

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА ДВИЖЕНИЕ ВИХРЕЙ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ КОНДЕНСАТАХ БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА

В рамках модели Гросса – Питаевского выводится система уравнений, описывающих движение квантованных вихрей в конденсатах Бозе – Эйнштейна. Рассматривается сильно анизотропная магнитная ловушка, когда прижимающий потенциал в направлении z много больше, чем в поперечном направлении, так что конденсат принимает вид двумерного диска. Переход к двумерной ситуации позволяет использовать метод асимптотического согласования решений и получить уравнения движения вихрей в явном виде. Учитываются не только вращения конденсата как целого, но и влияние диссипативных процессов, приводящих систему вихрей к равновесию. Приведены примеры движения вихрей для разных значений внешних параметров.

Ключевые слова: конденсаты Бозе – Эйнштейна, вихри, вихревая динамика, диссипативная модель движения вихрей.

Введение. Квантовые вихри являются одним из любопытнейших объектов современной физики. Открытые изначально в сверхтекучих жидкостях и сверхпроводниках, вихри с квантованной циркуляцией на протяжении десятилетий изучались как теоретиками, так и экспериментаторами. В 1995 году у физиков появилось еще одно поле деятельности: атомные конденсаты Бозе – Эйнштейна (БЭК). Радиус вихря в бозе – эйнштейновском конденсате оказался в двадцать раз больше, чем радиус вихря в сверхтекучей жидкости [12, pp. 253, 362], и появилась возможность непосредственного наблюдения за движением вихрей. Поэтому задача теоретического описания законов движения вихрей стала особенно актуальной.

Волновая функция конденсата из N слабо взаимодействующих атомов, помещенного во внешнее поле с захватывающим потенциалом $V_{tr} =$

$$= \frac{m}{2} \sum_{\alpha=x,y,z} \omega_{\alpha}^2 \rho_{\alpha}^2, \text{ описывается уравнением Гросса – Питаевского. Численное}$$

моделирование различных ситуаций в трехмерном случае позволяет проследить за движением вихрей в объеме конденсата, однако счетная процедура достаточно громоздка и трудоемка. Ситуация значительно упрощается, если прижимающее поле в направлении z намного больше, чем в поперечном направлении, $\omega_z \gg \{\omega_x, \omega_y\}$: конденсат сплющивается и принимает вид практически плоского диска. В этом случае можно перейти к двумерной модели в плоскости (x, y) [5]. Для конденсатов из атомов массой m , вращающихся с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ относительно оси Oz , двумерное уравнение Гросса – Питаевского записывается как

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + \frac{m}{2} \sum_{\alpha=x,y} \omega_{\alpha}^2 \rho_{\alpha}^2 \Psi + g_{2D} \Psi |\Psi|^2 - \mu \Psi + i\hbar (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\rho}) \cdot \nabla \Psi. \quad (1)$$

Постоянная взаимодействия для двумерного случая определяется как $g_{2D} = g_{3D} \sqrt{m\omega_z/2\pi\hbar}$ [5], где $g_{3D} = 4\pi\hbar^2 a/m$ – параметр взаимодействия в трехмерном случае, пропорциональный длине волны рассеяния a . Отталкивающее взаимодействие атомов ($a > 0$) стремится расширить конденсат

[✉] zueva@ilt.kharkov.ua

до бесконечности, в то время как магнитная ловушка удерживает атомы в некотором конечном объеме. Радиус-вектор уже двумерный: $\mathbf{p} = (x, y)$. Химический потенциал μ – множитель Лагранжа, обеспечивающий сохранение нормы волновой функции $\int |\Psi|^2 dV = N$.

В двумерной ситуации волновая функция $\psi(\mathbf{p}, t) = |\psi(\mathbf{p}, t)| \exp(i\varphi(\mathbf{p}, t))$ зависит только от двух пространственных переменных, а вихрь представляет собой точку-сингулярность, удовлетворяющую условию квантования циркуляции

$$\oint_{\Gamma} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

по любому замкнутому контуру Γ , охватывающему вихрь. Общее число вихрей N_v определяется, прежде всего, угловой скоростью вращения конденсата.

Переход к двумерной системе позволил активно использовать теорию функций комплексного переменного и получить явные уравнения движения вихрей. Одной из самых плодотворных идей является *метод согласования асимптотических разложений*, развитый в работе В. У. Rubinstein, L. M. Pismen [14].

В предыдущей работе автора [1] подробно исследовано движение вихрей в идеальном бездиссипативном случае. Однако такая идеальная динамика отражает реальную картину движения только при очень низких, близких к нулю, температурах. Наличие даже небольших тепловых флуктуаций приводит к *диссипации*. В исходной статье Питаевского [3] диссипация вводилась феноменологически. Позднее диссипативные процессы были обнаружены экспериментально и исследованы теоретически: было изучено затухание элементарных возбуждений в атомных конденсатах [6]; повышение температуры конденсата при движении лазерного пучка [13]; появление вихрей вследствие неустойчивости на границе и их движение внутри конденсата [16].

Для описания всех этих процессов использовалось диссипативное уравнение Гросса – Питаевского. Из разных его модификаций выберем удобную и понятную формулировку, предложенную группой Makoto Tsubota [15], в которой диссипативный член добавлен в левую часть уравнения (1):

$$(i - \gamma_0)\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + \frac{m}{2} \sum_{\alpha=x,y} \omega_{\alpha}^2 \rho_{\alpha}^2 \Psi + g_{2D} \Psi |\Psi|^2 - \mu \Psi + i\hbar(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{p}) \cdot \nabla \Psi. \quad (3)$$

Чтобы не возникало путаницы в обозначениях, параметр диссипации в (3) обозначен буквой γ_0 , – в отличие от постоянной Эйлера $\gamma \approx 0.5772$, которая будет фигурировать в решении. Параметр γ_0 в работах Tsubota и его группы ([15] и др.) полагается равным $\gamma_0 = 0.03$, в соответствии с экспериментальными оценками [6], хотя в работах других авторов значение γ_0 могло варьироваться от 0.002 [17] до 0.1 [11]. Очевидно, с ростом температуры параметр γ_0 растет (см. формулу (2b) в работе [11]).

Учет диссипации позволил увидеть новые, более тонкие моменты. Например, при малых угловых скоростях вращения появление вихрей оказалось энергетически невыгодным: один вихрь двигался по спирали к границе и исчезал; два вихря с разными знаками, при нулевой диссипации описывающие замкнутые траектории, при $\gamma_0 > 0$ тоже приближались к границе [17]. С увеличением угловой скорости вихри становились устойчивыми, а их траектории стягивались в точки равновесия [8].

Диссипативные уравнения движения вихрей в явном виде уже выводились, но иначе. Так, в работе [17] для получения системы уравнений, описывающих движение вихрей, использовалась идея убывания средней энергии со временем, сформулированная еще в 1999 году в работе [5]. Однако такой подход содержит целый ряд приближенных численных параметров, полученных для некоторых конкретных значений химического потенциала.

В настоящей работе предлагается вывод уравнений движения отдельных вихрей во вращающихся конденсатах Бозе – Эйнштейна с учетом диссипации. Это исследование является логическим продолжением предыдущей работы автора [1], в которой был изучен идеальный случай бездиссипативной динамики. Исходное диссипативное уравнение (3) приводится к безразмерному виду, в котором появляется малый параметр ε , и далее, согласно процедуре асимптотического согласования [14], строятся два решения в разных пространственных масштабах. Сопоставление этих решений в некоторой промежуточной области дает искомые уравнения движения. Единственный численный параметр определяется функцией, описывающей профиль плотности вблизи вихря.

В качестве иллюстрации приведены траектории движения вихрей в некоторых частных случаях.

1. Переход к безразмерным переменным. В этой работе магнитную ловушку будем полагать симметричной: $\omega_x = \omega_y \equiv \omega_r$. Рассматриваем *приближение Томаса – Ферми*, когда отталкивающее взаимодействие атомов настолько расширяет конденсат, что кинетическая энергия, связанная с изменением плотности, становится пренебрежимо малой по сравнению с энергией ловушки и энергией взаимодействия. Параболический профиль Томаса – Ферми для уравнения (1) в безвихревом случае определяется как

$$|\psi|^2 = \frac{\mu - m\omega_r^2 \rho^2/2}{g_{2D}},$$

а радиус конденсата (радиус Томаса – Ферми), полученный из условия $|\psi|^2 = 0$, оказывается равным

$$R_{TF}^2 = \frac{2\mu}{m\omega_r^2}.$$

Заметим, что приближение Томаса – Ферми не определяет точную границу конденсата, БЭК – это газовое облако, и естественное граничное условие для волновой функции имеет вид $\psi|_{\infty} = 0$. Однако приближение Томаса – Ферми позволяет оценить *характерный размер* конденсата, который будет использован при переходе к безразмерным переменным.

Существует множество способов перейти к безразмерному уравнению в двумерном случае (1). Для наших целей важны два момента: **1)** наличие малого параметра и **2)** сохранение в безразмерном уравнении наглядных обозначений для исходных параметров задач, таких как частота ловушки, химический потенциал, потенциал взаимодействия.

В современных работах (см., например, [8, 16 и др.]) безразмерное уравнение записывается в наглядном и удобном виде

$$(\gamma_0 - i)u_t = \frac{1}{2}\Delta u + \left(\mu - \frac{1}{2}\Omega_{tr}^2 \rho^2\right)u - |u|^2 u - i\Omega u_0, \quad (4)$$

однако для появления малого параметра нужно сделать дополнительный шаг – *диффузионное масштабирование* (diffusive scaling) координат и времени [7, 14]. Чтобы получить малый параметр в один шаг и сохранить наглядные обозначения для коэффициентов уравнения, несколько модифицируем процедуру обезразмеривания.

От размерных переменных $\{\rho, \omega_r, t, \psi, \mu, \Omega\}$ перейдем к безразмерным $\{\tilde{\rho}, \Omega_{tr}, \tilde{t}, \tilde{\psi}, \tilde{\mu}, \tilde{\Omega}\}$ по формулам: $\tilde{\rho} = \rho/R_0$, $\Omega_{tr} = \omega_r/\omega_0$, $\tilde{t} = t/t_0$, $\tilde{\psi} = p_0\psi$,

$\tilde{\mu} = \mu/\mu_0$, $\tilde{\Omega} = \Omega t_0$. Вид параметров $\{\mu_0, R_0, t_0, p_0, \omega_0\}$ будет определен ниже.

В качестве R_0 возьмем радиус Томаса – Ферми, вычисленный *при специальном значении* $\mu = \mu_0 = \hbar\omega_z$, которое использовано как характерное значение химического потенциала в работах [8, 9 и др.]. При $\mu = \mu_0$ радиус Томаса – Ферми R_{TF} оказывается равным

$$R_0^2 = \frac{2\hbar\omega_z}{m\omega_r^2}.$$

В новых переменных уравнение (3) (после деления на \hbar/t_0) принимает вид

$$(i - \gamma_0) \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{t_0 \hbar}{2mR_0^2} \nabla^2 \tilde{\Psi} + i\hbar(\tilde{\Omega} \times \tilde{\rho}) \cdot \nabla \tilde{\Psi} + \Omega_{\text{tr}}^2 \frac{m\omega_0^2 R_0^2 t_0}{2\hbar} \tilde{\rho}^2 \tilde{\Psi} + \frac{g_{2D} t_0}{\hbar R_0^2} \tilde{\Psi} |\tilde{\Psi}|^2 - \tilde{\mu} \tilde{\Psi} \frac{\mu_0 t_0}{\hbar}.$$

Чтобы убрать множитель при лапласиане, для нормировки времени возьмем величину $t_0 = 2mR_0^2/\hbar$. Три последних слагаемых, определяющих профиль Томаса – Ферми, запишем в виде $-\frac{1}{\varepsilon^2}(\tilde{\mu}\tilde{\Psi} - \Omega_{\text{tr}}^2 \tilde{\rho}^2 \tilde{\Psi} - g^2 \tilde{\Psi} |\tilde{\Psi}|^2)$, где введен параметр $1/\varepsilon^2 = \mu_0 t_0/\hbar$, а g^2 и ω_0^2 получаются равными $g^2 = (2m/\hbar^2)g_{2D}$ и $\omega_0^2 = \omega_r^2$ (обозначение g^2 введено с квадратом для удобства дальнейших вычислений). Параметр ε^2 , появившийся в слагаемом с g^2 , отнесем к нормировке волновой функции. Таким образом, $\tilde{\Psi} = \varepsilon R_0 \psi$. При такой записи коэффициенты во всех трех слагаемых в скобках имеют один порядок малости $O(1)$.

Параметр ε в исходных терминах задачи имеет вид

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu_0 t_0}} = \frac{\omega_r}{2\omega_z}. \quad (5)$$

Для двумерного конденсата в виде диска ($\omega_z \gg \omega_r$) этот параметр мал.

Таким образом, в нормировках $\{R_0, \mu_0, t_0, p_0, \omega_0\}$ безразмерное уравнение записывается как

$$(i - \gamma_0) \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{t}} = -\Delta \tilde{\Psi} - \frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{\Psi} (\tilde{\mu} - \Omega_{\text{tr}}^2 \tilde{\rho}^2 - g^2 |\tilde{\Psi}|^2) + i(\tilde{\Omega} \times \tilde{\rho}) \cdot \nabla \tilde{\Psi}. \quad (6)$$

Безразмерная частота ловушки при таком подходе равна $\Omega_{\text{tr}} = \omega_r/\omega_0 = 1$ (ср. с уравнением (9) [1]), однако для наглядности конечного результата сохраним обозначение Ω_{tr} . Можно проверить, что именно такой вид примет уравнение (4), если сделать в нем замену координат, соответствующую диффузионному масштабированию.

Замечание. В литературе встречаются разные записи безразмерного уравнения: некоторые авторы сохраняют множитель $1/2$ при лапласиане [8, 16 и др.], другие исходят из уравнения с 1 при лапласиане [7, 14]. Это зависит от выбора нормировки времени: $t_0 = 2mR_0^2/\hbar$ или $t_0 = mR_0^2/\hbar$. Будем использовать уравнение в виде (6) с лапласианом в чистом виде.

2. Метод согласования асимптотических разложений. Примем такие обозначения и упрощения: **1)** для *внешнего* решения будем использовать *маленькие буквы* (\mathbf{r}, ψ) как для обозначения волновых функций, так и для

координат; 2) *большие буквы* (\mathbf{R}, Ψ) будем соответственно использовать для *внутреннего* решения; 3) чтобы не загромождать запись, знак «тильда» над буквами в (6) опускаем.

Уравнение (6) выписано в *системе координат, вращающейся с угловой скоростью* Ω . Перейдем в систему координат, связанную с j -м вихрем, положение которого пространстве меняется со временем:

$$\xi_j = \xi_j(t) = (\eta_j(t), \zeta_j(t)),$$

и положим

$$\rho = \xi_j(t) + \mathbf{r}.$$

Здесь $\mathbf{r} = r \exp(i\theta)$ – радиус-вектор в полярной системе координат с центром в j -м вихре. Уравнение (6) примет вид

$$(i - \gamma_0) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} - (\dot{\xi}_j \cdot \nabla) \Psi \right) = -\nabla^2 \Psi - \frac{1}{\varepsilon^2} \Psi (n_0^2(\mathbf{r}) - g^2 |\Psi|^2) + i(\Omega \times (\xi_j + \mathbf{r})) \cdot \nabla \Psi, \quad (7)$$

где для плотности конденсата в приближении Томаса – Ферми введено обозначение

$$\begin{aligned} n_0^2(\mathbf{r}) &\equiv N_0(\mathbf{r}) = \mu - \Omega_{\text{tr}}^2 (\xi_j + \mathbf{r})^2 = \\ &= \Xi_j^2 - 2\Omega_{\text{tr}}^2 r (\eta_j \cos \theta + \zeta_j \sin \theta) - \Omega_{\text{tr}}^2 r^2, \end{aligned} \quad (8)$$

а Ξ_j^2 – плотность конденсата в точке, где находится j -й вихрь:

$$\Xi_j^2 \equiv \Xi_j^2(t) = \mu - \Omega_{\text{tr}}^2 (\eta_j^2 + \zeta_j^2). \quad (9)$$

Уравнение (7) – *внешнее уравнение* или уравнение дальнего поля.

Внутреннее уравнение описывает систему в растянутых координатах: в уравнении (7) перейдем к переменным $\mathbf{R} = \mathbf{r}/\varepsilon$:

$$(i - \gamma_0) \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \varepsilon (\dot{\xi}_j \cdot \nabla) \Psi \right) = -\nabla^2 \Psi - \Psi (\mu - \Omega_{\text{tr}}^2 (\xi_j + \varepsilon \mathbf{R})^2 - g^2 |\Psi|^2) + i\varepsilon (\Omega \times (\xi_j + \varepsilon \mathbf{R})) \cdot \nabla \Psi. \quad (10)$$

2.1. Схема метода согласования асимптотических разложений.

1°. Сначала находим «внешнее решение» – решение уравнения (7) в области $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ в окрестности j -го вихря.

2°. Строим решение «внутреннего уравнения» (10). Кольцо $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ в растянутых координатах переходит в кольцо $\varepsilon^{-1/2} < R < 2\varepsilon^{-1/2}$, то есть в указанной области r мало, а R велико. Будем искать разложение волновой функции Ψ при больших R .

3°. Поскольку оба решения, $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $\Psi(\mathbf{R}, t)$, суть решения одного и того же уравнения в одной и той же области (кольце), при замене координат $\mathbf{R} = \mathbf{r}/\varepsilon$ ведущие члены разложений должны совпадать. Сопоставление решений и дает искомые уравнения движения вихрей.

3. Внешнее решение. Волновую функцию $\psi(\mathbf{r}, t)$ будем искать в виде разложения по малому параметру ε :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, t) + \varepsilon \psi_1(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 \psi_2(\mathbf{r}, t) + \dots$$

Подставляя это разложение в уравнение (7) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε , получаем уравнения для функций ψ_0, ψ_1, \dots :

$$\begin{aligned}
\psi_0(n_0^2 - g^2|\psi_0|^2) &= 0, \\
g^2\psi_0(\psi_0\bar{\psi}_1 + \psi_1\bar{\psi}_0) - \psi_1(n_0^2 - g^2|\psi_0|^2) &= 0, \\
(i - \gamma_0)\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t} - (\dot{\xi}_j \cdot \nabla\psi_0)\right) &= -\nabla^2\psi_0 - g^2\psi_0(\psi_0\bar{\psi}_2 + \psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_0) + \\
&+ i(\mathbf{\Omega} \times (\xi_j + \mathbf{r})) \cdot \nabla\psi_0, \dots
\end{aligned}$$

Здесь чертой над символом обозначено комплексное сопряжение и в третьем уравнении уже учтены первые два. Первое уравнение дает

$$\psi_0(\mathbf{r}, t) = \frac{n_0(\mathbf{r})}{g} \exp(i\Phi_0(\mathbf{r}, t)). \quad (11)$$

Функции ψ_1, ψ_2, \dots по аналогии с ψ_0 будем искать в виде

$$\psi_k(\mathbf{r}, t) = (\psi_{kr}(\mathbf{r}, t) + i\psi_{ki}(\mathbf{r}, t)) \exp(i\Phi_0(\mathbf{r}, t)).$$

В силу второго уравнения имеем $\psi_{1r} = 0$, третье уравнение с учетом формулы (11) для функции ψ_0 принимает такой вид:

$$\begin{aligned}
(i - \gamma_0)\left(\frac{\partial n_0}{\partial t} + in_0 \frac{\partial\Phi_0}{\partial t} - \dot{\xi}_j \cdot (\nabla n_0 + in_0 \nabla\Phi_0)\right) &= \\
= -(\nabla^2 n_0 + in_0 \nabla^2\Phi_0 + 2i(\nabla n_0) \cdot (\nabla\Phi_0) - n_0(\nabla\Phi_0)^2) - \\
- g^2 n_0 (\bar{\psi}_2\psi_0 + \psi_1\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_0\psi_2) + \\
+ i(\mathbf{\Omega} \times (\xi_j + \mathbf{r})) \cdot (\nabla n_0 + in_0 \nabla\Phi_0).
\end{aligned}$$

Действительная часть даст уравнение для ψ_2 , которое нам не пригодится, а мнимая – уравнение для Φ_0 . Переходя от функции $n_0(\mathbf{r})$ к ее квадрату $N_0(\mathbf{r})$ и учитывая, что для N_0 (8) имеем

$$\frac{\partial N_0}{\partial t} - \dot{\xi}_j \cdot \nabla N_0 = 0, \quad (\mathbf{\Omega} \times (\xi_j + \mathbf{r})) \cdot \nabla N_0 = 0,$$

получаем уравнение для Φ_0 :

$$N_0 \Delta\Phi_0 + (\nabla N_0) \cdot (\nabla\Phi_0) - \gamma_0 N_0 \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} - \dot{\xi}_j \cdot \nabla\Phi_0\right) = 0. \quad (12)$$

Функцию Φ_0 запишем в виде суммы двух составляющих:

$$\Phi_0 = \varphi_0 + \varphi_1,$$

где φ_0 – чистый вклад вихрей в окрестности j -го вихря, а дополнительная функция φ_1 обеспечивает выполнение уравнения (12).

Функцию φ_0 запишем как

$$\begin{aligned}
\varphi_0(r, \theta) &= n_j \theta + \sum_{k \neq j} \frac{n_k(\eta_j - \eta_k)}{(\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2} r \sin \theta - \\
&- \sum_{k \neq j} \frac{n_k(\zeta_j - \zeta_k)}{(\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2} r \cos \theta + \dots \equiv \\
&\equiv n_j \theta + (C_{1j} \sin \theta - S_{1j} \cos \theta)r + \dots
\end{aligned} \quad (13)$$

Суммирование ведется по всем вихрям, кроме j -го; для первой суммы введено обозначение C_{1j} и S_{1j} – для второй. Первое слагаемое – вклад собственно j -го вихря, следующие члены описывают взаимодействие этого вихря с остальными $N_v - 1$ вихрями. Фазовый сдвиг, обусловленный влиянием других вихрей, опустим как не влияющий на решение. (Подробный вывод этих формул см. в предыдущей работе [1].)

Очевидно, что $\Delta\varphi_0 = 0$. Тогда уравнение для φ_1 принимает вид

$$N_0\Delta\varphi_1 + (\nabla N_0) \cdot (\nabla\varphi_0 + \nabla\varphi_1) - \gamma_0 N_0 \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \dot{\xi}_j \cdot (\nabla\varphi_0 + \nabla\varphi_1) \right) = 0.$$

Функцию φ_1 будем строить в виде ряда Фурье. Решение *вблизи j -го вихря* с точностью до членов порядка r , $r \ln r$ оказывается равным

$$\begin{aligned} \Phi_0(r, \theta) = & n_j\theta + (C_{1j} \sin \theta - S_{1j} \cos \theta)r + A_1 r \cos \theta + B_1 r \sin \theta + \\ & + \left(\frac{\Omega_{tr}^2 \zeta_j}{\Xi_j^2} - \frac{\gamma_0}{2} \dot{\zeta}_j \right) n_j r \ln r \cos \theta - \\ & - \left(\frac{\Omega_{tr}^2 \eta_j}{\Xi_j^2} - \frac{\gamma_0}{2} \dot{\eta}_j \right) n_j r \ln r \sin \theta + O(r^3, r^3 \ln r), \end{aligned} \quad (14)$$

где A_1, B_1 – произвольные постоянные, определяемые граничными условиями. Для конденсата *в ограниченной области* на границе ставится *условие непротекания*: нормальная компонента скорости на границе должна обращаться в нуль. Для обеспечения этого условия к реальной системе вихрей добавляется система отраженных вихрей противоположного знака (см., например, [2]). Для газового облака, не имеющего твердой границы, этот метод неприменим.

Для определения неизвестных постоянных Rubinstein, Pismen [14] предложили оригинальный способ, основанный на использовании известной асимптотики *вблизи вихря*. Введем вспомогательный вектор \mathbf{U} :

$$n_j \mathbf{U} = \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}, -\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \right). \quad (15)$$

Вычисляя градиент фазы $\Phi_0(r, \theta)$ в *декартовых координатах* (x, y) , $\nabla\Phi_0(r, \theta) = \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \nabla r + \frac{\partial\Phi_0}{\partial \theta} \nabla \theta$, где $\nabla r = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\nabla \theta = (-\sin \theta, \cos \theta)/r$, из решения (14) получаем непосредственно:

$$\begin{aligned} n_j \mathbf{U}^{(1)} = & \frac{n_j}{r} (\cos \theta, \sin \theta) + (C_{1j}, S_{1j}) + (B_1, -A_1) - \frac{n_j \Omega_{tr}^2}{\Xi_j^2} (\eta_j, \zeta_j) \ln r + \frac{n_j \Omega_{tr}^2}{\Xi_j^2} \times \\ & \times (\zeta_j \sin \theta \cos \theta - \eta_j \sin^2 \theta, \eta_j \sin \theta \cos \theta - \zeta_j \cos^2 \theta) + \frac{n_j \gamma_0}{2} \ln r (\dot{\eta}_j, \dot{\zeta}_j) - \\ & - \frac{n_j \gamma_0}{2} (\dot{\zeta}_j \sin \theta \cos \theta - \dot{\eta}_j \sin^2 \theta, \dot{\eta}_j \sin \theta \cos \theta - \dot{\zeta}_j \cos^2 \theta). \end{aligned} \quad (16)$$

Смысл каждого слагаемого довольно прозрачен: первое слагаемое представляет собой вклад самого вихря; второе – вклад остальных $N_v - 1$ вихрей; следующие два слагаемых обусловлены неоднородностью конденсата, а слагаемые порядка γ_0 определяются диссипацией. Заметим, что они зависят от *скорости j -го вихря*. Такой вид соответствует формуле (14) из работы [14], если добавить диссипацию.

Запишем плотность конденсата $N_0(\mathbf{r})$ (8) в виде $N_0(\mathbf{r}) = \exp(2v(\mathbf{r}))$, откуда

$$v(x, y) = \frac{1}{2} \ln N_0(x, y) = \frac{1}{2} \ln (\mu - \Omega_{tr}^2 (\xi_j + \mathbf{r})^2). \quad (17)$$

Стационарное решение уравнения для фазы (12) будем искать *вблизи вихря*. В терминах $v(x, y)$ уравнение примет вид

$$\Delta\Phi_0 + 2(\nabla v \cdot \nabla\Phi_0) + \gamma_0 (\dot{\xi}_j \cdot \nabla\Phi_0) = 0.$$

Введем новую функцию $W(x, y)$, задав ее равенствами

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} &= -n_j \left(\frac{\partial W}{\partial y} + W \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma_0 \dot{\zeta}_j \right) \right), \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} &= n_j \left(\frac{\partial W}{\partial x} + W \left(2 \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma_0 \dot{\eta}_j \right) \right).\end{aligned}$$

Легко убедиться, что такое представление тождественно удовлетворяет уравнению для Φ_0 . Вектор $n_j \mathbf{U}$ (15) в терминах $W(x, y)$ запишется как

$$n_j \mathbf{U} = \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) = n_j \nabla W + n_j W (2 \nabla v + \gamma_0 \dot{\boldsymbol{\xi}}_j) \quad (18)$$

Это второе представление того же вектора \mathbf{U} . С учетом условия циркуляции (2) для W получаем уравнение с источником в точке $r = 0$:

$$\Delta W + 2 \nabla W \cdot \nabla v + 2 W \Delta v + \gamma_0 \nabla W \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_j = 2\pi \delta(r).$$

Полагая $W(x, y) = H(x, y) \exp(v_0 - v(x, y) - \gamma_0(\dot{\eta}_j x + \dot{\zeta}_j y)/2)$, $v_0 = v(0, 0)$, получаем уравнение для $H(x, y)$:

$$\Delta H - H((\nabla v)^2 - \Delta v + \gamma_0(\nabla v \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_j) + \gamma_0^2(\dot{\eta}_j^2 + \dot{\zeta}_j^2)/4) = 2\pi \delta(r),$$

которое в окрестности j -го вихря, при $r \rightarrow 0$, можно записать как

$$\Delta H - m_j^2 H = 2\pi \delta(r). \quad (19)$$

Здесь множитель m_j^2 при функции H вычислен при $r = 0$ с учетом выражения (17) для функции v . Диссипация вносит вклад в это выражение, однако с учетом того, что γ_0 и скорость вихря $\dot{\boldsymbol{\xi}}_j$ малы, величина слагаемых с γ_0 не больше, чем отброшенные члены порядка r , поэтому в вычислениях будем использовать приближение $m_j^2 \approx (\nabla v)^2 - \Delta v$. Непосредственные вычисления дают

$$m_j^2 \approx \frac{2\Omega_{tr}^2}{\Xi_j^2} + \frac{3\Omega_{tr}^4}{\Xi_j^4} \xi_j^2 = \frac{\Omega_{tr}^2(2\mu + \Omega_{tr}^2 \xi_j^2)}{(\mu - \Omega_{tr}^2 \xi_j^2)^2}. \quad (20)$$

Уравнение (19) представляет собой уравнение модифицированных функций Бесселя нулевого порядка, и расходящееся центрально-симметричное решение вблизи нуля имеет асимптотику [4]

$$H(r) = a_0(\ln 2 - \gamma - \ln(rm_j) + O(r^2)).$$

Здесь a_0 – произвольная постоянная, γ – постоянная Эйлера. Вспомогательный вектор $n_j \mathbf{U}$ (18) вычисляется непосредственно:

$$\begin{aligned}n_j \mathbf{U}^{(2)} &= -\frac{n_j a_0}{r} (\cos \theta, \sin \theta) + \frac{n_j a_0 \Omega_{tr}^2}{\Xi_j^2} (\eta_j, \zeta_j) \ln \frac{rm_j e^\gamma}{2} - \\ &\quad - \frac{n_j a_0 \Omega_{tr}^2}{\Xi_j^2} (\eta_j \cos^2 \theta + \zeta_j \sin \theta \cos \theta, \eta_j \sin \theta \cos \theta + \zeta_j \sin^2 \theta) - \\ &\quad - \frac{n_j a_0 \gamma_0}{2} (\dot{\eta}_j, \dot{\zeta}_j) \ln \frac{rm_j e^\gamma}{2} + \frac{n_j a_0 \gamma_0}{2} \times \\ &\quad \times (\dot{\eta}_j \cos^2 \theta + \dot{\zeta}_j \sin \theta \cos \theta, \dot{\eta}_j \sin \theta \cos \theta + \dot{\zeta}_j \sin^2 \theta).\end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с вычисленным ранее вектором (16), получаем, что $a_0 = -1$, а B_1 и A_1 должны быть заданы как

$$B_1 = -n_j \ln \left(\frac{m_j e^{\gamma-1}}{2} \right) \left(\frac{\eta_j \Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} - \frac{\gamma_0}{2} \dot{\eta}_j \right),$$

$$A_1 = n_j \ln \left(\frac{m_j e^{\gamma-1}}{2} \right) \left(\frac{\zeta_j \Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} - \frac{\gamma_0}{2} \dot{\zeta}_j \right).$$

Тогда с точностью до слагаемых порядка r фаза Φ_0 принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_0(r, \theta) = n_j \theta + \left[-S_{1j} + n_j \left(\frac{\zeta_j \Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} - \frac{\gamma_0}{2} \dot{\zeta}_j \right) \ln \frac{rm_j e^{\gamma-1}}{2} \right] r \cos \theta + \\ + \left[C_{1j} - n_j \left(\frac{\eta_j \Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} - \frac{\gamma_0}{2} \dot{\eta}_j \right) \ln \frac{rm_j e^{\gamma-1}}{2} \right] r \sin \theta. \end{aligned}$$

Волновая функция ψ_0 (11) с этой же точностью запишется как

$$\begin{aligned} \psi_0(r, \theta) = \frac{\Xi_j}{g} e^{in_j \theta} \left\{ 1 - \frac{\Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} (\eta_j \cos \theta + \zeta_j \sin \theta) r + i \left[(C_{1j} \sin \theta - S_{1j} \cos \theta) r + \right. \right. \\ \left. \left. + n_j r \ln \frac{rm_j e^{\gamma-1}}{2} \left(\left(\frac{\zeta_j \Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} - \frac{\gamma_0}{2} \dot{\zeta}_j \right) \cos \theta - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left(\frac{\eta_j \Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} - \frac{\gamma_0}{2} \dot{\eta}_j \right) \sin \theta \right) \right] + O(r^3, r^3 \ln r) \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Таково решение «внешнего» уравнения (7).

4. Внутреннее решение. Решение уравнения (10) тоже будем искать в виде разложения по малому параметру ε :

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \Psi_0(\mathbf{R}, t) + \varepsilon \Psi_1(\mathbf{R}, t) + \varepsilon^2 \Psi_2(\mathbf{R}, t) + \dots$$

Подстановка этого разложения в уравнение (10) дает последовательность уравнений для функций Ψ_0, Ψ_1, \dots :

$$\Delta \Psi_0 + \Psi_0 (\Xi_j^2 - g^2 |\Psi_0|^2) = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_1 + \Psi_1 (\Xi_j^2 - 2g^2 |\Psi_0|^2) - g^2 \Psi_0^2 \bar{\Psi}_1 = i(\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}_j) \cdot \nabla \Psi_0 - \\ - 2\Psi_0 \Omega_{\text{tr}}^2 (\boldsymbol{\xi}_j \cdot \mathbf{R}) - (i - \gamma_0) (\boldsymbol{\xi}_j \cdot \nabla \Psi_0), \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Оператор, стоящий в левой части уравнения (23), обозначим через L :

$$L[\Psi_1, \bar{\Psi}_1] = \Delta \Psi_1 + \Psi_1 (\Xi_j^2 - 2g^2 |\Psi_0|^2) - g^2 \Psi_0^2 \bar{\Psi}_1. \quad (24)$$

Для метода асимптотических сопоставлений нужно решение *вдали от вихря*, то есть при $R \gg 1$. Функции Ψ_0, Ψ_1 будем строить аналогично построению функций для внешнего решения:

$$\Psi_0(\mathbf{R}) = \rho_0(\mathbf{R}) \exp(in_j \theta),$$

$$\Psi_1(\mathbf{R}, t) = (u_{1r}(\mathbf{R}, t) + i u_{1\theta}(\mathbf{R}, t)) \exp(in_j \theta).$$

Подстановка Ψ_0 в уравнение (22) дает $\rho_0(R, \theta) = f_0(R)$, для f_0 имеем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$f_0'' + \frac{1}{R} f_0' + f_0 \left(\Xi_j^2 - \frac{n_j^2}{R^2} - g^2 f_0^2 \right) = 0, \quad (25)$$

решение которого при больших R имеет асимптотику

$$f_0(R) = \frac{\Xi_j}{g} \left(1 - \frac{n_j^2}{2\Xi_j^2 R^2} - \frac{n_j^2(8+n_j^2)}{8\Xi_j^4 R^4} - \dots \right). \quad (26)$$

Для функций $\{u_{1r}, u_{1i}\}$, определяющих Ψ_1 , получаем уравнения

$$\begin{aligned} \Delta u_{1r} - \frac{2n_j}{R^2} \frac{\partial u_{1i}}{\partial \theta} + u_{1r} \left(\Xi_j^2 - 3g^2 f_0^2 - \frac{n_j^2}{R^2} \right) &= 2f_0 \Omega_{\text{tr}}^2 (\boldsymbol{\xi}_j \cdot \mathbf{R}) - \\ &- n_j f_0 (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}_j) \cdot \nabla \theta - n_j f_0 (\dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla \theta) - \gamma_0 f_0' (\dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla R), \\ \Delta u_{1i} + \frac{2n_j}{R^2} \frac{\partial u_{1r}}{\partial \theta} + u_{1i} \left(\Xi_j^2 - g^2 f_0^2 - \frac{n_j^2}{R^2} \right) &= \\ &= f_0' (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}_j) \cdot \nabla R + f_0' (\dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla R) - \gamma_0 n_j f_0 (\dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla \theta), \end{aligned}$$

где ∇R и $\nabla \theta$ вычислены в декартовых координатах, а штрихом обозначена производная по R . Функции $\{u_{1r}, u_{1i}\}$ строим в виде рядов Фурье, и *вдали от вихря*, при $R \gg 1$, первые члены разложения дают

$$\begin{aligned} u_{1r}(R, \theta) &= \frac{\Xi_j}{g} \left(-\frac{\Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} (\eta_j \cos \theta + \zeta_j \sin \theta) R + O\left(\frac{1}{R}, \frac{1}{R} \ln R\right) \right), \\ u_{1i}(R, \theta) &= \frac{\Xi_j}{g} \left((C_0 \cos \theta + D_0 \sin \theta) R + n_j R \ln R \left(\frac{\Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} (\zeta_j \cos \theta - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \eta_j \sin \theta) - \frac{\gamma_0}{2} (\dot{\zeta}_j \cos \theta - \dot{\eta}_j \sin \theta) \right) + \dots \right). \quad (27) \end{aligned}$$

Как и во внешнем решении, здесь остались неопределенные постоянные C_0 , D_0 . Для их определения используем условие совместности уравнения (23) [10, 14]: ортогональность неоднородной (правой) части уравнения первой собственной функции левой части – оператора (24). Для оператора (24), заданных гладких функций $u(x)$, $v(x)$ и двумерной области D имеем

$$\int_D \text{Re}(u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\partial D} \text{Re}(u \partial_n v - v \partial_n u) d\ell,$$

где ∂_n – производная по внешней нормали. В качестве функций u и v выберем $u = \mathbf{e} \cdot \nabla \Psi_0$ ($\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ – произвольный единичный вектор), $v = \Psi_1$. Область D выберем в виде круга радиуса $\mathcal{L} = O(\varepsilon^{-1/2}) \gg 1$ вокруг j -го вихря таким образом, чтобы граница круга попадала в область сопоставления решений, а остальные вихри располагались далеко за пределами круга.

Непосредственно проверяем, что u является собственной функцией оператора L : $Lu = L(\mathbf{e} \cdot \nabla \Psi_0) = 0$. Производная по внешней нормали – это производная по R , а Lv совпадает с правой частью уравнения (23), и интегральное тождество принимает вид

$$\int_D \text{Re}((\mathbf{e} \cdot \nabla \Psi_0) \overline{L\Psi_1}) dV = \int_{\partial D} \text{Re} \left((\mathbf{e} \cdot \nabla \Psi_0) \frac{\partial \Psi_1}{\partial R} - \Psi_1 \frac{\partial (\mathbf{e} \cdot \nabla \Psi_0)}{\partial R} \right) d\ell.$$

Для вычисления *интеграла по кругу* D в левую часть тождества подставим $\Psi_0(R, \theta) = f_0(R) \exp(in_j \theta)$ и правую часть уравнения (23). Подынтегральное выражение примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= (e_1 \eta_j + e_2 \zeta_j) \left(\frac{\Omega_{\text{tr}}^2}{2} f_0 f_0' R - n_j \Omega_0 \frac{f_0 f_0'}{R} \right) + (-e_1 \dot{\zeta}_j + e_2 \dot{\eta}_j) \frac{n_j f_0 f_0'}{R} - \\ &- \frac{\gamma_0}{2} (e_1 \dot{\eta}_j + e_2 \dot{\zeta}_j) \left(f_0'^2 + \frac{n_j^2 f_0^2}{R^2} \right), \end{aligned}$$

и интеграл по D , $dV = R dR d\theta$, сводится к линейной комбинации четырех интегралов:

$$i_1 = \int_0^{\mathcal{L}} f_0 f_0' dR, \quad i_2 = \int_0^{\mathcal{L}} f_0 f_0' R^2 dR, \quad i_3 = \int_0^{\mathcal{L}} f_0'^2 R dR, \quad i_4 = n_j^2 \int_0^{\mathcal{L}} \frac{f_0^2}{R} dR.$$

Первый интеграл, i_1 , вычисляется элементарно:

$$i_1 = \int_0^{\mathcal{L}} f_0 f_0' dR = \frac{f_0^2}{2} \Big|_0^{\mathcal{L}} = \frac{\Xi_j^2}{2g^2},$$

а интеграл i_2 , с поправкой на нормировку волновой функции, возьмем из работы [14]:

$$i_2 = \int_0^{\mathcal{L}} f_0 f_0' R^2 dR = \frac{n_j^2}{g^2} \ln(a_1 \Xi_j \mathcal{L})$$

(здесь численный параметр a_1 равен $a_1 \approx \exp 0.405$ [14]).

Путем несложных преобразований уравнения (25) для f_0 с точностью до слагаемых порядка $O(1/\mathcal{L}^3)$ получим соотношение

$$i_3 + i_4 = \Xi_j^2 i_2 - 2n_j^2 i_1.$$

Тогда, интегрируя \mathcal{I}_1 по кругу, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 = \frac{\pi n_j \Xi_j^2}{g^2} & \left(\frac{2n_j \Omega_{tr}^2}{\Xi_j^2} \ln(a_1 \mathcal{L} \Xi_j) (e_1 \eta_j + e_2 \zeta_j) - \Omega_0 (e_1 \eta_j + e_2 \zeta_j) + \right. \\ & \left. + (-e_1 \dot{\zeta}_j + e_2 \dot{\eta}_j) - n_j \gamma_0 (e_1 \dot{\eta}_j + e_2 \dot{\zeta}_j) \ln \frac{a_1 \mathcal{L} \Xi_j}{e} \right). \end{aligned}$$

Интеграл \mathcal{I}_2 по контуру ∂D вычисляется непосредственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 = \frac{\pi n_j \Xi_j^2}{g^2} & \left(\frac{2n_j \Omega_{tr}^2}{\Xi_j^2} \ln(\mathcal{L} \sqrt{e}) (e_1 \eta_j + e_2 \zeta_j) + \frac{2g}{\Xi_j} (-e_1 D_0 + e_2 C_0) - \right. \\ & \left. - n_j \gamma_0 (e_1 \dot{\eta}_j + e_2 \dot{\zeta}_j) \ln(\mathcal{L} \sqrt{e}) \right). \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю разность $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2$, находим C_0 и D_0 :

$$C_0 = \frac{n_j \Omega_{tr}^2}{\Xi_j^2} \zeta_j \ln \frac{a_1 \Xi_j}{\sqrt{e}} + \frac{1}{2} \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \Omega \zeta_j - \frac{n_j \gamma_0}{2} \zeta_j \ln \frac{a_1 \Xi_j}{e \sqrt{e}},$$

$$D_0 = -\frac{n_j \Omega_{tr}^2}{\Xi_j^2} \eta_j \ln \frac{a_1 \Xi_j}{\sqrt{e}} + \frac{1}{2} \dot{\zeta}_j + \frac{1}{2} \Omega \eta_j + \frac{n_j \gamma_0}{2} \dot{\eta}_j \ln \frac{a_1 \Xi_j}{e \sqrt{e}}.$$

Итак, внутреннее решение с точностью до слагаемых порядка R есть

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{R}, t) = \Psi_0(\mathbf{R}, t) + \varepsilon \Psi_1(\mathbf{R}, t) = \frac{\Xi_j}{g} e^{in_j \theta} & \left[1 - \varepsilon R \frac{\Omega_{tr}^2}{\Xi_j^2} (\eta_j \cos \theta + \zeta_j \sin \theta) + \right. \\ & + i\varepsilon \left(\frac{1}{2} (\dot{\eta}_j - \Omega \zeta_j) R \cos \theta + \frac{1}{2} (\dot{\zeta}_j + \Omega \eta_j) R \sin \theta + \right. \\ & + \frac{n_j \Omega_{tr}^2}{\Xi_j^2} R \ln \left(\frac{R a_1 \Xi_j}{\sqrt{e}} \right) (\zeta_j \cos \theta - \eta_j \sin \theta) - \\ & \left. \left. - \frac{n_j \gamma_0}{2} R \ln \left(\frac{R a_1 \Xi_j}{e \sqrt{e}} \right) (\dot{\zeta}_j \cos \theta - \dot{\eta}_j \sin \theta) + \dots \right] \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

5. Сопоставление решений: уравнения движения вихрей. В области сопоставления $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$ радиусы r и R связаны соотношением $r = \varepsilon R$. Действительные части решений (21) и (28) совпадают. Условие совпадения мнимых частей запишется в виде двух уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_j - \Omega \zeta_j &= -2 \sum_{k \neq j} \frac{n_k (\zeta_j - \zeta_k)}{(\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2} + \frac{2n_j \Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} \zeta_j \left(\ln \frac{m_j \varepsilon e^\gamma}{2a_1 \Xi_j} - \frac{1}{2} \right) - \\ &\quad - n_j \gamma_0 \dot{\zeta}_j \left(\ln \frac{m_j \varepsilon e^\gamma}{2a_1 \Xi_j} + \frac{1}{2} \right), \\ \dot{\zeta}_j + \Omega \eta_j &= 2 \sum_{k \neq j} \frac{n_k (\eta_j - \eta_k)}{(\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2} - \frac{2n_j \Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} \eta_j \left(\ln \frac{m_j \varepsilon e^\gamma}{2a_1 \Xi_j} - \frac{1}{2} \right) + \\ &\quad + n_j \gamma_0 \dot{\eta}_j \left(\ln \frac{m_j \varepsilon e^\gamma}{2a_1 \Xi_j} + \frac{1}{2} \right).\end{aligned}\quad (29)$$

Меняя j от 1 до N_v , получаем систему $2N_v$ обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение N_v вихрей во вращающемся конденсате Бозе – Эйнштейна.

Левая часть уравнений представляет собой скорость j -го вихря в системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω . Слагаемые справа описывают: влияние остальных $N_v - 1$ вихрей; влияние неоднородности; влияние диссипации. Слагаемые, пропорциональные Ω_{tr}^2 , обусловлены неоднородностью конденсата. Для единственного вихря получаем в точности выражение (23) из работы [14]: $\exp(v_0) = \Xi_j$, $\nabla v_0 = \frac{\Omega_{\text{tr}}^2}{\Xi_j^2} (\eta_j, \zeta_j)$. Неоднород-

ность дает дополнительное вращение вихря: это слагаемое можно записать в векторном виде $(\mathbf{G} \times \boldsymbol{\xi}_j)$ по аналогии со слагаемым в левой части $(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}_j)$.

Члены, пропорциональные γ_0 , описывают влияние диссипации. Если при заданной угловой скорости существование вихрей энергетически невыгодно, вихрь будет двигаться к границе облака и исчезнет; если угловая скорость достаточно велика, вихри будут двигаться в точки равновесия. Логарифмический коэффициент в этом слагаемом выражается через те же параметры, что и коэффициент в слагаемом, обусловленном неоднородностью среды. Кроме глобальных постоянных (постоянная Эйлера γ), под знак логарифма входят параметры задачи m_j , Ξ_j , ε ((20), (9), (5)) и единственный численный параметр a_1 [14].

При $\gamma_0 = 0$ уравнения (29) (с точностью до нормировок и более скрупулезных вычислений неопределенных постоянных) сводятся к уравнениям (27) работы [1], и их можно записать в гамильтоновом виде. Однако с добавлением диссипации это уже невозможно.

При выводе уравнений были использованы приближенные решения внутреннего и внешнего уравнения, в которых были сохранены члены только нулевого (для внешнего решения) и первого (для внутреннего решения) порядка по ε . Это накладывает ограничения на применимость уравнений: **а)** расстояние между вихрями должно быть больше ε ; **б)** вихри не должны подходить слишком близко к границе, где плотность конденсата становится пренебрежимо малой. Это означает, что система *не описывает*: 1) слияние вихрей и их аннигиляцию, 2) исчезновение вихрей на границе. Эти ограничения следует учитывать в численных экспериментах.

6. Траектории движения вихрей. Примеры. Для построения траекторий движения вихрей будем решать систему уравнений (29) методом Рунге – Кутты четвертого порядка. Для этого приведем ее к явному виду:

$$\dot{\eta}_j = f_j(\eta_k, \zeta_k), \quad \dot{\zeta}_j = g_j(\eta_k, \zeta_k), \quad j, k = 1, 2, \dots, N_v,$$

и зададим начальные положения вихрей. Траектории движения существенно зависят от выбора начальной позиции. Кроме начальных данных, траектории зависят:

- от угловой скорости вращения конденсата как целого: при малых угловых скоростях появление вихрей может оказаться энергетически невыгодным. В отличие от бездиссипативной модели, в которой при любой угловой скорости вихри оставались внутри конденсата, диссипативная модель наглядно демонстрирует удаление вихря из конденсата, если скорости вращения недостаточно. На рис. 1 показаны два примера: уход одного вихря на границу по спиралевидной траектории (рис. 1а) и удаление одного вихря из двух при угловой скорости, когда допустимо существование только одного вихря (рис. 1б).

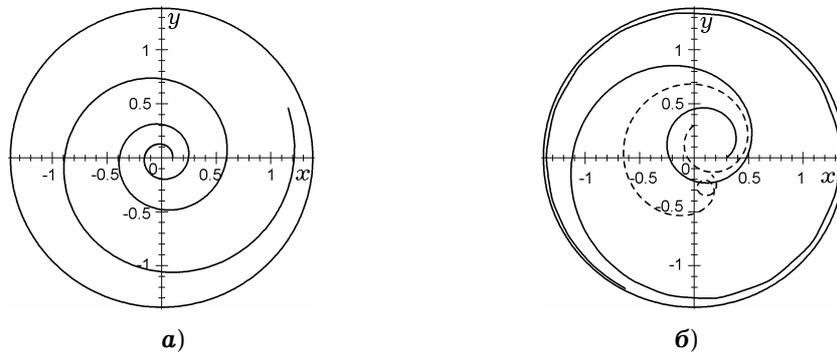


Рис. 1

- от соотношения частот магнитной ловушки. Параметр Ω_{tr} при предложенном способе обезразмеривания оказывается равным 1, однако отношением частот определяется малый параметр ε (5). Параметр ε может быть уменьшен, если увеличить ω_z : конденсат становится еще более плоским, влияние неоднородности плотности ослабляется, и модель приближается к однородной. С увеличением ε отходим от двумерной модели, а поскольку ε является малым параметром разложения, влияние отброшенных слагаемых может быть существенным. Поэтому нужно следить, чтобы ε было мало: приемлемые значения обычно оцениваются как $0.01 < \varepsilon < 0.06$.

- от параметра диссипации γ_0 . Чем больше диссипация, тем скорее система приходит в равновесие.

- от знаков вихрей. В конденсатах Бозе – Эйнштейна допустимо существование вихрей разных знаков. Движению диполей – паре вихрей с противоположной завихренностью – посвящено большое число работ. Бездиссипативная модель приводит к периодическому или квазипериодическому движению (см. примеры в предыдущей работе [1]). Диссипативная модель приводит к уничтожению диполя: вихри разных знаков либо аннигилируют, либо отрицательный вихрь выводится за пределы конденсата.

- от числа вихрей. Для демонстрации приведем траектории движения трех, пяти и семи вихрей. Заметим, что при числе вихрей больше шести энергетически выгодно появление центрального вихря. Равновесные положения вихрей можно вычислить явно, если для всех $j = 1, 2, \dots, N_v$ в системе (29) положить $\dot{\eta}_j = \dot{\zeta}_j = 0$.

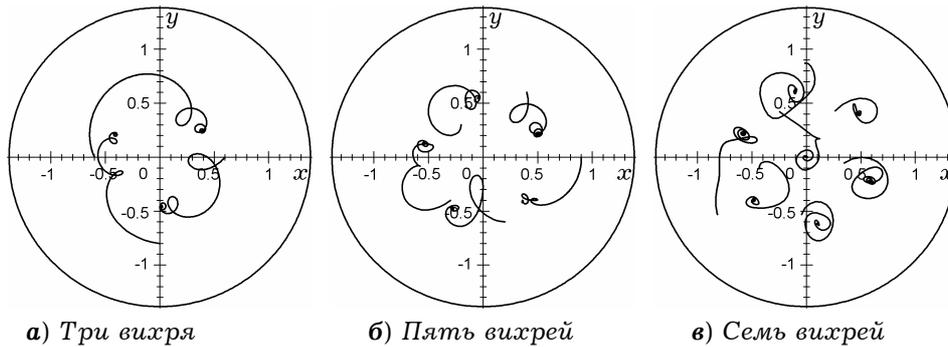


Рис. 2

Неявно в уравнения (29) входит химический потенциал (через него выражается параметр Ξ_j (9)), а значит, число частиц N в конденсате, определяющее размер газового облака. Поэтому можно проводить численные эксперименты для конденсатов произвольных размеров.

Заключение. В работе получены уравнения движения вихрей (29) в конденсатах Бозе – Эйнштейна. Работа обобщает предыдущие исследования автора: кроме влияния вращения и неоднородности среды, учитывается влияние диссипативных процессов. Диссипация, имеющая место во всех реальных физических процессах, приводит к аннигиляции вихрей (взаимное уничтожение вихрей разных знаков или исчезновение вихрей на границе), если существование вихрей в конденсате энергетически невыгодно, либо к движению вихрей к точкам равновесия. Приведены примеры численных расчетов для разных ситуаций. Полученные траектории вихрей, а также равновесные вихревые конфигурации могут быть сопоставлены с результатами реальных экспериментов.

1. Зуева Т. И. Уравнения движения вихрей в конденсатах Бозе – Эйнштейна: влияние вращения и неоднородности плотности // *Мат. методы та физ.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 4. – С. 68–83.
 То же: Zueva T. I. Equations of motion of the vortices in Bose–Einstein condensates: influence of rotation and the inhomogeneity of density // *J. Math. Sci.* – 2017. – **220**, No. 1. – P. 82–102. – DOI 10.1007/s10958-016-3169-3.
2. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. – Москва: Мир, 1964. – 659 с.
 То же: *Milne-Thomson L. M. Theoretical hydrodynamics.* – London: Macmillan, 1955. – xxi +632 p.
3. Питаевский Л. П. Феноменологическая теория сверхтекучести вблизи λ -точки // *Журн. эксперим. теорет. физики.* – 1959. – **35**, № 2. – С. 408–415.
 То же: *Pitaevskii L. P. Phenomenological theory of superfluidity near the λ -point* // *Sov. Phys.-JETP* – 1959. – **8**, No. 2. – P. 282–287.
4. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
 То же: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables* / Eds M. Abramowitz, I. A. Stegun. – New York: Dover Publ., 1972. – 1046 p.
5. Castin Y., Dum R., Bose–Einstein condensates with vortices in rotating traps // *Eur. Phys. J. D.* – 1999. – **7**, No. 3. – P. 399–412.
6. Choi S., Morgan S. A., Burnett K. Phenomenological damping in trapped atomic Bose-Einstein condensates // *Phys. Rev. A.* – 1998. – **57**, No. 5. –P. 4057–4060.
7. E Weinan. Dynamics of vortices in Ginzburg – Landau theories with applications to superconductivity // *Physica D.* – 1994. – **77**, No. 4. – P. 383–404.
8. Gertjerenken B., Kevrekidis P. G., Carretero-González R., Anderson B. P. Generating and manipulating quantized vortices on-demand in a Bose–Einstein condensate: A numerical study // *Phys. Rev. A.* – 2016. – **93**, No. 2. – 023604.
 – <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.023604>.

9. Middelkamp S., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Carretero-González R., Schmelcher P. Stability and dynamics of matter-wave vortices in the presence of collisional inhomogeneities and dissipative perturbations // *J. Phys. B: Atomic, Molecular and Optical Phys.* – 2010. – **43**, No. 15. – 155303.
– <https://doi.org/10.1088/0953-4075/43/15/155303>.
10. Neu J. C. Vortices in complex scalar fields // *Physica D.* – 1990. – **43**, No. 2-3. – P. 385–406.
11. Penckwitt A. A., Ballagh R. J., Gardiner C. W. Nucleation, growth and stabilization of Bose–Einstein condensate vortex lattices // *Phys Rev Lett.* – 2002. – **89**, No. 26. – 260402. – <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.260402>.
12. *Progress in low temperature physics: Quantum turbulence.* – Volume XVI / Ed. by M. Tsubota, W. P. Halperin. – Amsterdam: Elsevier, 2008. – 432 p.
13. Raman C., Köhl M., Onofrio R., Durfee D. S., Kuklewicz C. E., Hadzibabic Z., Ketterle W. Evidence for a critical velocity in a Bose-Einstein condensed gas // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – **83**, No. 13. – 2502.
– <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.2502>.
14. Rubinstein B. Y., Pismen L. M. Vortex motion in the spatially inhomogeneous conservative Ginzburg-Landau model // *Physica D.* – 1994. – **78**, No. 1-2. – P. 1–10.
15. Tsubota M., Kasamatsu K., Ueda M. Vortex lattice formation in a rotating Bose-Einstein condensate // *Phys. Rev. A.* – 2002. – **65**, No. 2. – 023603.
– <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.023603>.
16. Tzou J. C., Kevrekidis P. G., Kolokolnikov T., Carretero-González R. Weakly nonlinear analysis of vortex formation in a dissipative variant of the Gross-Pitaevskii equation // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* – 2016. – **15**, No. 2. – P. 904–922.
17. Yan D., Carretero-González R., Frantzeskakis D. J., Kevrekidis P. G., Proukakis N. P., Spirn D. Exploring vortex dynamics in the presence of dissipation: Analytical and numerical results // *Phys. Rev. A.* – 2014. – **89**, No. 4. – 043613.
– <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.043613>.

ВПЛИВ ДИСИПАЦІЇ НА РУХ ВИХОРИВ У КОНДЕНСАТАХ БОЗЕ–ЕЙНШТЕЙНА, ЯКІ ОБЕРТАЮТЬСЯ

У рамках моделі Гросса–Пітаєвського отримано систему рівнянь, що описує рух квантованих вихорів у конденсатах Бозе–Ейнштейна. Розглядається сильно анізотропний потенціал, коли поле, що притискає конденсат у напрямку z , є набагато більшим, ніж у поперечному напрямку, і конденсат набуває форми плоского диска. Перехід до двовимірної ситуації дозволяє застосувати метод асимптотичного зіставлення розв'язків і отримати рівняння руху вихорів у явному вигляді. Враховано не тільки обертання конденсату в цілому, а й вплив дисипативних процесів, які приводять систему вихорів до рівноваги. Наведено приклади руху вихорів для різних значень зовнішніх параметрів.

Ключові слова: конденсати Бозе–Ейнштейна, вихори, вихорова динаміка, дисипативна модель руху вихорів.

INFLUENCE OF DISSIPATION ON THE VORTEX MOTION IN THE ROTATING BOSE – EINSTEIN CONDENSATES

In the frame of the Gross – Pitaevskii model, a system of equations describing the motion of quantized vortices in the Bose – Einstein condensates is derived. A strongly anisotropic magnetic trap is considered, when the trapping potential in the direction z is much larger than in the transverse direction, so that the condensate takes the form of a plane disk. The transition to a two-dimensional situation permits to use the method of asymptotic matching of solutions and obtain the equations of motion of the vortices in an explicit form. The rotation of the condensate as a whole as well as the effect of dissipative processes leading a system of vortices to equilibrium are taken into account. The vortex motion examples are given for different values of external parameters.

Key words: Bose-Einstein condensates, vortices, vortex dynamics, dissipative model of the vortex motion.

Физ.-техн. ин-т низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Получено
02.01.18