УДК 517.972+531.12: 530.12

Пам'яті Віталія Яковича Скоробогатька присвячується

Р. Я. Мацюк[✉]

РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА ПОСТІЙНОЇ КРИВИНИ

Розглядається обернена варіаційна задача для ліній постійної кривини у (псевдо-)евклідових дво-, три- та чотиривимірних просторах. Отримані висновки мають фізичний зміст у випадку релятивістської механіки частинок.

Ключові слова: *релятивістська механіка, обернена варіаційна задача, (псевдо-)евклідовий простір, геодезійні постійної кривини.*

Вступ. Ця стаття присвячена огляду деяких здобутків у застосуванні однієї пропозиції Віталія Яковича Скоробогатька щодо побудови n-точкової геометрії в просторах Евкліда (різних вимірностей) і в просторі Мінковського спеціальної теорії відносності. Пропозицію висловлено в статті [3], і в найпростішій інтерпретації вона полягає у знаходженні принципу найменшої дії для таких ліній $x^\alpha(s)$ у просторі, які мають постійну першу кривину Френе k, тобто задовольняють рівняння третього порядку $\dfrac{dk}{ds} = 0$. У будь-якому просторі можна розглядати параметризовані криві та непараметризовані криві. Якщо криву задати функціями $x^\alpha(\zeta)$, то у випадку, коли розв'язками диференціального рівняння є непараметризовані криві, а саме рівняння, якому підпорядкована вектор-функція $x^\alpha(\zeta)$, повинно бути параметрично-інваріантним, тобто містити усі розв'язки, які відрізняються довільною заміною параметра ζ уздовж кривої. Для того щоб вивести диференціальне рівняння варіаційного типу (тобто векторне рівняння, для якого можна в принципі вказати ту чи іншу локально означену функцію Ляґранжа), корисно поєднати два критерії: критерій варіаційності і критерій симетрії самого рівняння відносно групи перетворень простору. Отримані далі результати матимуть однаковий вигляд як для евклідового, так і для псевдо-евклідового простору, а відмінність у формулах міститиметься в означенні скалярного добутку (тобто у сиґнатурі метричного тензора).

1. Варіаційність і параметрична інваріантність. Критерій варіаційності диференціального рівняння виражається у певних обмеженнях на вигляд рівняння і докладно описаний у праці [5]. Для того щоб система виразів $\mathcal{E}_\alpha\left(x^\beta, \dfrac{dx^\beta}{d\zeta}, \dfrac{d^2x^\beta}{d\zeta^2}, \dfrac{d^3x^\beta}{d\zeta^3}\right)$ могла бути лівою частиною деякого автономного векторного рівняння Ойлера – Пуассона $\mathcal{E}_\alpha = 0$, вона повинна мати вигляд

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{A}_{\alpha\beta}\dddot{x}^\beta + (\ddot{x}^\gamma \partial_{\dot{x}^\gamma})\mathcal{A}_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + \mathcal{B}_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + \mathcal{C}_\alpha . \tag{1}$$

У цьому виразі матриця $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ повинна бути антисиметричною, і обидві матриці, $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ та $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$, а також стовпець $\mathcal{C}_\alpha$ можуть залежати від змінних x^β і їх похідних $\dot{x}^\beta$.

Якщо рівняння (1) виявиться параметрично-інваріантним, кожен його розв'язок $x^i(t)$ можна буде записати у вигляді графіка деякої вектор-функції, на одиницю меншої вимірності, де індекс i пробігає на одиницю меншу кількість значень, ніж індекс α. Якщо простір має n вимірів, то можна вважати, що індекс α пробігає значення $0,1,\ldots,n-1$, тоді як індекс i про-

[✉] romko.b.m@gmail.com

бігає значення $1,\ldots,n-1$. Змінну x^0 у цьому випадку перепозначимо через t. Функції $x^i(t)$ тепер задовольнятимуть векторне варіаційне рівняння $E_i = 0$ з лівою частиною, подібною до (1):

$$E_i = A_{ij}x'''^j + (x''^\ell \partial_{x'^\ell})A_{ij}x''^j + B_{ij}x''^j + c_i . \tag{2}$$

У цьому рівнянні штрихами позначено похідні за змінною t, а антисиметрична матриця A_{ij} та матриця B_{ij} разом зі стовпцем c_i залежать, окрім як від змінних x^i та їх похідних x'^i, ще й від змінної t. Як у виразі (1), так і у виразі (2) ці змінні коефіцієнти повинні задовольняти певну систему рівнянь із частинними похідними, з якої можна пробувати їх визначити, додаючи за необхідності ще й умову симетрії, накладену на саме варіаційне рівняння. Умова симетрії означає незмінність рівняння відносно дії групи (псевдо-)евклідових перетворень простору в тому розумінні, що ці перетворення зберігають множину розв'язків рівняння. Зауважимо, що не йдеться про незмінність лівої частини диференціального рівняння, радше мова про те, що перетворена ліва частина рівняння виражається через ліву частину вихідного рівняння. Ця умова, у свою чергу, також виливається в певну («визначальну») систему рівнянь із частинними похідними на змінні коефіцієнти шуканого рівняння. Обидві умови, варіаційності і незмінності, накладені окремо або разом, можуть і не мати розв'язку, але, з іншого боку, можуть втілитися в єдиному розв'язку.

Змінні коефіцієнти у виразах (1) і (2) пов'язані такими співвідношеннями:

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{1}{\dot t^2}A_{ij}, \qquad \mathcal{B}_{ij} = \frac{1}{\dot t}B_{ij}, \qquad \mathcal{C}_i = \dot t c_i ,$$

$$\mathcal{A}_{0i} = \frac{1}{\dot t^2}A_{ij}x'^j, \quad \mathcal{B}_{0i} = -\frac{1}{\dot t}B_{ij}x'^j, \quad \mathcal{B}_{00} = \frac{1}{\dot t}B_{0i}x'^i, \quad \mathcal{C}_0 = -\dot t c_i x'^i ,$$

$$\mathcal{E}_i = \dot t^3\left[A_{ij}x'''^j + (x''^j\partial_{x'^j})A_{ij}x''^j + \frac{1}{\dot t}B_{ij}x''^j + \frac{1}{\dot t^3}c_i\right]. \tag{3}$$

Вирази $\mathcal{E}_\alpha$ задовольняють умову Вейєрштрасса:

$$\dot t\mathcal{E}_0 + \dot x^i\mathcal{E}_i = 0. \tag{4}$$

2. Двовимірний простір. У цьому просторі не може бути параметрично-інваріантного варіаційного рівняння, оскільки кожна антисиметрична матриця розміру один в рівнянні (2) є тривіальним нулем. Зате рівняння вигляду (1), яке має розв'язками геодезійні постійної кривини, вдається отримати [4]:

$$\boxed{\frac{\varepsilon_{\alpha\beta}\dddot x^\beta}{(\dot x_\beta\dot x^\beta)^{3/2}} - 3\frac{\dot x_\beta\ddot x^\beta}{(\dot x_\beta\dot x^\beta)^{5/2}}\varepsilon_{\alpha\beta}\ddot x^\beta + m\frac{(\dot x_\beta\dot x^\beta)\ddot x_\alpha - (\dot x_\beta\ddot x^\beta)\dot x_\alpha}{(\dot x_\beta\dot x^\beta)^{3/2}} = 0}. \tag{5}$$

Через $\varepsilon_{\alpha\beta}$ позначено символ Леві-Чивіти $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Функцією Ляґранжа для рівняння (5) є

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}\dot x^\alpha\ddot x^\beta}{(\dot x_\beta\dot x^\beta)^{3/2}} - m\sqrt{\dot x_\beta\dot x^\beta} .$$

Запровадимо позначення

$$\boldsymbol{u} = (u^\alpha) = (\dot x^\alpha) \tag{6}$$

і нагадаємо означення скалярного добутку та норми дво-векторів:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{z})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{w}) \,,$$

$$\|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})} \,,$$

або в координатах:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{z}) = 2(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})_{\alpha\beta} (\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{z})^{\alpha\beta} = a_{[\alpha} b_{\beta]} w_{[\alpha} z_{\beta]} \,.$$

Щоб переконатися у тому, що інтеґральні криві рівняння (5) всі мають постійну кривину:

$$k = \frac{\|\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|^3}, \tag{7}$$

спочатку знайдемо похідну від виразу (7):

$$\dot{k} = \frac{(\boldsymbol{u} \wedge \dot{\boldsymbol{u}}) \cdot (\boldsymbol{u} \wedge \ddot{\boldsymbol{u}})}{\|\boldsymbol{u}\|^3 \, \|\boldsymbol{u} \wedge \dot{\boldsymbol{u}}\|} - 3 \frac{\|\boldsymbol{u} \wedge \dot{\boldsymbol{u}}\| (\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})}{\|\boldsymbol{u}\|^5} \,. \tag{8}$$

Тепер розв'яжемо рівняння (5) щодо змінної $\ddot{\boldsymbol{u}}$, згорнувши його з контраваріантним символом Леві-Чивіти $e^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\frac{\ddot{u}^{\alpha}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} = 3 \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})}{\|\boldsymbol{u}\|^5} \dot{u}^{\alpha} + m \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) e^{\beta\alpha} \dot{u}_{\beta} - (\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}) e^{\beta\alpha} u_{\beta}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} \,. \tag{9}$$

Далі підставляємо вираз (9) до виразу (8):

$$\begin{aligned} \dot{k} = 3 \frac{(\boldsymbol{u} \wedge \dot{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{u} \wedge \dot{\boldsymbol{u}}) \cdot (\boldsymbol{u} \wedge \ddot{\boldsymbol{u}})}{\|\boldsymbol{u}\|^5} + \frac{m}{\|\boldsymbol{u}\|^3} [(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u})^2 e^{\beta\alpha} \dot{u}_{\alpha} \dot{u}_{\beta} - \\ - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})(e^{\beta\alpha} + e^{\alpha\beta}) u_{\alpha} \dot{u}_{\beta} + (\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})^2 e^{\beta\alpha} u_{\beta} u_{\alpha}] - \\ - 3 \frac{\|\boldsymbol{u} \wedge \dot{\boldsymbol{u}}\| (\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})}{\|\boldsymbol{u}\|^5} = 0 \,. \end{aligned}$$

Узагальнення до ріманового простору отримано в праці [4].

3. Тривимірний простір. У цьому просторі вже можна шукати параметрично-інваріантне варіаційне рівняння для непараметризованих кривих. Спосіб його отримання докладно описано в праці [5]. Виявляється, що задача про визначення параметрично-інваріантного варіаційного рівняння третього порядку в тривимірному (псевдо-)евклідовому просторі, незмінного під дією (псевдо-)евклідової групи перетворень цього простору, розв'язується однозначно. Цікаво, що тут немає потреби апріорі накладати вимогу постійності кривини Френе уздовж розв'язку шуканого рівняння. Навпаки, ця властивість появляється *автоматично*. Параметрично-інваріантне варіаційне рівняння у змінних (6) виглядає так:

$$\boxed{\frac{\ddot{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} - 3 \frac{(\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^5} \dot{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{u} + m \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) \dot{\boldsymbol{u}} - (\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} = 0} \,. \tag{10}$$

Щоб переконатися у тому, що розв'язки рівняння (10) мають постійну кривину Френе, параметризуємо його розв'язки вздовж довжини дуги s, позначивши похідні за s нижнім індексом:

$$\boldsymbol{u}_s = u^{\alpha}{}_s = \dot{x}^{\alpha}{}_s = \frac{dx^{\alpha}}{ds}, \qquad \boldsymbol{u}_s = u^{\alpha}{}_s = \dot{x}^{\alpha}{}_s = \frac{dx^{\alpha}}{ds} \,,$$

так що

$$\boldsymbol{u}_s \cdot \boldsymbol{u}_s = 1, \quad \boldsymbol{u}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s = 0, \quad \boldsymbol{u}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s = -\dot{\boldsymbol{u}}_s{}^2, \quad \ddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \boldsymbol{u}_s = -3 \dot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s \,. \tag{11}$$

У таких змінних рівняння (10) набуває вигляду

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_s \times \boldsymbol{u}_s + m\dot{\boldsymbol{u}}_s = \boldsymbol{0}, \tag{12}$$

а формула кривини – вигляду

$$k = \|\dot{\boldsymbol{u}}_s\|. \tag{13}$$

Знайдемо похідну від виразу (13):

$$\frac{dk}{ds} = \frac{\dot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_s\|}. \tag{14}$$

Рівняння (12) множимо векторно на $\dot{\boldsymbol{u}}_s$:

$$(\dot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s)\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{0},$$

яке далі множимо скалярно на $\boldsymbol{u}_s$:

$$(\dot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s) = 0$$

і підставляємо до (14), що й виноситься на $\dot{k} = 0$.

Обчислимо величину скруту (другої кривини Френе) $\tau = \dfrac{\boldsymbol{u}_s \cdot (\dot{\boldsymbol{u}}_s \times \ddot{\boldsymbol{u}}_s)}{k^2}$.
З формули (12) негайно отримуємо

$$\tau = \frac{\dot{\boldsymbol{u}}_s \cdot (\ddot{\boldsymbol{u}}_s \times \boldsymbol{u}_s)}{k^2} = -m,$$

тобто інтеґральні криві є гвинтовими лініями.

Коли $m = 0$, ці ґвинтові лінії стають плоскими і звуться геодезійними колами. Для евклідової метрики це звичайні кола довільного радіусу. У лоренцовій метриці маємо гіперболи, а у випадку (2+1)-вимірної спеціальної теорії відносності мова йде про світові лінії релятивіського рівноприскореного руху.

4. Чотиривимірний простір-час. Викладені далі геометричні відомості про варіаційну задачу в чотиривимірному просторі без особливих змін стосуються як евклідового випадку, так і (псевдо-)евклідового. З огляду на те, що висновки цієї праці отримують цікаву інтерпретацію в релятивіській теорії, домовимось розглядати саме простір-час Мінковського з лоренцовою метрикою

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1). \tag{15}$$

У попередніх працях [2, 5] показано, що рівняння (10) описує просторово-плоский рух релятивіської дзиґи з постійним спіном величини σ, який скерований перпендикулярно до площини руху, і з масою $m_0 = -m\sigma$. Виходячи з цього, розглянемо рівняння руху вільної релятивіської дзиґи в просторі Мінковського спеціальної теорії відносності.

У праці [2] показано, що рівняння Матіссона – Папапетру, які описують динаміку релятивіської дзиґи зі спіном σ^α, при долученні до них так званої *додаткової умови* Матіссона – Пірані,

$$\sigma^\alpha u_\alpha = 0, \tag{16}$$

набувають у просторі Мінковського вигляду

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}\ddot{u}^\beta u^\gamma \sigma^\mu - 3\frac{\dot{u}_\beta u^\beta}{u_\beta u^\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}\dot{u}^\beta u^\gamma \sigma^\mu - m_0(u_\beta u^\beta \dot{u}_\alpha - \dot{u}_\beta u^\beta u_\alpha) = 0, \tag{17}$$

де чотири-вектор спіну σ^α вже є постійним як за величиною, так і за напрямом.

Твердження 1. *Рівняння* (17) *є параметрично-інваріантним.*

Д о в е д е н н я. При заміні параметра уздовж інтеґральної кривої, $\zeta \to \xi$ похідні перетворюються відповідно, $\boldsymbol{u}_\zeta \to \boldsymbol{u}_\xi$, за таким правилом:

$$\boldsymbol{u}_\zeta = \xi'_\zeta \boldsymbol{u}_\xi ,$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_\zeta = \xi''_\zeta \boldsymbol{u}_\xi + \xi'^2_\zeta \dot{\boldsymbol{u}}_\xi ,$$

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_\zeta = \xi'''_\zeta \boldsymbol{u}_\xi + 3\xi''\xi'_\zeta \dot{\boldsymbol{u}}_\xi + \xi'^3_\zeta \ddot{\boldsymbol{u}}_\xi . \tag{18}$$

Позначимо ліву частину рівняння (17) через $\mathcal{E}_\alpha(u^\beta, \dot{u}^\beta, \ddot{u}^\beta)$. Враховуючи формули (18) у рівнянні (17), отримуємо у результаті

$$\mathcal{E}_\alpha({u_\zeta}^\beta, {\dot{u}_\zeta}^\beta, {\ddot{u}_\zeta}^\beta) = \xi'^4_\zeta \mathcal{E}_\alpha({u_\xi}^\beta, {\dot{u}_\xi}^\beta, {\ddot{u}_\xi}^\beta) . \qquad \blacklozenge$$

Можемо, отже, за параметр уздовж геодезійної вибрати довжину дуги s, і тоді рівняння (17) набуде простішого вигляду

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} {\ddot{u}_s}^\beta {u_s}^\gamma \sigma^\mu - m_0 \dot{u}_{s\alpha} = 0 . \tag{19}$$

Легко побачити, згорнувши рівняння (19) з вектором $\ddot{\boldsymbol{u}}_s$, що воно має першим інтеґралом кривину інтеґральної кривої $k = \sqrt{\dot{u}_{s\alpha} {\dot{u}_s}^\alpha}$.

Тепер спробуємо позбутися (постійної) векторної величини σ^α шляхом підвищення порядку рівняння (19). Але спочатку згорнемо рівняння (19) з контраваріантною величиною $e^{\alpha\nu\rho\lambda} u_{s\rho} \sigma_\lambda$ за першим індексом, використовуючи відому формулу

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} e^{\alpha\nu\rho\lambda} = \delta^{\nu\rho\lambda}_{\beta\gamma\mu} , \tag{20}$$

де $\delta^{\nu\rho\lambda}_{\beta\gamma\mu}$ – узагальнений символ Кронекера. Для спрощення запису опустивши індекс s, отримуємо

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} \ddot{u}^\beta u^\gamma \sigma^\mu e^{\alpha\nu\rho\lambda} u_\rho \sigma_\lambda &= \delta^{\nu\rho\lambda}_{\beta\gamma\mu} \ddot{u}^\beta u^\gamma \sigma^\mu u_\rho \sigma_\lambda = \\
&= \ddot{u}^\nu u^\rho \sigma^\lambda u_\rho \sigma_\lambda + \ddot{u}^\lambda u^\nu \sigma^\rho u_\rho \sigma_\lambda + \ddot{u}^\rho u^\lambda \sigma^\nu u_\rho \sigma_\lambda - \\
&\quad - \ddot{u}^\lambda u^\rho \sigma^\nu u_\rho \sigma_\lambda - \ddot{u}^\nu u^\lambda \sigma^\rho u_\rho \sigma_\lambda - \ddot{u}^\rho u^\nu \sigma^\lambda u_\rho \sigma_\lambda = \\
&= \sigma^\lambda \sigma_\lambda (\ddot{u}^\nu - \ddot{u}^\rho u_\rho u^\nu) = \sigma^\lambda \sigma_\lambda (\ddot{u}^\nu + k^2 u^\nu) .
\end{aligned}$$

Тут використано двічі продиференційовану умову (11) унітарності чотиривектора швидкості $\boldsymbol{u}_s$ і формулу (13). Рівняння (19) набуває вигляду

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 ({\ddot{u}_s}^\nu + k^2 {u_s}^\nu) = m_0 e^{\alpha\nu\rho\lambda} \dot{u}_{s\alpha} u_{s\rho} \sigma_\lambda . \tag{21}$$

Далі диференціюємо рівняння (21) і в отримане рівняння замість правої частини підставляємо (19), врахувавши знак визначника метричного тензора, тобто

$$e_{\alpha\nu\rho\lambda} = \det(g_{\mu\beta}) \varepsilon_{\alpha\nu\rho\lambda} = -\varepsilon_{\alpha\nu\rho\lambda} , \tag{22}$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 (\dddot{\boldsymbol{u}}_s + k^2 \dot{\boldsymbol{u}}_s) = m_0^2 \dot{\boldsymbol{u}}_s . \tag{23}$$

Сталі величини в цьому рівнянні можемо подати також через величину чотири-вектора кількості руху

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{m_0}{\|\boldsymbol{u}\|} u_\alpha + \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|^3} \varepsilon_{\beta\gamma\lambda\alpha} \dot{u}^\beta u^\gamma \sigma^\lambda . \tag{24}$$

На підставі формул (7), (20) і (22) підраховуємо довжину чотири-вектора $\boldsymbol{\mathcal{P}}$:

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}^\alpha = -\varepsilon_{\beta\gamma\lambda\alpha} e^{\rho\nu\mu\alpha} \dot{u}^\beta u^\gamma \sigma^\lambda \dot{u}_\rho u_\nu \sigma_\mu = m_0{}^2 - k^2 \boldsymbol{\sigma}^2. \tag{25}$$

З формули (24) маємо

$$\frac{\boldsymbol{\mathcal{P}} \cdot \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} = m_0. \tag{26}$$

Тепер справа за домовленостями. Якщо обмежимося тією віткою рівняння (17), де $\mathcal{P}^2 > 0$, тоді величина

$$\omega^2 = -\frac{\mathcal{P}^2}{\boldsymbol{\sigma}^2} = -\frac{m_0^2}{\boldsymbol{\sigma}^2} + k^2 > 0, \tag{27}$$

оскільки з виразу (16) випливає, що чотири-вектор спіну $\boldsymbol{\sigma}$ (в нетривіальному випадку) повинен бути просторовоподібним, $\boldsymbol{\sigma}^2 < 0$. Рівняння (23) набуває вигляду

$$\boxed{\dddot{\boldsymbol{u}}_s + \omega^2 \dot{\boldsymbol{u}}_s = \boldsymbol{0}}. \tag{28}$$

Рівняння (28) має наслідок

$$\dddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{0}. \tag{29}$$

Врахувавши продиференційовану тричі умову унітарності чотири-вектора швидкості $\boldsymbol{u}_s$ (11), отримуємо ще один наслідок:

$$\frac{d}{ds} k^2 = \dot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s = 0, \tag{30}$$

що, зрештою, і було закладено в рівнянні (19).

Згорнувши рівняння (28) з вектором $\ddot{\boldsymbol{u}}_s$, отримаємо ще один інтеґрал руху, $\ddot{\boldsymbol{u}}_s{}^2$:

$$\frac{d}{ds} \ddot{\boldsymbol{u}}_s{}^2 = 2\dddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s = 0. \tag{31}$$

Проаналізуємо, як поводиться функція скруту τ на розв'язках рівняння (28). З відомого співвідношення

$$\tau k^2 = \|\boldsymbol{u}_s \wedge \dot{\boldsymbol{u}}_s \wedge \ddot{\boldsymbol{u}}_s\| \tag{32}$$

на підставі (11) отримуємо

$$\tau^2 k^4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_s \cdot \boldsymbol{u}_s & \boldsymbol{u}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s & \boldsymbol{u}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s \\ \dot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \boldsymbol{u}_s & \dot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s & \dot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s \\ \ddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \boldsymbol{u}_s & \ddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s & \ddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -k^2 \\ 0 & k^2 & k\dfrac{dk}{ds} \\ -k^2 & k\dfrac{dk}{ds} & \ddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s \end{vmatrix} =$$

$$= \ddot{\boldsymbol{u}}_s{}^2 k^2 - k^6 - k^2 \left(\frac{dk}{ds}\right)^2. \tag{33}$$

Звідси з огляду на (30) і (31) встановлюємо, що τ, як і k, також є інтеґралом руху і виконується співвідношення

$$\frac{\ddot{\boldsymbol{u}}_s{}^2}{\dot{\boldsymbol{u}}_s{}^2} = k^2 + \tau^2. \tag{34}$$

Твердження 2. *Рівняння (28) є рівноцінним до такої системи (яка просто означає, що закріпляємо інтеґрал руху* $\dfrac{\ddot{\boldsymbol{u}}_s{}^2}{\dot{\boldsymbol{u}}_s{}^2}$*):*

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{u}}_s + \dfrac{\ddot{\boldsymbol{u}}_s{}^2}{\dot{\boldsymbol{u}}_s{}^2}\dot{\boldsymbol{u}}_s = 0, & (\mathbf{I}) \\ \omega^2 = \dfrac{\ddot{\boldsymbol{u}}_s{}^2}{\dot{\boldsymbol{u}}_s{}^2}. & (\mathbf{II}) \end{cases} \qquad (35)$$

Д л я д о в е д е н н я потрібно показати, що вираз $\dfrac{\ddot{\boldsymbol{u}}_s{}^2}{\dot{\boldsymbol{u}}_s{}^2}$ дійсно є інтеґралом руху для рівняння (**I**) в системі (35). Формулу (30) отримуємо, дослівно повторивши з рівнянням (**I**) в (35) операції, які раніше були застосовані до рівняння (28). Формулу (31) отримуємо, згорнувши рівняння (**I**) в (35) з вектором $\ddot{\boldsymbol{u}}_s$ і застосувавши вже справджену формулу (30). ♦

4.1. Варіаційне формулювання механіки постійної кривини в чотиривимірному просторі-часі. У цій частині статті покажемо, як знайти непараметризоване варіаційне рівняння, множина розв'язків якого містила би розв'язки рівняння (28). Здавалось би, що для рівняння (28) функцією Ляґранжа може бути вираз

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} - \frac{\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}}{\omega^2}\right), \qquad (36)$$

який пропонувався в праці [7] (Це одна з перших робіт щодо тремтливості («Zitterbewegung» квазі-класичного спіну, на яку покликаються і сьогодні [6]). Але це не так. Рівняння (28) записане при умові в'язі (11). Його легко отримати з функції Ляґранжа (36), коли забути, що індексом s позначено натуральний параметр, тобто забути й про в'язь (11), якій підлягає диференціювання за натуральним параметром. Тоді індекс s можна опустити. Але рівняння

$$\ddot{\boldsymbol{u}} + \omega^2\dot{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}, \qquad (37)$$

яке отримується з варіаційної задачі

$$\delta\int -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} - \frac{\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}}{\omega^2}\right)d\zeta = 0, \qquad (38)$$

як і сама варіаційна задача (38), не є непараметризованим, тобто воно не дозволяє свободи вибору параметра ζ вздовж його розв'язків, і не маємо права вважати, що незалежною змінною в ньому є s. *Рівняння* (28) *не є рівнянням* (37) *і його не можна отримати з варіаційного принципу* (38). У варіаційній задачі з функцією Ляґранжа (36) закладена в'язь (11). Однак неможливо «перекидати» цю в'язь прямо на рівняння руху (37), вважаючи змінну інтеґрування вільною, як це є в задачі (38). Зараз це покажемо.

Розглянемо, отже, варіаційну задачу з функцією Ляґранжа (36) і в'яззю

$$\psi = u_\alpha u^\alpha - 1. \qquad (39)$$

Варіаційне рівняння має вигляд

$$-\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\boldsymbol{u}}\right) + \frac{d^2}{d\zeta^2}\left(\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\dot{\boldsymbol{u}}}\right) - \frac{d}{d\zeta}\left(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{u}}\right) = 0,$$

або (після множення на ω^2 і з урахуванням в'язі (39))

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_s + (1-2\lambda)\,\omega^2\dot{\boldsymbol{u}}_s - 2\frac{d\lambda}{ds}\,\omega^2\boldsymbol{u}_s = \mathbf{0}. \qquad (40)$$

Для визначення λ і $\dfrac{d\lambda}{ds}$ рівняння (40) згортаємо спочатку з $\dot{\boldsymbol{u}}_s$, а пізніше з $\boldsymbol{u}_s$ і використовуємо (11):

$$1 - 2\lambda = -\frac{\dddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s}{\omega^2 \dot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}}, \tag{41}$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{3}{2}\frac{\ddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s}{\omega^2}. \tag{42}$$

Рівняння (40), з врахуванням (41) і (42), набуває вигляду

$$\dddot{\boldsymbol{u}}_s - \frac{\dddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s}{\dot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}}\dot{\boldsymbol{u}}_s + 3(\ddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s)\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{0}. \tag{43}$$

Згорнувши з $\ddot{\boldsymbol{u}}_s$ і взявши до уваги (11), отримуємо такий наслідок рівняння (43):

$$\dddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s - \left(\frac{\dddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s}{\dot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}} + 3\dot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}\right)\ddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s \equiv 2\tau^2 k\frac{dk}{ds} + k^2\tau\frac{d\tau}{ds} = 0. \tag{44}$$

Тотожність у цьому співвідношенні випливає з диференціальних продовжень співвідношень (14) і (33), які, відповідно, дозволяють такі вирази:

$$\dddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s = k\frac{d^2k}{ds^2} - k^2\tau^2 - k^4, \tag{45}$$

$$\dddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s = k\tau^2\frac{dk}{ds} + k^2\tau\frac{d\tau}{ds} + 2k^3\frac{dk}{ds} + \frac{dk}{ds}\frac{d^2k}{ds^2}. \tag{46}$$

Зауваження 1. Співвідношення (44) вказує на те, що кривина k і скрут τ розв'язків рівняння (43) можуть бути постійними тільки одночасно. Вирази (41) і (42) вимагають узгодження в тому розумінні, що другий з них мав би отримуватися диференціюванням першого. Із врахуванням співвідношення (44), ця вимога накладає в'язь

$$\ddddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s + 6(\ddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s)\dot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2} - \frac{(\dddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s)(\ddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s)}{\dot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}} \equiv$$

$$\equiv k\frac{d^3k}{ds^3} - \frac{dk}{ds}\frac{d^2k}{ds^2} + k^3\frac{dk}{ds} - 2k\tau^2\frac{dk}{ds} - 3k^2\tau\frac{d\tau}{ds} = 0. \tag{47}$$

Тотожність у цьому співвідношенні отримується залученням формули (46) і диференціального продовження формули (45).

Твердження 3. *Система рівнянь* (43) *і* (47) *має першим інтеґралом вираз*

$$\frac{\tilde{A}}{2} = \frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{u}}^2 + \frac{\dddot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_s}{\dot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}}. \tag{48}$$

Д о в е д е н н я. Диференціюємо (48) і використовуємо (44) та (47). ♦

Зауваження 2. Рівняння (43) є *розширенням* рівняння (**I**) системи (35) в тому розумінні, що, при накладанні додаткової умови $\frac{dk}{ds} = 0$, яка не суперечить в'язям (44) і (47), воно зводиться до

$$\dddot{\boldsymbol{u}}_s + \frac{\ddot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}}{\dot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}}\dot{\boldsymbol{u}}_s = 0. \tag{49}$$

Коли закріпити значення кривини, $k = k_0$, скрут τ, згідно з (44), набуде постійного значення τ_0 і тоді, за співвідношенням (33), у правій частині (49) матимемо

$$\frac{\ddot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}}{\dot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}} = k_0^{\,2} + \tau_0^{\,2}\,,$$

так що рівняння (43) перетвориться у рівняння руху спіну (28) з частотою

$$\omega^2 = k_0^{\,2} + \tau_0^{\,2}\,.$$

4.2. *Непараметризоване варіаційне рівняння, яке містить в собі рівняння руху спіну* (28). Спочатку розглянемо загальний вигляд варіаційного рівняння для непараметризованої варіаційної задачі. Кожна непараметризована варіаційна задача, записана в координатах (6), покладанням $u^0 = 1$ може бути переписана в координатах

$$t = x^0, \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad v' = \frac{dv^i}{dt}, \quad v'' = \frac{dv'^i}{dt}, \quad v''' = \frac{dv''^i}{dt}, \quad i > 0\,. \tag{50}$$

Непараметризоване варіаційне рівняння з лівою частиною вигляду (1) для функції Ляґранжа $\mathcal{L}(x^\alpha, u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$ записується в змінних (50) виразом (2) за правилом

$$\mathcal{E}_i = u^0 E_i\,, \tag{51}$$

з дотриманням співвідношення (4) і з відповідною функцією Ляґранжа $L(t, x^i, v^i, v'^i)$, пов'язаною з попередньою співвідношенням

$$\mathcal{L}(x^\alpha, u^\alpha, \dot{u}^\alpha) = u^0 L(t, x^i, v^i, v'^i)\,, \tag{52}$$

де змінні t, v^i v^i, v'^i вважаються вираженими через змінні x^α, u^α $\dot{u}^\alpha$.

Автономний за часом вираз (2) записується у вигляді

$$\mathbf{E} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'}\right). \tag{53}$$

Дослідимо питання: чи може існувати вираз (2), який би породжував вираз (1) за правилом (51) таким чином, щоб в незалежному від параметризації інтеґральної кривої векторному рівнянні $\{\mathcal{E}_\alpha = 0\}$ при переході до натуральної параметризації $ds = \sqrt{1 + \mathbf{v}^2}\, dt$ так породжений вираз (1) перетворювався в перший доданок рівняння (28). Тут приймаємо $v_i = -v^i$ відповідно до виразу метрики (15). З такою метою здійснюємо перерахунок четвертої похідної:

$$\dddot{u}_s^i = \frac{d}{ds}\ddot{u}_s^i = \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\ddot{u}_s^i \tag{54}$$

до часової змінної, згідно з якою

$$\dot{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}}\,, \quad \ddot{t} = -\frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}{(1 + \mathbf{v}^2)^2}\,, \quad \dddot{t} = 4\frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v})^2}{(1 + \mathbf{v}^2)^{7/2}} - \frac{\mathbf{v}'^2 + \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}}{(1 + \mathbf{v}^2)^{5/2}}\,.$$

Маємо

$$u_s^i = \dot{t}v^i, \quad \dot{u}_s^i = \ddot{t}v^i + \dot{t}^2 v'^i, \quad \ddot{u}_s^i = \dddot{t}\,v^i + 3\dot{t}^2\ddot{t}v'^i + \dot{t}^3 v''^i\,, \tag{55}$$

зокрема,

$$\ddot{u}_s^i = \left\{4\frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v})^2}{(1 + \mathbf{v}^2)^{7/2}} - \frac{\mathbf{v}'^2 + (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v})}{(1 + \mathbf{v}^2)^{5/2}}\right\} v^i - \\ - 3\frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v})}{(1 + \mathbf{v}^2)^{5/2}} v'^i + \frac{v''^i}{(1 + \mathbf{v}^2)^{3/2}}\,. \tag{56}$$

Перепишемо (56) у формі

$$\ddot{u}_{si} = \left\{ 4 \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v})^2}{(1+\mathbf{v}^2)^{7/2}} - \frac{\mathbf{v}'^2}{(1+\mathbf{v}^2)^{5/2}} - \frac{(\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v})}{(1+\mathbf{v}^2)^{5/2}} \right\} v_i +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v'^i} \frac{\mathbf{v}'^2}{(1+\mathbf{v}^2)^{3/2}} . \tag{57}$$

Вимагаємо, щоб (54) збігалося з (51), тобто, щоб виконувалася тотожність

$$\frac{d}{dt} \ddot{u}_s^i \equiv \frac{d}{dt} \left(- \frac{\partial L}{\partial v^i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v'^i} \right). \tag{58}$$

Спочатку розглянемо тотожність

$$\ddot{u}_s^i \equiv - \frac{\partial L}{\partial v^i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v'^i} . \tag{59}$$

З порівняння (57) із (59) стає очевидним, що для останнього доданка в (57) варто спробувати функцію Ляґранжа

$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}'^2}{(1+\mathbf{v}^2)^{3/2}} . \tag{60}$$

Тепер в тотожності (59) замість L беремо $L_1 + L_2$, де L_1 подано виразом (60). Тоді в (59) доданок $\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial v'^i}$ скорочується з останнім доданком в (57). Після зведення подібних членів у (59) розкриваємо оператор

$$\frac{d}{dt} = v'^i \frac{\partial}{\partial v^i} + v''^i \frac{\partial}{\partial v'^i} \tag{61}$$

і отримуємо таку тотожність для визначення L_2:

$$\left\{ 4 \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v})^2}{(1+\mathbf{v}^2)^{7/2}} - \frac{5}{2} \frac{\mathbf{v}'^2}{(1+\mathbf{v}^2)^{5/2}} - \frac{(\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v})}{(1+\mathbf{v}^2)^{5/2}} \right\} \mathbf{v} \equiv$$

$$\equiv - \frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{v}} + v'^i \frac{\partial}{\partial v^i} \frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{v}'} + v''^i \frac{\partial}{\partial v'^i} \frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{v}'} .$$

Вигляд коефіцієнтів при v''^i підказує спробу вибору

$$\frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{v}'} = - \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v})}{(1+\mathbf{v}^2)^{5/2}} ,$$

яка інтеґрується до такої залежності L_2 від $\mathbf{v}'$:

$$L_2 = - \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v})^2}{2(1+\mathbf{v}^2)^{5/2}} . \tag{62}$$

Продовжуючи ітерацію, підставляємо $L = L_1 + L_2 + L_3$ до правої частини (59). Тепер доданок $v''^i \frac{\partial}{\partial v'^i} \frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{v}'}$ в (59) скорочується із третім доданком виразу (57). Після зведення подібних членів у (59) підставляємо (59) до (58) і для визначення L_3 отримуємо тотожність

$$- \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mathbf{v}'^2}{(1+\mathbf{v}^2)^{5/2}} - \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v})^2}{(1+\mathbf{v}^2)^{7/2}} \right\} \mathbf{v} \equiv - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L_3}{\partial \mathbf{v}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L_3}{\partial \mathbf{v}'} \right\} . \tag{63}$$

У цій тотожності вираз у фіґурних дужках зліва є нічим іншим, як квадратом першої кривини Френе (13) з множником $\frac{1}{\sqrt{1+\mathbf{v}^2}}$. Відповідно до (30), кривина k повинна бути постійною, скажімо, $k = k_0$ уздовж варіаційного рівняння, яке шукаємо. Тотожність (63) перетворюється в таку:

$$\frac{3}{2}k_0^2 \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1+\mathbf{v}^2}} \equiv \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L_3}{\partial \mathbf{v}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L_3}{\partial \mathbf{v}'}\right\}. \tag{64}$$

Отже, для виконання тотожності (64), досить узяти функцію Ляґранжа вільного руху

$$L_3 = \frac{3}{2}k_0^2\sqrt{1+\mathbf{v}^2}\,. \tag{65}$$

Функцією Ляґранжа для другого доданка в (28) (записаного з часовим параметром згідно з (51) та (55)) знову є функція Ляґранжа вільного руху:

$$-\omega^2\sqrt{1+\mathbf{v}^2}\,. \tag{66}$$

Залишається зібрати разом (60), (62), (65) і (66), щоб отримати функцію Ляґранжа для шуканого варіаційного рівняння

$$L = \frac{1}{2}(k^2 + A)\sqrt{1+\mathbf{v}^2}\,,$$

де $A = 3k_0^2 - 2\omega^2$.

Або, в однорідних координатах, за формулою (52), пригадавши означення (7), яке однаково виглядає у просторах довільної розмірності,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{u}^2\dot{\boldsymbol{u}}^2 - (\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^5} + A\|\boldsymbol{u}\|\right). \tag{67}$$

4.3 Варіаційне розширення рівняння руху спіну.

Твердження 4. *Розв'язки рівняння* (28) *містяться серед екстремалей варіаційної задачі*

$$\delta\int \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{u}^2\dot{\boldsymbol{u}}^2 - (\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^5} + A\|\boldsymbol{u}\|\right)d\zeta = 0\,. \tag{68}$$

Д о в е д е н н я. Варіаційним рівнянням для (68) є таке:

$$\boxed{\frac{d}{d\zeta}\left\{-2\frac{\ddot{\boldsymbol{u}}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} + 6\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})}{\|\boldsymbol{u}\|^5}\dot{\boldsymbol{u}} + \left(2\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\ddot{\boldsymbol{u}})}{\|\boldsymbol{u}\|^5} - \frac{\dot{\boldsymbol{u}}^2}{\|\boldsymbol{u}\|^5} - 5\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^7} + \frac{A}{\|\boldsymbol{u}\|}\right)\boldsymbol{u}\right\} = \mathbf{0}}. \tag{69}$$

Оскільки варіаційна задача (68) є непараметризованою, можемо в рівнянні (69) перейти за правилами (11) до натурального параметра s:

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_s + \left(\frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{u}}_s{}^2 - \frac{A}{2}\right)\dot{\boldsymbol{u}}_s + 3(\dot{\boldsymbol{u}}_s\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}_s)\boldsymbol{u}_s = \mathbf{0}\,. \tag{70}$$

Виходячи зі співвідношення (32), уздовж розв'язків рівняння (70) маємо

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{(\boldsymbol{u}_s\wedge\dot{\boldsymbol{u}}_s\wedge\ddot{\boldsymbol{u}}_s)\cdot(\boldsymbol{u}_s\wedge\dot{\boldsymbol{u}}_s\wedge\ddot{\boldsymbol{u}}_s)}{k^2\|\boldsymbol{u}_s\wedge\dot{\boldsymbol{u}}_s\wedge\ddot{\boldsymbol{u}}_s\|} - $$

$$-2\frac{\|\boldsymbol{u}_s\wedge\dot{\boldsymbol{u}}_s\wedge\ddot{\boldsymbol{u}}_s\|}{k^3}\dot{k} = -2\frac{\tau}{k}\frac{dk}{ds}\,. \tag{71}$$

Зауважимо, що, згідно з відомою формулою

$$k^3\tau^2 k_3 = \|\boldsymbol{u}_s\wedge\dot{\boldsymbol{u}}_s\wedge\ddot{\boldsymbol{u}}_s\wedge\dddot{\boldsymbol{u}}_s\|, \tag{72}$$

третя кривина Френе k_3 є нулем уздовж рівняння (70).

Щоб з-посеред розв'язків рівняння (70) вибрати самі тільки розв'язки рівняння (28), необхідно додатково накласти в'язь

$$k^2 = \frac{2}{3}\omega^2 + \frac{A}{3}. \qquad \blacklozenge$$

Формула (71) показує, що, услід за постійною кривиною k, скрут τ також є інтеґралом руху. Йдеться, таким чином, про гвинтові лінії, розташовані в тривимірному просторі-часі, тобто про рух у площині у тривимірному просторі.

З огляду на міркування, наведені вище, доцільно назвати рівняння (69) *варіаційним розширенням* рівняння руху квазі-класичного спіну (28) (яке, як показано вище, саме собою варіаційним не є).

***4.4 Варіаційне розширення рівняння* (49).**

Твердження 5. *Система рівнянь*

$$\begin{cases} \dddot{\boldsymbol{u}}_s + \left(\frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2} - \frac{A}{2}\right)\dot{\boldsymbol{u}}_s + 3\left(\dot{\boldsymbol{u}}_s \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_s\right)\boldsymbol{u}_s = \mathbf{0}, & (\mathbf{I}) \\ \dfrac{dk}{ds} = 0. & (\mathbf{II}) \end{cases} \tag{73}$$

є рівноцінною з такою:

$$\begin{cases} \dddot{\boldsymbol{u}}_s + \dfrac{\ddot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}}{\dot{\boldsymbol{u}}_s^{\,2}}\dot{\boldsymbol{u}}_s = \mathbf{0}, & (\mathbf{I}) \\ k^2 - 2\tau^2 = A. & (\mathbf{II}) \end{cases} \tag{74}$$

Д о в е д е н н я. Спочатку диференціюємо в'язь (**II**) із системи (73) і отримуємо

$$\dddot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} = -\ddot{\boldsymbol{u}}^2. \tag{75}$$

Далі згортаємо рівняння (**I**) зі системи (73) з вектором $\dot{\boldsymbol{u}}$ і, з огляду на (75) та в'язі (**II**) системи (73), отримуємо

$$\ddot{\boldsymbol{u}}^2 = \left(\frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{u}}^2 - \frac{A}{2}\right)\dot{\boldsymbol{u}}^2, \tag{76}$$

що й підставляємо знову до рівняння (**I**) системи (73), щоб отримати рівняння (**I**) системи (74). З огляду на (33), рівняння (76) разом із в'яззю (**II**) системи (73) перетворюється в рівняння (**II**) системи (74).

Зворотно, повторюючи дослівно маніпуляції, проведені раніше з рівнянням (34), бачимо, що властивості (30) і (31) зберігаються і в рівнянні (**I**) системи (74). Отже, k і τ є першими інтеґралами, що легко видно з (34), тому в'язь (**II**) системи (74) узгоджена з її першим рівнянням. Властивість (30) дає друге рівняння в системі (73). Далі в'язь (**II**) системи (74) у вигляді (76) підставляємо до першого рівняння в (74) і отримуємо перші два члени першого рівняння в (73). Третій член − це є просто тотожній нуль, як наслідок врахування вже одержаної в'язі (**II**) цієї ж системи (73). $\blacklozenge$

4.5 Варіаційне розширення задачі Ляґранжа для квазі-класичного спіну. Інтеґрал руху (48) на рівнянні (70) набуває значення $\frac{A}{2}$. В'язь (47) при цьому не є обов'язковою. Тому однопараметричну сім'ю рівняннь (69) можна назвати *варіаційним розширенням* задачі Ляґранжа (36), (39).

Висновок. Зроблено спробу збудувати варіаційний принцип для ліній постійної кривини у (псевдо-)евклідовому дво-, три- та чотиривимірному просторі (обернена варіаційна задача). Оскільки до виразу кривини входить друга похідна, шукані варіаційні рівняння мали би бути третього порядку. У двовимірному просторі варіаційна задача, для якої в рівнянні екстремалей присутня похідна третього порядку, але не вище, може бути поставлена тільки в суттєво параметричному вигляді. Обернена варіаційна задача в цьому випадку вирішується однозначно, якщо вимагати, щоби прямі лінії, як частковий випадок розв'язків отриманого рівняння, несли уздовж себе натуральну параметризацію параметром s. В тривимірному просторі існує безумовно однозначна відповідь на нашу обернену варіаційну задачу, з тим, що, хоча варіаційне рівняння несе (псевдо-)евклідову симетрію, функції Лягранжа, які його породжують [5], не є і не можуть бути інваріантами групи рухів відповідного простору [1]. В просторі виміру 4 не може існувати варіаційного рівняння третього порядку, яке було б наділене (псевдо-)евклідовою симетрією [5, III.3.7.5]. Узагальнюючи варіаційне рівняння для тривимірного простору на простір чотиривимірний шляхом внесення додаткової залежності від деякого постійного вектора, отримуємо релятивіське варіаційне рівняння руху третього порядку в чотиривимірному просторі-часі, яке несе фізичний зміст. Подальшим застосуванням методу *виключення за допогомою похідних* додаткових параметрів, отримуємо варіаційне рівняння в чотиривимірному (псевдо-)евклідовому просторі, яке містить в собі рівняння гвинтових ліній і узагальнює тривимірний випадок. Так приходимо до *варіаційного узагальнення* диференціальних рівнянь методом диференціювання і «розмороження» інтеґралів руху.

***Додаток 1*. Ілюстрація «тремтіння» спіну**.

Рівняння (28) має дійсний розв'язок

$$x^\mu = x_0{}^\mu + u_0{}^\mu s + a^\mu \cos(\omega s) + b^\mu \sin(\omega s). \tag{77}$$

Початкові умови підлягають в'язі (11)*, що, з причини незалежності тригонометричних двочленів, дає такі умови:

$$a_\mu a^\mu = b_\mu b^\mu, \quad a_\mu b^\mu = 0, \quad a_\mu u_0{}^\mu = 0, \quad b_\mu u_0{}^\mu = 0, \tag{78}$$

після чого (11) ще додає умову

$$u_{0\mu} u_0{}^\mu + a_\mu a^\mu \omega^2 = 1. \tag{79}$$

Знаємо, що в просторі рух відбувається у площині $k_3 = 0$, згідно з формулою (72). Можна спробувати такі значення початкових умов:

$$a^1 = a^2 = b^1 = b^2 = \alpha, \quad a^0 = b^0 = \beta, \quad a^3 = b^3 = u_0{}^3 = 0. \tag{80}$$

Тепер

$$a_\mu a^\mu = 2\alpha^2 - \beta^2.$$

Але друге зі співвідношень в (78) показує, що повинна виконуватися рівність

$$a_\mu a^\mu = 2\alpha^2 - \beta^2 = 0. \tag{81}$$

Тому умова (79), при розділенні на просторову і часову складові, перетворюється в таку:

$$(u_0{}^0)^2 - (u_0{}^1)^2 - (u_0{}^2)^2 - (u_0{}^3)^2 = 1,$$

що є умовою унітарності для початкової швидкості. Але тоді третє зі співвідношень в (78) вказує, що

$$a_\mu u_0{}^\mu = \alpha(u_0{}^1 + u_0{}^2) - \beta u_0{}^0 = 0. \tag{82}$$

Тепер (81) разом з (82) остаточно вимагає, щоб початкові умови підлягали в'язі

* Ця умова зіґнорована в [7].

$$\frac{(u_0{}^1 + u_0{}^2)^2}{(u_0{}^0)^2} = 2\,.$$

Розв'язок (77), розділений на просторову і часову складові, остаточно виглядає так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}s + \alpha(\mathbf{i} + \mathbf{j})(\cos(\omega s) + \sin(\omega s))\,,$$

$$t = t_0 + \sqrt{2}(v_1 + v_2)s + \sqrt{2}\alpha(\cos(\omega s) + \sin(\omega s))\,,$$

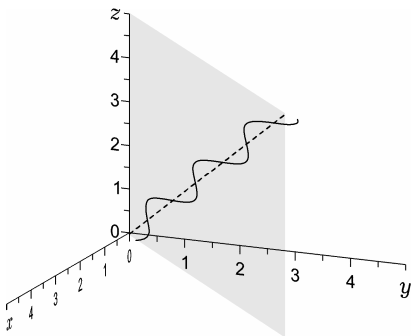
де

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \equiv (u_0{}^1, u_0{}^2, u_0{}^3), \qquad \mathbf{i} = (1,0), \qquad \mathbf{j} = (0,1)\,.$$

Зауважуємо, що фізичний час t не може плинути рівномірно з власним часом s, бо тоді амплітуда $\alpha = a_1 = a_2$ мала би щезнути.

Залежність характеру руху від співвідношення параметрів.

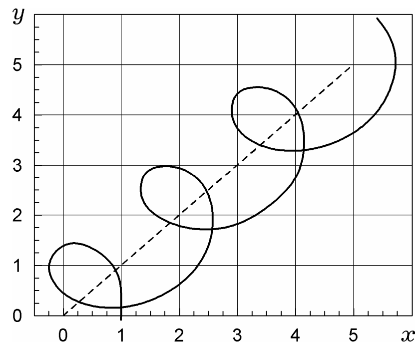
На рис. 1 – рис. 4 пунктирною лінією зображено рух без кутової швидкості, $\omega = 0$.



$v_1 = v_2 = v_3 = 1$,

$a_1 = a_2 = 1, a_3 = 0, \omega = 4$.

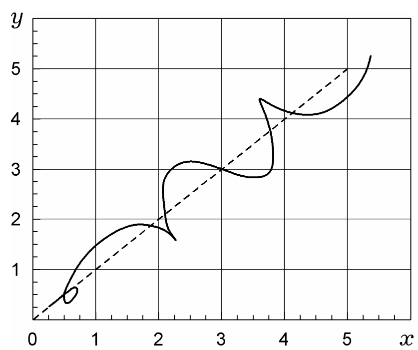
Рис. 1



$v_1 = v_2 = v_3 = 1$,

$a_1 = a_2 = 0.3, a_3 = 0, \omega = 4$.

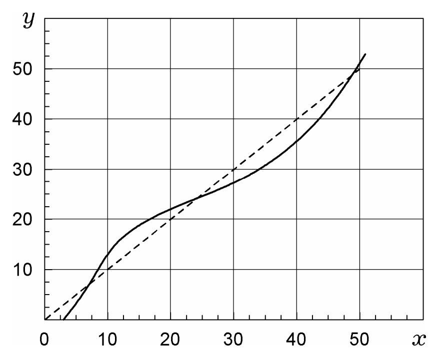
Рис. 2



$v_1 = v_2 = 10, v_3 = 1$,

$a_1 = a_2 = 3, a_3 = 0, \omega = 1.52$.

Рис. 3



$v_1 = v_2 = v_3 = 1$,

$a_1 = a_2 = 0.3, a_3 = 0, \omega = 5$.

Рис. 4

1 *Мацюк Р.* Про варіаційність геодезійних кіл в евклідівських просторах $\mathbf{E}^2$ та $\mathbf{E}^3$ // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Б. Й. Пташника. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 173–183.
2. *Мацюк Р. Я.* Варіаційне узагальнення вільної релятивіської дзиґи // Фіз. зб. НТШ. – 2006. – **6**. – С. 206–214.
3. *Скоробогатько В. Я.* Рівняння геодезичних механіки з вищими похідними // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 10. – С. 897–899.
4. *Matsyuk R.* Second order variational problem and 2-dimensional concircular geometry // Travaux mathématiques. – 2008. – **XVIII**. – P. 125–137.
5. *Matsyuk R. Ya.* Inverse variational problem and symmetry in action: the relativistic third order dynamics // The Inverse Problem of the Calculus of Variations. Local and Global Theory / Ed. Dmitry V. Zenkov. – Ser. Atlantis Studies in Variational Geometry. – Vol. 2. – Atlantis Press, 2015. – P. 75–102.
6. *Mikóczi B.* Spin supplementary conditions for spinning compact binaries // Phys. Rev. **D**. – 2017. – **95**, 064023. – https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.064023.
7. *Riewe F.* Relativistic classical spinning-particle mechanics // Nuovo Cim. – 1972. – **8B**, No. 1. – P. 271–277. – https://doi.org/10.1007/BF02743522.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Рассматривается обратная вариационная задача для линий постоянной кривизны в (псевдо-)евклидовых двух-, трех- и четырехмерном пространствах. Полученные результаты имеют физический смысл в случае релятивистской механики частиц.

***Ключевые слова**: релятивистска механика, обратная вариационная задача, (псевдо-) евклидово пространство, геодезические постоянной кривизны.*

RELATIVISTIC MECHANICS OF CONSTANT CURVATURE

The inverse variational problem for constant curvature curves in the (pseudo-)Euclidean space of the dimensions 2, 3, and 4 is posed and examined. The obtained results are meaningful in the case of relativistic mechanics of particles.

***Key words**: relativistic mechanics, inverse variational problem, (pseudo-)Euclidean space, geodesics of constant curvature.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
Lepage Research Institute, Prešov, Slovakia

Одержано
14.01.18