a}{G} \frac{x-1}{3-x} p(\rho, \tau),$$

$$\frac{\partial W(\rho, 1, \tau)}{\partial \rho} + \alpha \frac{\partial U(\rho, 1, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \bar{\mu} = \frac{1-\mu}{\mu} = \frac{1+x}{3-x}, \quad \alpha = \frac{a}{h}. \quad (9)$$

Послідовно застосуємо до системи (6) та умов (8), (9) інтегральне перетворення Лапласа за змінною  $\tau$ :

$$f_p(\rho, \xi) = \int_0^{\infty} f(\rho, \xi, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad f(\rho, \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f_p(\rho, \xi) e^{p\tau} dp \quad (10)$$

та перетворення Вебера [11] за змінною  $\rho$ :

$$U_{p\lambda}(\xi) = \int_1^{\infty} \rho U_p(\rho, \xi) \chi_1(\rho, \lambda) d\rho, \quad U_p(\rho, \xi) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda U_{p\lambda}(\xi) \chi_1(\rho, \lambda) d\lambda}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)},$$

$$W_{p\lambda}(\xi) = \int_1^{\infty} \rho W_p(\rho, \xi) \chi_0(\rho, \lambda) d\rho, \quad W_p(\rho, \xi) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda W_{p\lambda}(\xi) \chi_0(\rho, \lambda) d\lambda}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)}, \quad (11)$$

де  $\chi_i(\rho, \lambda) = J_i(\rho\lambda)N_1(\lambda) - N_i(\rho\lambda)J_1(\lambda)$ ,  $J_i(\lambda)$ ,  $N_i(\lambda)$  – відповідно функції Бесселя та Неймана,  $i = 0, 1$ .

Застосування інтегрального перетворення Вебера забезпечує тотожне виконання умов (7), а рівняння (9) зводяться до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь у просторі трансформант:

$$U_{p\lambda}''(\xi) - \frac{2\lambda_*}{x-1} W_{p\lambda}'(\xi) - \lambda_*^2 \frac{x+1}{x-1} U_{p\lambda}(\xi) - \frac{p^2}{\alpha^2} U_{p\lambda}(\xi) = 0,$$

$$W_{p\lambda}''(\xi) + \frac{2\lambda_*}{x+1} U_{p\lambda}'(\xi) - \lambda_*^2 \frac{x-1}{x+1} W_{p\lambda}(\xi) - \frac{p^2}{\alpha^2} \frac{x-1}{x+1} W_{p\lambda}(\xi) = 0, \quad (12)$$

де  $\lambda_* = \lambda / \alpha$ ,  $0 < \xi < 1$ , а штрихом позначено похідну за аргументом.

Умови (8), (9) у термінах трансформант (10), (11) мають вигляд

$$U_{p\lambda}(0) = 0, \quad W_{p\lambda}(0) = 0,$$

$$\lambda_* U_{p\lambda}(1) + \bar{\mu} W_{p\lambda}'(1) = -A_* p_{p\lambda}, \quad U_{p\lambda}'(1) - \lambda_* W_{p\lambda}(1) = 0, \quad (13)$$

де

$$A_* = \frac{a}{G\alpha} \frac{x-1}{3-x}, \quad p_{p\lambda} = \int_1^{\infty} \rho p_p(a\rho) \chi_0(\rho, \lambda) d\rho,$$

$$p_p(a\rho) = \int_0^{\infty} p(a\rho, \frac{a}{c} \tau) e^{-p\tau} d\tau.$$

Сформулюємо отриману крайову задачу (12), (13) у векторній формі.

## 2. Розв'язання векторної крайової задачі у просторі трансформант.

Розглянемо невідомі вектор трансформант переміщень  $\mathbf{y}(z)$ , матриці  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$ ,  $\mathbf{I}$  та диференціальний оператор  $\mathcal{L}_2$ :

$$\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} U_{p\lambda}(\xi) \\ W_{p\lambda}(\xi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x-1} \\ \frac{1}{x+1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mu} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_2 \mathbf{y}(\xi) \equiv \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}''(\xi) + 2\lambda_* \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}'(\xi) - \lambda_*^2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{y}(\xi) - \frac{p^2}{\alpha^2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}(\xi). \quad (14)$$

Перетворимо умови (13) за допомогою граничних функціоналів

$$U_0[\mathbf{y}(\xi)] = \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}(0), \quad U_1[\mathbf{y}(\xi)] = \lambda_* \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{y}(1) + \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{y}'(1). \quad (15)$$

З огляду на (14), (15), задачу (12), (13) запишемо у векторній формі

$$\mathcal{L}_2 \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{0}, \quad 0 < \xi < 1,$$

$$U_i[\mathbf{y}(\xi)] = \mathbf{Y}_i, \quad i = 0, 1, \quad (16)$$

де  $\mathbf{Y}_0 = (0, 0)^\top$ ,  $\mathbf{Y}_1 = (-A_* p_{p\lambda}, 0)^\top$ , символом « $\top$ » позначено операцію транспонування.

Розв'язок задачі (16) можна побудувати [13] у вигляді

$$\mathbf{y}(\xi) = \Psi_0(\xi) \cdot \mathbf{Y}_0 + \Psi_1(\xi) \cdot \mathbf{Y}_1, \quad (17)$$

де  $\Psi_i(\xi)$ ,  $i = 0, 1$ , – матрична базисна система розв'язків, яка є розв'язком задачі

$$\mathcal{L}_2 \Psi_i(\xi) = \mathbf{0}, \quad 0 < \xi < 1,$$

$$U_j[\Psi_i(\xi)] = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1,$$

де диференціальний оператор і граничні функціонали визначено формулами (14), (15),  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Методику побудови  $\Psi_i(\xi)$ ,  $i = 0, 1$ , викладено в [13]. Згідно з нею, спочатку отримаємо загальний розв'язок однорідного рівняння (16), розв'язавши однорідне матричне рівняння

$$\mathcal{L}_2 \mathbf{Y}(\xi) = \mathbf{0}, \quad 0 < \xi < 1, \quad (18)$$

де  $\mathbf{Y}(\xi)$  – невідома матриця порядку  $2 \times 2$ . Розв'язок цього рівняння будемо у формі  $\mathbf{Y}(\xi) = e^{\eta \xi} \cdot \mathbf{I}$ , звідки  $\mathcal{L}_2 e^{\eta \xi} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{M}(\eta) \cdot e^{\eta \xi}$  і

$$\mathbf{Y}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \mathbf{M}^{-1}(\eta) e^{\eta \xi} d\eta,$$

де  $C$  – замкнений контур, що містить усі полюси підінтегрального виразу. Цими полюсами будуть нулі визначника матриці  $\mathbf{M}^{-1}(\eta)$  вигляду

$$\mathbf{M}^{-1}(\eta) = \frac{\mathbf{M}_0(\eta)}{\det \mathbf{M}(\eta)},$$

де

$$\det \mathbf{M}(\eta) = \left( \eta^2 - \left( \sqrt{\lambda_*^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \right)^2 \right) \left( \eta^2 - \left( \sqrt{\lambda_*^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \frac{p^2}{\alpha^2}} \right)^2 \right),$$

$$\mathbf{M}_0(\eta) = \begin{pmatrix} \eta^2 - \left( \lambda_*^2 + \frac{p^2}{\alpha^2} \right) \frac{\alpha-1}{\alpha+1} & \frac{2\lambda_* \eta}{\alpha-1} \\ -\frac{2\lambda_* \eta}{\alpha+1} & \eta^2 - \lambda_*^2 \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{p^2}{\alpha^2} \end{pmatrix}.$$

Нехай  $\mathbf{Y}_{\mp}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{\eta\xi} \mathbf{M}_0(\eta) d\eta}{\det \mathbf{M}(\eta)}$  – розв’язки, що відповідають різним

полюсам. Зафіксувавши полюси  $\eta = \sqrt{\lambda_*^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}$ ,  $\eta = \sqrt{\lambda_*^2 + \frac{x-1}{x+1} \frac{p^2}{\alpha^2}}$  та контур  $C_+$ , що їх містить, маємо розв’язок  $\mathbf{Y}_+(\xi)$ , що зростає при  $\xi \rightarrow \infty$ . Зафіксувавши полюси  $\eta = -\sqrt{\lambda_*^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}$ ,  $\eta = -\sqrt{\lambda_*^2 + \frac{x-1}{x+1} \frac{p^2}{\alpha^2}}$  та контур  $C_-$ , маємо спадний розв’язок  $\mathbf{Y}_-(\xi)$ . Застосовуючи теорему про лишки, знаходимо розв’язок рівняння (18):

$$\mathbf{Y}_{\mp}(\xi) = \frac{\alpha}{2p^2} \left[ e^{\mp \frac{1}{\alpha} \Delta_0 \xi} \begin{pmatrix} \mp \Delta_0 & \frac{x+1}{x-1} \lambda \\ -\lambda & \pm \frac{x+1}{x-1} \frac{\lambda^2}{\Delta_0} \end{pmatrix} + e^{\mp \frac{1}{\alpha} \Delta_1 \xi} \begin{pmatrix} \pm \frac{\lambda^2}{\Delta_1} & -\frac{x+1}{x-1} \lambda \\ \lambda & \mp \frac{x+1}{x-1} \Delta_1 \end{pmatrix} \right],$$

де  $\Delta_0 = \sqrt{\lambda^2 + p^2}$ ,  $\Delta_1 = \sqrt{\lambda^2 + (x-1)p^2/(x+1)}$ .

З використанням методики [28] побудуємо базисні матриці

$$\Psi_j(\xi) = \mathbf{Y}_-(\xi) \mathbf{C}_j^0 + \mathbf{Y}_+(\xi) \mathbf{C}_j^1, \quad j = 0, 1,$$

де  $\mathbf{C}_j^i$ ,  $i, j = 0, 1$ , – матриці порядку  $2 \times 2$  зі сталими елементами:

$$\mathbf{C}_1^1 = \left( U_1[\mathbf{Y}_+] - U_1[\mathbf{Y}_-] \cdot (U_0[\mathbf{Y}_-])^{-1} \cdot U_0[\mathbf{Y}_+] \right)^{-1},$$

$$\mathbf{C}_1^0 = - (U_0[\mathbf{Y}_-])^{-1} \cdot U_0[\mathbf{Y}_+] \cdot \mathbf{C}_1^1,$$

а  $U_i[\mathbf{Y}_{\mp}]$ ,  $i = 0, 1$ , – значення спадного та зростаючого розв’язків однорідного рівняння (18) на граничних функціоналах, визначених у (15).

Задовольняючи граничні умови, отримуємо  $\mathbf{C}_1^0 = \mathbf{C}_1^1 = \mathbf{C}$ . Тоді вигляд базисної матриці спрощується:

$$\Psi_1(\xi) = (\mathbf{Y}_-(\xi) + \mathbf{Y}_+(\xi)) \cdot \mathbf{C}.$$

Остаточно маємо

$$\Psi_1(\xi) = \frac{\alpha}{\det \psi} \begin{pmatrix} \frac{3-x}{x-1} \frac{\lambda \psi_{11}}{2} & -\psi_{12} \\ \frac{3-x}{x-1} \frac{\psi_{21}}{2} & \lambda \psi_{22} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

де функції  $\psi_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ , наведено в **Додатку 1**, а

$$\det \psi = 2\lambda^2(2\lambda^2 + p^2) - \left( 4\lambda^4 + 2\lambda^2 p^2 + \frac{1}{2} p^4 \right) \operatorname{ch} \frac{\Delta_0}{\alpha} \operatorname{ch} \frac{\Delta_1}{\alpha} + \\ + \frac{\lambda^2}{\Delta_0 \Delta_1} \left( 4\lambda^4 + 2 \frac{3x+1}{x+1} \lambda^2 p^2 + \frac{5x-3}{x+1} \frac{p^4}{2} \right) \operatorname{sh} \frac{\Delta_0}{\alpha} \operatorname{sh} \frac{\Delta_1}{\alpha}.$$

Запишемо розв’язок (17) векторної крайової задачі (16) у вигляді

$$\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} U_{p\lambda}(\xi) \\ W_{p\lambda}(\xi) \end{pmatrix} = -A_* p_{p\lambda} \frac{\alpha}{\det \psi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{3-x}{x-1} \lambda \psi_{11} \\ -\psi_{12} \end{pmatrix}.$$

З використанням обернених перетворень Лапласа та Вебера відповідно за змінними  $p$  та  $\lambda$  отримаємо хвильове поле шару

$$\begin{pmatrix} U(\rho, \xi, \tau) \\ W(\rho, \xi, \tau) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} \begin{pmatrix} U_{p\lambda}(\xi) & \chi_1(\rho, \lambda) \\ W_{p\lambda}(\xi) & \chi_0(\rho, \lambda) \end{pmatrix} e^{p\tau} dp d\lambda.$$

Таким чином, запропонований у роботі метод дозволяє отримати точний розв'язок нестационарної задачі (1)–(4) у просторі інтегральних перетворень (10), (11).

Заміна крайової умови (2) на нижній грані шару на умову гладкого контакту  $u_z(r, 0, t) = 0$ ,  $\tau_{rz}(r, 0, t) = 0$  не змінює методики розв'язання задачі, а послідовне застосування інтегральних перетворень (10), (11) приводить до векторної одновимірної крайової задачі (16), де граничний функціонал має вигляд

$$U_0[\mathbf{y}(\xi)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(0) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}'(0).$$

Побудова базисних матричних розв'язків дозволяє отримати хвильове поле шару за викладеною вище процедурою.

**3. Розв'язок у випадку усталених коливань та аналіз числових розрахунків.** Позначимо через  $I^\circ$  випадок, коли на нижній границі шару задано умови жорсткого закріплення, а через  $II^\circ$  – випадок, коли на нижній границі задано умови гладкого контакту.

Числові розрахунки виконано для нормальних напружень на нижній границі шару та нормального напруження на поверхні циліндричного включення, коли на верхній границі шару діє динамічне стискальне навантаження. Наприклад, у випадку  $I^\circ$  нормальне напруження має вигляд

$$\sigma_\xi(\rho, \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_0^\infty \frac{P_{p\lambda}}{\det \Psi} \frac{\lambda \chi_0(\rho, \lambda)}{(J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda))} F(\xi, \lambda, p) e^{p\tau} dp d\lambda,$$

де

$$\begin{aligned} F(\xi, \lambda, p) = & -\lambda^2(2\lambda^2 + p^2) \left( \operatorname{ch} \left( \frac{\Delta_0}{\alpha} (1 - \xi) \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{\Delta_1}{\alpha} (1 - \xi) \right) \right) - \\ & - 2\lambda^2 \Delta_0 \Delta_1 \operatorname{sh} \left( \frac{\Delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{sh} \frac{\Delta_1}{\alpha} - \\ & - \frac{2\lambda^2}{\Delta_0 \Delta_1} \left( \lambda^2 + \frac{1}{2} p^2 \right)^2 \operatorname{sh} \frac{\Delta_0}{\alpha} \operatorname{sh} \left( \frac{\Delta_1}{\alpha} \xi \right) + \\ & + 2\lambda^4 \operatorname{ch} \left( \frac{\Delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{ch} \frac{\Delta_1}{\alpha} + 2 \left( \lambda^2 + \frac{1}{2} p^2 \right)^2 \operatorname{ch} \frac{\Delta_0}{\alpha} \operatorname{ch} \left( \frac{\Delta_1}{\alpha} \xi \right). \end{aligned}$$

Розглянемо детально випадок квазістатичного навантаження, заданого на верхній грані пружного шару. Покладемо  $p = i\omega$ , де  $\omega$  – частота коливань, у всіх попередніх формулах і отримаємо подання нормальних напружень для випадків  $I^\circ$ ,  $II^\circ$ :

$$\sigma_\xi(\rho, 0; \omega) = \int_1^\infty r p(ar) \int_0^\infty \frac{\chi_0(r, \lambda) \chi_0(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} \lambda \Phi^{(j)}(\lambda; \omega) d\lambda dr, \quad \rho \in [1, \infty),$$

– на нижній границі шару (підінтегральні функції для обох випадків наведено у **Додатку 2**);

$$\sigma_\rho(1, \xi; \omega) = \int_1^\infty r p(ar) \int_0^\infty \frac{\chi_0(r, \lambda) \lambda}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} F(\lambda, \xi; \omega) d\lambda dr, \quad \xi \in [0, 1],$$

– на циліндричній поверхні жорсткого включення, де

$$F(\lambda, \xi; \omega) = 2\lambda^2 \chi_1(1, \lambda) \Phi_2^{(j)}(\lambda, \xi; \omega) - \chi_0(1, \lambda) \Phi_3^{(j)}(\lambda, \xi; \omega),$$

а функції  $\Phi_k^{(j)}$ ,  $k = 2, 3$ , для обох випадків наведено у **Додатку 3**.

Обчислення виконано для сталевого шару з включенням, радіус якого дорівнює половині товщини шару ( $a = h/2$ ,  $\alpha = 1/2$ ), під дією нормального

до поверхні шару гармонічного навантаження  $p(r, t) = (r^2 + C^2)^{-1} e^{i\omega t}$ , де  $C$  – стала, для значень коефіцієнта Пуассона  $\mu = 1/4$  та  $\mu = 1/3$ . Частоту коливань взято  $\omega = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 3.0$ . Знайдено нормальне напруження на циліндричній поверхні жорсткого включення  $\sigma_\rho(1, \xi; \omega)$ ,  $\xi \in [0, 1]$ , та нормальне напруження на нижній грані шару  $\sigma_\xi(\rho, 0; \omega)$ ,  $\rho \in [1, \infty)$ , для випадків  $I^\circ$  та  $II^\circ$ . На рис. 2, рис. 3 наведено розподіли нормального напруження  $\sigma_\xi(\rho, 0; \omega)$  на нижній грані пружного шару, коли вона жорстко закріплена або спирається на гладку основу без тертя відповідно. Криві 1–5 відповідають частотам  $\omega = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 3.0$ . Зі збільшенням частоти коливань спостерігається зростання абсолютних значень нормальних напружень в обох випадках. Максимального значення напруження досягають навколо жорсткого включення, а з віддаленням від нього напруження зменшуються. Нормальні напруження за абсолютною величиною є істотно більшими, коли нижня грань шару жорстко закріплена. Для частот  $\omega > 3.0$  спостерігалась нестабільність розрахункового алгоритму, для подолання якої використали асимптотичні формули. Зміна знаку напружень на додатний дає змогу припускати наявність зон крайового резонансу, що буде перевірено у подальшому. На рис. 4, рис 5 наведено розподіли нормальних напружень на циліндричній поверхні жорсткого включення для випадків  $I^\circ$  та  $II^\circ$  відповідно. Значення напружень є істотно більшими для випадку жорсткого закріплення нижньої границі порівняно з напруженнями при заданні умов гладкого контакту. Зі зростанням частоти діючого на верхній границі шару навантаження величини нормальних напружень зростають, причому максимальних значень нормальних напруження досягають при підході до верхньої грані по циліндричній поверхні включення. Напруження є більшими для значення коефіцієнта Пуассона  $\mu = 1/3$  порівняно з випадком, коли  $\mu = 1/4$ .

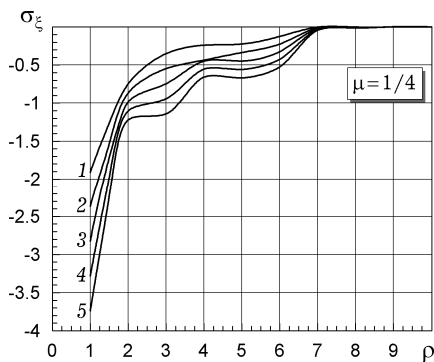


Рис. 2

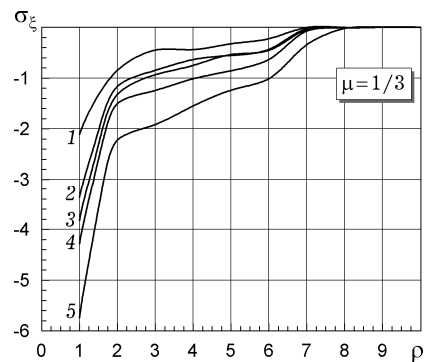


Рис. 3

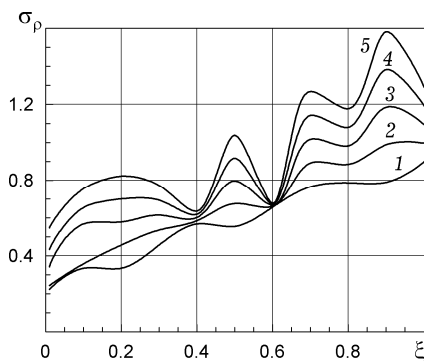


Рис. 4

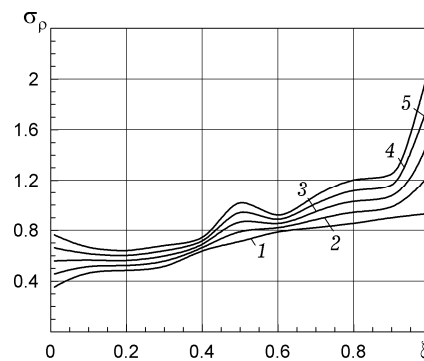


Рис. 5

**Висновки.** Отримано точний розв'язок нестационарної задачі для нескінченного пружного шару з циліндричним жорстким включенням, на поверхні якого задано умови гладкого контакту. Досліджено нормальні напруження на циліндричній поверхні включення та на нижній грані шару, що виникають під дією нормального осесиметричного динамічного навантаження, заданого на верхній грані шару, залежно від матеріалу та різних умов на нижній грані шару. Запропонований підхід можна застосувати при розв'язанні змішаних динамічних задач теорії пружності для інших типів крайових умов на бічних гранях шару та циліндричній поверхні дефекту.

### Додаток 1

Компоненти базисної матриці  $\Psi_1(\xi)$  у виразі (19):

$$\begin{aligned}\psi_{11} = & -(2\lambda^2 + p^2) \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}(1 - \xi)\right) - 2\lambda^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}(1 - \xi)\right) - \\ & - 2\Delta_0\Delta_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\xi\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\right) - \\ & - \frac{\lambda^2(2\lambda^2 + p^2)}{\Delta_0\Delta_1} \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\xi\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\right) + 2\lambda^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\xi\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\right) + \\ & + (2\lambda^2 + p^2) \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\xi\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\right), \\ \psi_{12} = & -\frac{\lambda^2(2\lambda^2 + p^2)}{\Delta_0} \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}(1 - \xi)\right) - 2\lambda^2\Delta_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}(1 - \xi)\right) + \\ & + 2\lambda^2\Delta_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\xi\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\right) + \frac{\lambda^2(2\lambda^2 + p^2)}{\Delta_0} \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\xi\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\right) - \\ & - \frac{2\lambda^4}{\Delta_0} \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\xi\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\right) - (2\lambda^2 + p^2)\Delta_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\xi\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

### Додаток 2

Підінтегральна функція для нормального напруження  $\sigma_\xi(\rho, 0; \omega)$ :

$$\Phi^{(j)}(\lambda; \omega) = \begin{cases} \Phi_0^{(j)}(\lambda; \omega), & \lambda < \omega, \\ \Phi_1^{(j)}(\lambda; \omega), & \lambda > \omega. \end{cases}$$

**Випадок  $I^0$**  (на нижній границі шару задано умови жорсткого закріплення,  $j = 0$ ):

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(0)}(\lambda; \omega) &= \frac{F_1(\lambda; \omega)}{\det \Psi_1}, & \Phi_0^{(0)}(\lambda; \omega) &= \frac{F_1^*(\lambda; \omega)}{\det \Psi_1^*}, \\ F_1(\lambda; \omega) &= \left(\frac{1}{2}\omega^2 - \lambda^2\right) \operatorname{ch}\frac{\delta_0}{\alpha} + \lambda^2 \operatorname{ch}\frac{\delta_1}{\alpha}, \\ \delta_0 &= \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, & \delta_1 &= \sqrt{\lambda^2 - \frac{x-1}{x+1}\omega^2}, \\ \det \Psi_1 &= 2\lambda^2(2\lambda^2 - \omega^2) - \left(4\lambda^4 - 2\lambda^2\omega^2 + \frac{1}{2}\omega^4\right) \operatorname{ch}\frac{\delta_0}{\alpha} \operatorname{ch}\frac{\delta_1}{\alpha} + \\ &+ \frac{\lambda^2}{\delta_0\delta_1} \left(4\lambda^4 - 2\frac{3x+1}{x+1}\lambda^2\omega^2 + \frac{5x-3}{x+1}\frac{\omega^4}{2}\right) \operatorname{sh}\frac{\delta_0}{\alpha} \operatorname{sh}\frac{\delta_1}{\alpha}, \\ F_1^*(\lambda; \omega) &= \left(\frac{1}{2}\omega^2 - \lambda^2\right) \cos\frac{\omega\delta_2}{\alpha} + \lambda^2 \cos\left(\frac{\omega\delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right), \\ \delta_2 &= \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}, & \delta_3 &= \sqrt{1 - \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2},\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\det \Psi_1^* &= 2\lambda^2(2\lambda^2 - \omega^2) - \left(4\lambda^4 - 2\lambda^2\omega^2 + \frac{1}{2}\omega^4\right) \times \\
&\times \cos \frac{\omega\delta_2}{\alpha} \cos \left(\frac{\omega\delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) + \\
&\lambda^2 \left(4\lambda^4 - 2\frac{3x+1}{x+1}\lambda^2\omega^2 + \frac{5x-3}{x+1}\frac{\omega^4}{2}\right) \\
&+ \frac{\omega^2\delta_2\delta_3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{\omega^2\delta_2\delta_3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \times \\
&\times \sin \frac{\omega\delta_2}{\alpha} \sin \left(\frac{\omega\delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right).
\end{aligned}$$

**Випадок II°** (на нижній границі шару задано умови гладкого контакту,  $j = 1$ ):

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(1)}(\lambda; \omega) &= \frac{F_2(\lambda; \omega)}{\det \Psi_2}, & \Phi_1^{(1)}(\lambda; \omega) &= \frac{F_2^*(\lambda; \omega)}{\det \Psi_2^*}, \\
F_2(\lambda; \omega) &= -\frac{1}{\delta_0\delta_1} \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right)^2 \operatorname{sh} \frac{\delta_0}{\alpha} + \lambda^2 \operatorname{sh} \frac{\delta_1}{\alpha}, \\
\det \Psi_2 &= -\frac{1}{\delta_0\delta_1} \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right)^2 \operatorname{sh} \frac{\delta_0}{\alpha} \operatorname{ch} \frac{\delta_1}{\alpha} - \lambda^2 \operatorname{ch} \frac{\delta_0}{\alpha} \operatorname{sh} \frac{\delta_1}{\alpha}, \\
F_2^*(\lambda; \omega) &= -\frac{\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right)^2}{\omega^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\delta_2\delta_3} \sin \frac{\omega\delta_2}{\alpha} + \lambda^2 \sin \left(\frac{\omega\delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right), \\
\det \Psi_2^* &= \frac{\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right)^2}{\omega^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\delta_2\delta_3} \sin \frac{\omega\delta_2}{\alpha} \cos \left(\frac{\omega\delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) - \\
&\quad - \lambda^2 \cos \frac{\omega\delta_2}{\alpha} \sin \left(\frac{\omega\delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right).
\end{aligned}$$

### Додаток 3

Підінтегральна функція для нормального напруження  $\sigma_p(1, \xi; \omega)$ :

$$\Phi_k^{(j)}(\lambda; \omega) = \begin{cases} \Phi_{k0}^{(j)}(\lambda; \omega), & \lambda < \omega, \\ \Phi_{k1}^{(j)}(\lambda; \omega), & \lambda > \omega, \end{cases} \quad k = 2, 3.$$

**Випадок I°** (на нижній границі шару задано умови жорсткого закріплення,  $j = 0$ ):

$$\begin{aligned}
\Phi_{21}^{(0)}(\lambda, \xi; \omega) &= \frac{F_3(\lambda, \xi; \omega)}{\det \Psi_1}, & \Phi_{31}^{(0)}(\lambda, \xi; \omega) &= \frac{F_4(\lambda, \xi; \omega)}{\det \Psi_1}, \\
F_3(\lambda, \xi; \omega) &= \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right) \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_0}{\alpha}(1 - \xi)\right) + \lambda^2 \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_1}{\alpha}(1 - \xi)\right) + \\
&\quad + \delta_0\delta_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_0}{\alpha}\xi\right) \operatorname{sh} \frac{\delta_1}{\alpha} + \frac{\lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right)}{\delta_0\delta_1} \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_1}{\alpha}\xi\right) \operatorname{sh} \frac{\delta_0}{\alpha} - \\
&\quad - \lambda^2 \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_0}{\alpha}\xi\right) \operatorname{ch} \frac{\delta_1}{\alpha} - \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right) \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_1}{\alpha}\xi\right) \operatorname{ch} \frac{\delta_0}{\alpha}, \\
F_4(\lambda, \xi; \omega) &= 2\lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right) \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_0}{\alpha}(1 - \xi)\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda^2 \left( 2\lambda^2 + \frac{3-x}{x+1} \omega^2 \right) \operatorname{ch} \left( \frac{\delta_1}{\alpha} (1-\xi) \right) + \\
& + 2\lambda^2 \delta_0 \delta_1 \operatorname{sh} \left( \frac{\delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{sh} \frac{\delta_1}{\alpha} + \\
& + \frac{\lambda^2}{\delta_0 \delta_1} \left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \left( 2\lambda^2 + \frac{3-x}{x+1} \omega^2 \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\delta_1}{\alpha} \xi \right) \operatorname{sh} \frac{\delta_0}{\alpha} - \\
& - 2\lambda^4 \operatorname{ch} \left( \frac{\delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{ch} \frac{\delta_1}{\alpha} - \\
& - \left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \left( 2\lambda^2 + \frac{3-x}{x+1} \omega^2 \right) \operatorname{ch} \left( \frac{\delta_1}{\alpha} \xi \right) \operatorname{ch} \frac{\delta_0}{\alpha}, \\
\Phi_{20}^{(0)}(\lambda, \xi; \omega) &= \frac{F_3^*(\lambda, \xi; \omega)}{\det \Psi_1^*}, \quad \Phi_{30}^{(0)}(\lambda, \xi; \omega) = \frac{F_4^*(\lambda, \xi; \omega)}{\det \Psi_1^*}, \\
F_3^*(\lambda, \xi; \omega) &= \left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \cos \left( \frac{\omega \delta_2}{\alpha} (1-\xi) \right) + \\
& + \lambda^2 \cos \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} (1-\xi) \right) + \\
& + \omega^2 \delta_2 \delta_3 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \sin \left( \frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi \right) \sin \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) + \\
& + \frac{\lambda^2}{\omega^2 \delta_2 \delta_3} \left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \sin \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \xi \right) \sin \frac{\omega \delta_2}{\alpha} - \\
& - \lambda^2 \cos \left( \frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi \right) \cos \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) - \\
& - \left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \cos \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \xi \right) \cos \frac{\omega \delta_2}{\alpha}, \\
F_4^*(\lambda, \xi; \omega) &= 2\lambda^2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \cos \left( \frac{\omega \delta_2}{\alpha} (1-\xi) \right) + \\
& + \lambda^2 \left( 2\lambda^2 + \frac{3-x}{1+x} \omega^2 \right) \cos \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} (1-\xi) \right) + \\
& + 2\lambda^2 \omega^2 \delta_2 \delta_3 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \sin \left( \frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi \right) \sin \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) + \\
& + \frac{\lambda^2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \left( 2\lambda^2 + \frac{3-x}{1+x} \omega^2 \right)}{\omega^2 \delta_2 \delta_3} \sin \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \xi \right) \times \\
& \times \sin \frac{\omega \delta_2}{\alpha} - 2\lambda^4 \cos \left( \frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi \right) \cos \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) - \\
& - \left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \left( 2\lambda^2 + \frac{3-x}{1+x} \omega^2 \right) \cos \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \xi \right) \cos \frac{\omega \delta_2}{\alpha}.
\end{aligned}$$

**Випадок II<sup>o</sup>** (на нижній границі шару задано умови гладкого контакту,  $j = 1$ ):

$$\begin{aligned}
\Phi_{21}^{(1)}(\lambda, \xi; \omega) &= \frac{F_5(\lambda, \xi; \omega)}{\det \Psi_2}, \quad \Phi_{31}^{(1)}(\lambda, \xi; \omega) = \frac{F_6(\lambda, \xi; \omega)}{\det \Psi_2}, \\
F_5(\lambda, \xi; \omega) &= - \frac{\left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \left( \lambda^2 - \frac{3-x}{1+x} \frac{\omega^2}{2} \right)}{2\delta_0 \delta_1} \operatorname{sh} \frac{\delta_0}{\alpha} \operatorname{ch} \left( \frac{\delta_1}{\alpha} \xi \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{ch} \left( \frac{\delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{sh} \frac{\delta_1}{\alpha}, \\
F_6(\lambda, \xi; \omega) &= - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2}{2\delta_0 \delta_1} \operatorname{sh} \frac{\delta_0}{\alpha} \operatorname{ch} \left( \frac{\delta_1}{\alpha} \xi \right) + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \left( \frac{\delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{sh} \frac{\delta_1}{\alpha}, \\
\Phi_{20}^{(1)}(\lambda, \xi; \omega) &= \frac{F_5^*(\lambda, \xi; \omega)}{\det \Psi_2^*}, \quad \Phi_{30}^{(1)}(\lambda, \xi; \omega) = \frac{F_6^*(\lambda, \xi; \omega)}{\det \Psi_2^*}, \\
F_5^*(\lambda, \xi; \omega) &= - \frac{\left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \left( \lambda^2 - \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\omega^2}{2} \right)}{2\omega^2 \delta_2 \delta_3 \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}}} \sin \frac{\omega \delta_2}{\alpha} \times \\
& \times \cos \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}} \xi \right) + \frac{\lambda^2}{2} \cos \left( \frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi \right) \sin \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}} \right), \\
F_6^*(\lambda, \xi; \omega) &= - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{2} \omega^2}{2\omega^2 \delta_2 \delta_3 \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}}} \sin \frac{\omega \delta_2}{\alpha} \cos \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}} \xi \right) + \\
& + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi \right) \sin \left( \frac{\omega \delta_3}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}} \right).
\end{aligned}$$

1. Агуф Е. И., Васильев В. З. Первая основная задача для слоя с круговым отверстием // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 4. – С. 68–77.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Некоторые осесимметричные контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием // Изв. АН АрмССР. Сер. Механика. – 1969. – 22, № 2. – С. 3–13.
3. Вишнеvский К. В., Кушнир Р. М. Граничные интегральные уравнения для тела с инородными включениями // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 1996. – 39, № 1. – С. 37–41.  
Te same: *Vishnevskii K. V., Kushnir R. M.* Boundary integral equations for a body with inhomogeneous inclusions // J. Math. Sci. – 1997. – 86, No. 2. – P. 2552–2555. – <https://doi.org/10.1007/BF02356095>.
4. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – Москва: Наука, 1979. – 319 с.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
6. Гринченко В. Г., Улитко А. Ф. Точное решение задачи о распределении напряжений около кругового отверстия в упругом слое // Прикл. механика. – 1968. – 4, № 10. – С. 38–45.  
Te same: *Grinchenko V. T., Ulitko A. F.* An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer // Sov. Appl. Mech. – 1968. – 4, No. 10. – P. 31–37. – <https://doi.org/10.1007/BF00886618>.
7. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
8. Кит Г. С., Михаськив В. В., Хай О. М. Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом теле методом граничных элементов // Прикл. математика и механика. – 2002. – 66, № 5. – С. 855–863.  
Te same: *Kit H. S., Mykhas'kiv V. V., Khaj O. M.* Analysis of the steady oscillations of a plane absolutely rigid inclusion in a three-dimensional elastic body by the boundary element method // J. Appl. Math. Mech. – 2002. – 66, No. 5. – P. 817–824. – [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)90012-2](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)90012-2).
9. Кит Г. С., Хай М. Б. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 288 с.
10. Малиц П. Я. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по цилиндрическим функциям и его применение в теории упругости // Устойчивость и прочность конструкций: Сб. науч. тр. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1978. – С. 93–99.

11. *Малиц П. Я., Приварников А. К.* Применение преобразований типа Вебера к решению задач теории упругости для слоистых сред с цилиндрическим отверстием // Вопросы прочности и пластичности: Сб. науч. тр. – Днепропетровск: Бюллетень изобретений, 1971. – С. 15–18.
12. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
13. *Попов Г. Я., Абдыманов С. А., Ефимов В. В.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы: Рауан, 1999. – 133 с.
14. *Попов Г. Я., Вайсфельд Н. Д.* Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса // Прикл. механика. – 2014. – **50**, № 6. – С. 27–38.  
Te same: *Popov G. Ya., Vaisfel'd N. D.* Solving an axisymmetric problem of elasticity for an infinite plate with a cylindrical inclusion with allowance for its specific weight // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No. 6. – P. 627–636.  
– <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0661-7>.
15. *Попов Г. Я., Вайсфельд Н. Д., Реут В. В.* Осесимметричное контактное взаимодействие бесконечной упругой плиты с абсолютно цилиндрическим жестким включением // Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твердого тела: Сб. статей. – Одесса: Астропринт, 2013. – С. 286–300с.
16. *Попов Г. Я., Процеров Ю. С.* Осесимметричная задача для упругого цилиндра конечной длины с заземленной боковой поверхностью при учете собственного веса // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 1. – С. 57–68.  
Te same: *Popov G. Ya., Protsеров Yu. S.* Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weigh // J. Math. Sci. – 2016. – **212**, No. 1. – P. 67–82.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2649-1>
17. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
18. *Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г.* Моделирование пульсовых волн давления при кардишунтировании // Кибернетика и системный анализ. – 2017. – **53**, № 1. – С. 16–25.
19. *Токовий Ю. В.* Зведення тривимірної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра до розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 1. – С. 49–60.  
Te same: *Tokovy Yu. V.* Reduction of a three-dimensional elasticity problem for a finite-length solid cylinder to the solution of systems of linear algebraic equations // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, No. 5. – P. 683–696.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1280-2>.
20. *Cheng Z.-Q., Batra R. C.* Exact Eshelby tensor for a dynamic circular cylindrical inclusion // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1999. – **66**, No. 2. – P. 563–565.  
– <https://doi.org/10.1115/1.2791087>.
21. *Lu M., Huang S., Yang X., Yang L., Mao R.* Semianalytical solution for the deformation of an elastic layer under an axisymmetrically distributed power-form load: application to fluid-jet-induced indentation of biological soft tissues // Biomed Res. Int. – 2017. – Article ID 9842037. – 10 p.  
– <https://doi.org/10.1155/2017/9842037>.
22. *Meleshko V. V., Tokovy Yu. V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J. Eng. Math. – 2013. – **78**, No. 1. – P. 143–166. – <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9524-y>.
23. *Mow C. C., Mente L. J.* Dynamic stresses and displacements around cylindrical discontinuities due to plane harmonic shear waves // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1963. – **30**, No. 4. – P. 598–604. – <https://doi.org/10.1115/1.3636625>.
24. *Selvadurai A. P. S., Rajapakse R. K. N. D.* On the load transfer from a rigid cylindrical inclusion into an elastic half space // Int. J. Solids Struct. – 1985. – **21**, No. 12. – P. 1213–1229.  
– [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(85\)90005-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(85)90005-8).
25. *Si L. T., Zhao Y., Zhang Y. H., Ouyang H.* Random vibration of an elastic half-space subjected to a moving stochastic load // Comput. & Struct. – 2016. – **168**. – P. 92–105. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.02.013>.
26. *Stoyan V. A., Dvirnychuk K. V.* Mathematical modeling of direct and inverse problems of dynamics of thick elastic layer. Part I. Mathematical modeling of the field of transverse dynamic displacements of layer // J. Automat. Inform. Sci. – 2016. – **48**, No. 7. – P. 55–64. – <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i7.60>.

27. Youngdahl C. K., Sternberg E. Three-dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1966. – **33**, No. 4. – P. 855–865. – <https://doi.org/10.1115/1.3625193>.
28. Zhou Y., Zheng R.-Y., Liu G.-B. Dynamic response of elastic layer on transversely isotropic saturated soil to train load // Rock Soil Mech. – 2011. – **32**, No. 2. – P. 604–610.

#### ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Построено точное решение нестационарной задачи для упругого слоя с цилиндрическим жестким включением, на цилиндрической поверхности которого заданы условия гладкого контакта. На одной из граней слоя задана осесимметричная нормальная нестационарная сжимающая нагрузка, а другая грань сцеплена с абсолютно жестким основанием или опирается на гладкое основание без трения. Для построения полей перемещений и напряжений в слое к осесимметричным уравнениям движения последовательно применены интегральные преобразования Лапласа и Вебера, что приводит к неоднородной векторной краевой задаче относительно неизвестных трансформант перемещений. Задача решена с использованием матричного дифференциального исчисления. Исследованы нормальные напряжения на цилиндрической поверхности включения и на нижней грани упругого слоя. Решение проанализировано для случая квазистатических колебаний.

**Ключевые слова:** бесконечный упругий слой, цилиндрическое жесткое включение, динамическая задача, интегральные преобразования.

#### AN EXACT SOLUTION TO A NONSTATIONARY PROBLEM FOR AN ELASTIC LAYER WITH A CYLINDRICAL RIGID INCLUSION

An exact solution to a problem for an infinite elastic layer with a cylindrical rigid inclusion is constructed under the smooth-contact conditions imposed on the cylindrical surface of the inclusion. On one of the faces of the layer, an axisymmetric normal non-stationary compression load is given; the other face is either perfectly fixed to an absolutely rigid foundation or supported on a smooth foundation without friction. To construct the displacement and stresses fields in the layer, the Laplace and Weber integral transforms are applied successively to the axisymmetric equations of motion, which yields a inhomogeneous vector boundary-value problem with respect to unknown transformants of the displacements. The problem is solved using the matrix differential calculus. The normal stresses on the cylindrical surface of the inclusion and on the lower face of the elastic layer are studied. For the case of quasistatic oscillations the solution is analyzed in detail.

**Key words:** infinite elastic layer, cylindrical rigid inclusion, dynamic problem, integral transformations.

Одеск. нац. ун-т ім. І. І. Мечнікова, Одеса

Одержано  
21.02.18