УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен[1,2], Г. С. Пасічник[3✉]

УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ З НЕОБМЕЖЕНО ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ГРУПІ МОЛОДШИХ ЧЛЕНІВ І ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Розглянуто ультрапараболічне рівняння з нескінченно зростаючими при $|x| \to \infty$ молодшими коефіцієнтами та виродженнями при $t = 0$. Для такого рівняння у явному вигляді знайдено фундаментальний розв'язок G і встановлено властивості функції G, зокрема отримано точні оцінки для G і її похідних. За допомогою цих властивостей доведено теореми про інтегральне зображення розв'язків неоднорідного рівняння, які є обмеженими як функції від x, а при $t \to 0$ їхня поведінка залежить від типу виродження рівняння при $t = 0$.

Ключові слова: *ультрапараболічне рівняння, задача Коші, фундаментальний розв'язок, виродження, інтегральне зображення розв'язку.*

У працях [1–10, 12, 13, 16–19, 21] (див. також [20, с. 162–172]) розглядались рівняння вигляду

$$\left(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)A - a_0\right)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

де α і β – неперервні на відрізку $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0,T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і β монотонно неспадна; a_0 – задана функція; A – диференціальний вираз за n-вимірною просторовою змінною x такий, що вираз $\partial_t - A$ є: ***1***) рівномірно в $\Pi_{[0,T]}$ параболічним за Петровським чи за Ейдельманом виразом з обмеженими або необмеженими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами; ***2***) виродженим параболічним типу Колмогорова (ультрапараболічним) виразом, коефіцієнти якого не залежать або від усіх просторових змінних, або тільки від змінних виродження, або залежать від усіх змінних у випадку однієї групи виродження.

Рівняння (1) мають виродження при $t = 0$, які класифікуються за величинами

$$A(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}, \qquad B(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\, d\theta .$$

Так, рівняння (1) має слабке виродження при $A(T,0) < \infty$, сильне – при $A(T,0) = \infty$ і дуже сильне – при $A(T,0) = \infty$ і $B(T,0) = \infty$.

За відповідних умов на коефіцієнти для рівняння (1) побудовано й досліджено фундаментальні розв'язки задачі Коші, за допомогою яких установлено коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші у випадку слабкого виродження, задачі з ваговою початковою умовою, коли виродження не дуже сильне, та задачі без початкової умови для випадку дуже сильного виродження.

У цій статті частина згаданих вище результатів узагальнюється на ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова вигляду (1), у якому коефіцієнти у групі старших членів сталі, а коефіцієнти в групі молодших членів є зростаючими на нескінченності. Такого типу рівняння без вироджень при $t = 0$ є рівняннями Фоккера – Планка –Колмогорова багатовимірного нормального марковського процесу. Зазначимо, що для рівняння, яке тут розглядається, тільки без вироджень на початковій гіперплощині, в статтях

✉ pasichnyk.gs@gmail.com

авторів [11, 14, 15] знайдено в явному вигляді фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), вивчено його властивості та наведено їх застосування.

1. Нехай n_1, n_2, n_3 і n − натуральні числа такі, що $n_3 \le n_2 \le n_1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_\ell := (x_{\ell 1}, \dots, x_{\ell n_\ell}) \in \mathbb{R}^{n_\ell}$, $\ell \in \{1,2,3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$. Розглядатимемо такі рівняння:

$$\begin{aligned}(Lu)(t,x) &:= \alpha(t)\partial_t u(t,x) - \\ &- \beta(t)\Big(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} u(t,x) + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} u(t,x) + \\ &+ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} u(t,x) + b\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{x_{1j}}\big(x_{1j}u(t,x)\big)\Big) - au(t,x) = 0, \\ &(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (2)\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}(L^* v)(\tau,\xi) &:= -\alpha(\tau)\partial_\tau v(\tau,\xi) + \\ &+ \beta(\tau)\Big(\sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}} v(\tau,\xi) + \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}} v(\tau,\xi) - \\ &- \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}} v(\tau,\xi) + b\sum_{j=1}^{n_1}\xi_{1j}\partial_{\xi_{1j}} v(\tau,\xi)\Big) - av(\tau,\xi) = 0, \\ &(\tau,\xi) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (3)\end{aligned}$$

де a_{js}, b і a − дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j,s\} \subset \{1,\dots,n_1\}$, та виконується умова параболічності

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \sigma_1 := (\sigma_{11},\dots,\sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \ge \delta|\sigma_1|^2.$$

Нехай $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ − точка в $\mathbb{R}^n$, де $\xi_\ell \in \mathbb{R}^{n_\ell}$, $\ell \in \{1,2,3\}$; B_R − куля $\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \le R\}$, Γ_R − її межа; L і L^* − диференціальні вирази з (2) і (3). Легко переконатися в правильності такої дивергентної рівності для відповідних функцій u і v:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha(\tau)}(vLu - uL^*v)(\tau,\xi) &= \partial_\tau(uv)(\tau,\xi) - \\ &- \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{\xi_{1j}}\sum_{s=1}^{n_1} a_{js}(v\partial_{\xi_{1s}}u - u\partial_{\xi_{1s}}v)(\tau,\xi) - \\ &- \frac{b\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{\xi_{1j}}(\xi_{1j}vu)(\tau,\xi) - \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{j=1}^{n_2}\xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}}(vu)(\tau,\xi) - \\ &- \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{j=1}^{n_3}\xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}}(vu)(\tau,\xi), \qquad (\tau,\xi) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (4)\end{aligned}$$

Проінтегрувавши рівність (4) за τ, $\tau \in (t_1, t_2)$, $0 < t_1 < t_2 \le T$, і за ξ, $\xi \in B_R$, одержимо формулу

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{B_R} (vLu - uL^* v)(\tau, \xi)\, d\xi = \int_{B_R} (uv)(\tau, \xi) \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} d\xi -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \int_{\Gamma_R} \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} (v \partial_{\xi_{1s}} u - u \partial_{\xi_{1s}} v)(\tau, z) \mu_{1j}\, dS_\xi -$$

$$- b \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \int_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^{n_1} (vu)(\tau, \xi) \xi_{1j} \mu_{1j}\, dS_\xi -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \int_{\Gamma_R} \left(\sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j} \mu_{2j} - \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j} \mu_{3j} \right) (vu)(\tau, \xi)\, dS_\xi\,, \qquad (5)$$

де $(\mu_{11}, \ldots, \mu_{1n_1}, \mu_{21}, \ldots, \mu_{2n_2}, \mu_{31}, \ldots, \mu_{3n_3})$ – орт зовнішньої нормалі до Γ_R. Перехід у цій формулі до границі при $R \to \infty$ для функцій u і v, для яких інтеграли по Γ_R прямують до нуля, приводить до формули

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} (vLu - uL^* v)(\tau, \xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (uv)(\tau, \xi) \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} d\xi\,, \qquad (6)$$

яка використовується для встановлення властивостей ФРЗК.

Рівність (4) фактично означає, що в області $\Pi_{(0,T]}$ диференціальний вираз L^*/α є формально спряженим з виразом L/α.

Оскільки рівняння (2) і (3) при $t = 0$ вироджуються, то для них не завжди можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t = 0$ у звичайному розумінні. Але можна говорити про ФРЗК згідно з такими означеннями.

Означення 1. ФРЗК для рівняння (2) називається функція $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, така, що формула

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}\,, \qquad (7)$$

визначає розв'язок рівняння (2) для $(t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}$, який задовольняє початкову умову

$$u(t, x)\big|_{t=\tau} = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n\,,$$

для будь-якого $\tau \in (0, T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

Означення 2. ФРЗК для рівняння (3) називається функція $G^*(\tau, \xi; t, x)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{\xi, x\} \subset \mathbb{R}^n$, така, що формулою

$$v(\tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} G^*(\tau, \xi; t, x) \varphi(x)\, dx, \qquad (\tau, \xi) \in \Pi_{(0,t)}\,, \qquad (8)$$

визначається в $\Pi_{(0,t)}$ розв'язок рівняння (3), який задовольняє умову

$$v(\tau, \xi)\big|_{t=\tau} = \varphi(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,,$$

для будь-якого $t \in (0, T]$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

Далі наведемо явні формули для функцій G і G^*.

2. Розглянемо задачу Коші

$$(Lu)(t, x) = 0, \qquad (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}\,,$$

$$u(t, x)\big|_{t=\tau} = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n\,, \qquad (9)$$

де φ вважатимемо такою функцією, що всі подальші міркування є законними, зокрема, для неї існує перетворення Фур'є

$$\psi(\sigma) := F_{x\to\sigma}[\varphi], \qquad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Шукаючи розв'язок задачі (9) у вигляді

$$u(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[w(t,\sigma)], \qquad (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}, \tag{11}$$

з використанням властивості оберненого перетворення Фур'є $F^{-1}_{\sigma\to x}$ одержимо для невідомої функції w задачу Коші

$$\left(\alpha(t)\partial_t + \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{n_2}\sigma_{2j}\partial_{\sigma_{1j}} + \sum_{j=1}^{n_3}\sigma_{3j}\partial_{\sigma_{2j}} + \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + b\sum_{j=1}^{n_1}\sigma_{1j}\partial_{\sigma_{1j}}\right) - a\right)w(t,\sigma) = 0, \qquad (t,\sigma) \in \Pi_{(\tau,T]}, \tag{12}$$

$$w(t,\sigma)\big|_{t=\tau} = \psi(\sigma), \qquad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Рівняння (12) є лінійним неоднорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку. Задача Коші для такого рівняння розв'язується методом характеристик. Згідно з цим методом записуємо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dt}{\alpha(t)} = \frac{d\sigma_{11}}{\beta(t)(\sigma_{21} + b\sigma_{11})} = \ldots = \frac{d\sigma_{1n_2}}{\beta(t)(\sigma_{2n_2} + b\sigma_{1n_2})} =$$

$$= \frac{d\sigma_{21}}{\beta(t)\sigma_{31}} = \ldots = \frac{d\sigma_{2n_3}}{\beta(t)\sigma_{3n_3}} = \frac{d\sigma_{1(n_2+1)}}{b\beta(t)\sigma_{1(n_2+1)}} = \ldots =$$

$$= \frac{d\sigma_{1n_1}}{b\beta(t)\sigma_{1n_1}} = \frac{dw}{\left(-\beta(t)\sum\limits_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} + a\right)w}$$

і знаходимо її $n_1 + n_3 + 1$ незалежних інтегралів. Такими інтегралами є

$$\sigma_{1j}e^{-bB(t,\tau)} - \int_\tau^t e^{-bB(\theta,\tau)}\sigma_{2j}(\theta)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta = C_j, \qquad j \in \{1,\ldots,n_2\},$$

$$\sigma_{1j}e^{-bB(t,\tau)} = C_j, \qquad j \in \{n_2+1,\ldots,n_1\},$$

$$\sigma_{2j} - B(t,\tau)\sigma_{3j} = C'_j, \qquad j \in \{1,\ldots,n_3\},$$

$$w\exp\left\{\int_\tau^t\left(\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}(\theta)\sigma_{1s}(\theta)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} - \frac{a}{\alpha(\theta)}\right)d\theta\right\} = C'', \tag{14}$$

де C_j, C'_j, C'' – довільні сталі. З рівностей (14) знаходимо

$$\sigma_{1j} = \left[C_j e^{bB(t,\tau)} + C'_j\alpha_b(B(t,\tau)) + \frac{1}{b}\left(\alpha_b(B(t,\tau)) - B(t,\tau)\right)\sigma_{3j}\right]\zeta'_j +$$

$$+\left[C_j e^{bB(t,\tau)} + \alpha_b(B(t,\tau))\sigma_{2j}\right]\zeta''_j + C_j e^{bB(t,\tau)}\zeta'''_j, \; j \in \{1,\ldots,n_1\},$$

$$\sigma_{2j} = \left[C'_j + B(t,\tau)\sigma_{3j}\right]\zeta'_j + \sigma_{2j}\zeta''_j, \quad j \in \{1,\ldots,n_2\},$$

$$w = C''\exp\left\{\int_\tau^t\left(-\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}(\theta)\sigma_{1s}(\theta)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} + \frac{a}{\alpha(\theta)}\right)d\theta\right\}, \tag{15}$$

де

$$\alpha_b(t) := \begin{cases} (e^{bt}-1)/b, & b \neq 0, \\ t, & b = 0, \end{cases} \quad t > 0, \qquad \zeta'_j := \begin{cases} 1, & j \in \{1,\dots,n_3\}, \\ 0, & j \in \{n_3+1,\dots,n_1\}, \end{cases}$$

$$\zeta''_j := \begin{cases} 1, & j \in \{n_3+1,\dots,n_2\}, \\ 0, & j \in \{1,\dots,n_3,n_2+1,\dots,n_1\}, \end{cases} \qquad \zeta'''_j := \begin{cases} 1, & j \in \{n_2+1,\dots,n_1\}, \\ 0, & j \in \{1,\dots,n_2\}. \end{cases}$$

Нехай $\bar\sigma_{1j}$, $\bar\sigma_{2j}$, $\bar w$ − значення при $t=\tau$ відповідно σ_{1j}, σ_{2j} і w. Тоді $\bar\sigma_{1j} = C_j$, $j \in \{1,\dots,n_1\}$; $\bar\sigma_{2j} = C'_j$, $j \in \{1,\dots,n_3\}$; $\bar\sigma_{2j} = \sigma_{2j}$, $j \in \{n_3+1,\dots,n_2\}$; $\bar w = C''$. Оскільки $\bar w = \psi(\bar\sigma_1,(\bar\sigma'_2,\sigma''_2),\sigma_3)$, $\bar\sigma_1 := (\bar\sigma_{11},\dots,\bar\sigma_{1n_1})$, $\bar\sigma'_2 := (\bar\sigma_{21},\dots,\bar\sigma_{2n_3})$, $\sigma''_2 := (\sigma_{2(n_3+1)},\dots,\sigma_{2n_2})$, то маємо $C'' = \psi(\bar C,(\bar C',\sigma''_2),\sigma_3)$, $\bar C := (C_1,\dots,C_{n_1})$, $\bar C' := (C'_1,\dots,C'_{n_3})$. Враховуючи це, з рівностей (14) і (15) отримуємо

$$w(t,\sigma) = \exp\left\{-\int_\tau^t \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}(\theta)\sigma_{1s}(\theta)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta + aA(t,\tau)\right\}\psi(\bar C,(\bar C',\sigma''_2),\sigma_3) =$$

$$= \exp\left\{-\int_\tau^t \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\left[\left(\sigma_{1j}e^{-bB(t,\theta)} - \sigma_{2j}\beta_b(B(t,\theta)) + \sigma_{3j}\gamma_b(B(t,\theta))\right)\zeta'_j + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\sigma_{1j}e^{-bB(t,\theta)} - \sigma_{2j}\beta_b(B(t,\theta))\right)\zeta''_j + \sigma_{1j}e^{-bB(t,\theta)}\zeta'''_j\right] \times$$

$$\times\left[\left(\sigma_{1s}e^{-bB(t,\theta)} - \sigma_{2s}\beta_b(B(t,\theta)) + \sigma_{3s}\gamma_b(B(t,\theta))\right)\zeta'_s + \right.$$

$$\left. + \left(\sigma_{1s}e^{-bB(t,\theta)} - \sigma_{2s}\beta_b(B(t,\theta))\right)\zeta''_s + \sigma_{1s}e^{-bB(t,\theta)}\zeta'''_s\right]\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta +$$

$$\left. + aA(t,\tau)\right\}\psi\Big((\sigma'_1 e^{-bB(t,\tau)} - \sigma'_2\beta_b(B(t,\tau)) + \sigma_3\gamma_b(B(t,\tau)),$$

$$\sigma''_1 e^{-bB(t,\tau)} - \sigma''_2\beta_b(B(t,\tau)), \sigma'''_1 e^{-bB(t,\tau)}), (\sigma'_2 - B(t,\tau)\sigma_3, \sigma''_2), \sigma_3\Big),$$

$$t > \tau, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$\beta_b(t) := e^{-bt}\alpha_b(t), \qquad \gamma_b(t) := \begin{cases} (t-\beta_b(t))/b, & b \neq 0, \\ t^2/2, & b = 0, \end{cases} \qquad t > 0.$$

Тоді на підставі (11) маємо

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ i(x,\sigma) - \right.$$

$$-\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\int_\tau^t \left[\left(\sigma_{1j}e^{-bB(t,\theta)} - \sigma_{2j}\beta_b(B(t,\theta)) + \sigma_{3j}\gamma_b(B(t,\theta))\right)\zeta'_j + \right.$$

$$\left. + \left(\sigma_{1j}e^{-bB(t,\theta)} - \sigma_{2j}\beta_b(B(t,\theta))\right)\zeta''_j + \sigma_{1j}e^{-bB(t,\theta)}\zeta'''_j\right] \times$$

$$\times\left[\left(\sigma_{1s}e^{-bB(t,\theta)} - \sigma_{2s}\beta_b(B(t,\theta)) + \sigma_{3s}\gamma_b(B(t,\theta))\right)\zeta'_s + \right.$$

$$\left. + \left(\sigma_{1s}e^{-bB(t,\theta)} - \sigma_{2s}\beta_b(B(t,\theta))\right)\zeta''_s + \sigma_{1s}e^{-bB(t,\theta)}\zeta'''_s\right]\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta +$$

$$+ aA(t,\tau)\Big\}\psi\Big(\big(\sigma_1' e^{-bB(t,\tau)} - \sigma_2'\beta_b(B(t,\tau)) +$$

$$+ \sigma_3\gamma_b(B(t,\tau)), \sigma_1'' e^{-bB(t,\tau)} - \sigma_2''\beta_b(B(t,\tau)), \sigma_1''' e^{-bB(t,\tau)}\big),$$

$$(\sigma_2' - B(t,\tau)\sigma_3, \sigma_2''), \sigma_3\Big)d\sigma, \qquad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Зробивши заміну змінних інтегрування за формулами

$$\sigma_1' e^{-bB(t,\tau)} - \sigma_2'\beta_b(B(t,\tau)) + \sigma_3\gamma_b(B(t,\tau)) = \eta_1',$$

$$\sigma_1'' e^{-bB(t,\tau)} - \sigma_2''\beta_b(B(t,\tau)) = \eta_1'', \qquad \sigma_1''' e^{-bB(t,\tau)} = \eta_1'''$$

$$\sigma_2' - B(t,\tau)\sigma_3 = \eta_2', \qquad \sigma_2'' = \eta_2'', \qquad \sigma_3 = \eta_3,$$

з якобіаном заміни $I = e^{n_1 bB(t,\tau)}$, змінивши порядок інтегрування і використавши (10), прийдемо до формули (7), в якій функція G має таку саму структуру, як відповідна функція у [14] для рівняння без виродження на початковій гіперплощині. Провівши викладки, аналогічні до виконаних у [14], отримаємо формулу

$$G(t,x;\tau,\xi) = (4\pi)^{-n/2} e^{n_1 bB(t,\tau)} e^{aA(t,\tau)} (\det A_{n_1n_1} \det A_{n_2n_2} \det A_{n_3n_3})^{-1/2} \times$$

$$\times \prod_{\ell=1}^{3} \big(p_\ell(B(t,\tau))\big)^{-n_\ell/2} \exp\Big\{ -\frac{1}{4p_1(B(t,\tau))} \times$$

$$\times \sum_{j,s=1}^{n_1} a_1^{js} (e^{bB(t,\tau)} x_{1j} - \xi_{1j}) \Big(e^{bB(t,\tau)} x_{1s} - \xi_{1s} \Big) -$$

$$- \frac{1}{4p_2(B(t,\tau))} \sum_{j,s=1}^{n_2} a_2^{js} \Big(x_{2j} - \xi_{2j} + f(B(t,\tau))(x_{1j} + \xi_{1j}) \Big) \times$$

$$\times \Big(x_{2s} - \xi_{2s} + f(B(t,\tau))(x_{1s} + \xi_{1s}) \Big) -$$

$$- \frac{1}{4p_3(B(t,\tau))} \sum_{j,s=1}^{n_3} a_3^{js} \Big(x_{3j} - \xi_{3j} + \frac{B(t,\tau)}{2}(x_{2j} + \xi_{2j}) +$$

$$+ g(B(t,\tau))(x_{1j} - \xi_{1j}) \Big) \Big(x_{3s} - \xi_{3s} + \frac{B(t,\tau)}{2}(x_{2s} + \xi_{2s}) +$$

$$+ g(B(t,\tau))(x_{1s} - \xi_{1s}) \Big) \Big\}, \quad 0 < \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

в якій $A_{n_kn_k} := (a_{js})_{j,s=1}^{n_k}$, $A_{n_kn_k}^{-1} := (a_k^{js})_{j,s=1}^{n_k}$ – матриця, обернена до матриці $A_{n_kn_k}$, $k \in \{1,2,3\}$, де a_{js}, $\{j,s\} \subset \{1,\ldots,n_1\}$, – коефіцієнти з рівняння (2),

$$p_1(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{2bt}-1}{2b}, & b \ne 0, \\ t, & b = 0, \end{cases} \qquad p_2(t) := \begin{cases} \dfrac{t}{b^2} - \dfrac{2(e^{bt}-1)}{b^3(e^{bt}+1)}, & b \ne 0, \\ t^3/12, & b = 0, \end{cases}$$

$$p_3(t) := \begin{cases} \dfrac{t}{b^4} + \dfrac{t^3}{12b^2} - \dfrac{t^2(e^{bt}+1)}{2b^3(e^{bt}-1)}, & b \ne 0, \\ t^5/720, & b = 0, \end{cases}$$

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{bt}-1}{b(e^{bt}+1)}, & b \ne 0, \\ t/2, & b = 0, \end{cases} \qquad g(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{b^2}\Big(\dfrac{tb(e^{bt}+1)}{2(e^{bt}-1)} - 1\Big), & b \ne 0, \\ t^2/12, & b = 0, \end{cases} \qquad t > 0.$$

Зауваження 1. Для розв'язку задачі

$$L^* v(\tau, \xi) = 0, \qquad (\tau, \xi) \in \Pi_{(0,t)},$$

$$v(\tau, \xi)\big|_{\tau=t} = \varphi(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

де t – довільно фіксоване число з $(0, T]$, а функція φ така сама, як у задачі (9), цілком аналогічно отримується зображення (8), в якому

$$G^*(\tau, \xi; t, x) = G(t, x; \tau, \xi), \qquad 0 < \tau < t \le T, \quad \{\xi, x\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

3. Наведемо властивості функцій G і G^*, означених формулами (16) і (17). Ці властивості подібні до встановлених у [15] властивостей відповідних функцій для рівнянь, у яких відсутні виродження на початковій гіперплощині, і доводяться аналогічно.

1°. Для будь-яких мультиіндексів $\{k_\ell, m_\ell\} \subset \mathbb{Z}_+^{n_\ell}$, $\ell \in \{1,2,3\}$, справджуються оцінки

$$\left| \partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_2}^{k_2} \partial_{x_3}^{k_3} \partial_{\xi_1}^{m_1} \partial_{\xi_2}^{m_2} \partial_{\xi_3}^{m_3} G(t, x; \tau, \xi) \right| \le$$

$$\le C_{k_1 k_2 k_3 m_1 m_2 m_3} E^{a,b}(t, \tau) \prod_{\ell=1}^{3} \left(p_\ell(B(t, \tau))\right)^{-(n_\ell + |k_\ell| + |m_\ell|)/2} \times$$

$$\times E_c(t, x; \tau, \xi), \qquad 0 < \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

в яких $C_{k_1 k_2 k_3 m_1 m_2 m_3}$ і c – додатні сталі, які залежать лише від коефіцієнтів $a_{j\ell}$, чисел b, n_1, n_2, n_3 і T,

$$E^{a,b}(t, \tau) := E^a(t, \tau) F^b(t, \tau), \qquad E^a(t, \tau) := \exp\{a A(t, \tau)\},$$

$$F^b(t, \tau) := \exp\{n_1 b B(t, \tau)\},$$

$$E_c(t, x; \tau, \xi) := \exp\left\{ -c \left(\frac{\left| e^{bB(t,\tau)} X_1(B(t, \tau)) - \xi_1 \right|^2}{p_1(B(t, \tau))} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{\ell=2}^{3} \frac{\left| X_\ell(B(t, \tau)) - \xi_\ell \right|^2}{p_\ell(B(t, \tau))} \right) \right\},$$

де $X_1(t) := x_1$, $X_2(t) := x_2 + \alpha_b(t) \hat{x}_1$, $X_3(t) := x_3 + t\, x_2' + \dfrac{\alpha_b(t) - t}{b} x_1'$,

$x_1 := (x_1', x_1'', x_1''')$, $\hat{x}_1 := (x_1', x_1'')$, $x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, \ldots, x_{1n_2})$,

$x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, \ldots, x_{1n_1})$, $x_2 := (x_2', x_2'')$, $x_2' := (x_{21}, \ldots, x_{2n_3})$,

$x_2'' := (x_{2(n_3+1)}, \ldots, x_{2n_2})$

2°. Функція $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, як функція від t і x є розв'язком рівняння (2), а як функція від τ і ξ – розв'язком рівняння (3).

3°. Справджуються рівності

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = E^{a,b}(t, \tau), \qquad 0 < \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi)\, dx = E^a(t, \tau), \qquad 0 < \tau < t \le T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{19}$$

4°. Для будь-якої неперервної та обмеженої в $\mathbb{R}^n$ функції φ функція

$$u(t, x; \tau) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad 0 < \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{20}$$

задовольняє умову

$$\lim_{t\to\tau} u(t,x;\tau) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

а функція

$$v(\tau,\xi;t) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(x)\,dx, \quad 0 < \tau < t \le T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{21}$$

задовольняє умову

$$\lim_{\tau\to t} v(\tau,\xi;t) = \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

5°. Правильна формула згортки

$$G(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\beta,y)G(\beta,y;\tau,\xi)\,dy, \ 0 < \tau < \beta < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{22}$$

Зауваження 2. Із властивостей ***2°*** і ***4°*** випливає, що згідно з означенням ФРЗК функції G і G^* справді є ФРЗК для рівнянь (2) і (3) відповідно, причому рівності (17) і (22) означають, що ФРЗК G має властивість нормальності та для нього справджується формула згортки.

Зауваження 3. У випадку слабкого виродження рівняння (2) у формулах (17)–(22) можна брати $\tau = 0$.

4. Наведені властивості ФРЗК дозволяють у випадку слабкого виродження подібно до [11, 15] дослідити коректну розв'язність задачі Коші, інтегральне зображення і граничну поведінку при $t \to 0$ розв'язків, визначених у напіввідкритому шарі $\Pi_{(0,T]}$, а у випадку сильного виродження – коректну розв'язність неоднорідного рівняння з ваговою початковою умовою, якщо виродження не дуже сильне, і без початкової умови – в протилежному випадку.

Наведемо твердження про інтегральні зображення розв'язків неоднорідного рівняння

$$Lu = f \tag{23}$$

(де Lu – вираз із (2)), які як функції від x є обмеженими, а при $t \to 0$ їхня поведінка певним чином залежить від характеру виродження рівняння на початковій гіперплощині.

У наступних теоремах u – неперервний в області $\Pi_{(0,T]}$ розв'язок рівняння (23) з неперервною функцією f, причому u і f задовольняють додаткові умови, вказані у відповідних теоремах залежно від характеру виродження; $\|u(t,\cdot)\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(t,x)|$, $t \in (0,T]$; a і b – сталі з оцінок (18); φ – неперервна і обмежена функція в $\mathbb{R}^n$; G – ФРЗК для рівняння (23).

Теорема 1. *Якщо виконуються умови*:

1_1) $A(T,0) < \infty$,

2_1) $\exists C > 0 \quad \forall t \in (0,T] : \|u(t,\cdot)\| \le C$,

3_1) $\lim_{t\to 0} u(t,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$,

4_1) $\int_0^T \|f(\tau,\cdot)\| \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$,

то правильним є зображення

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{24}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*:

***1*$_2$)** $A(T,0)=\infty, \qquad B(T,0)<\infty$,

***2*$_2$)** $\exists C>0 \qquad \forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\| E^a(T,t)\le C$,

***3*$_2$)** $\lim\limits_{t\to 0}\left(u(t,x)E^a(T,t)\right)=\varphi(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n$,

***4*$_2$)** $\int\limits_0^T \|f(\tau,\cdot)\| E^a(T,\tau)\dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)}<\infty$.

Тоді справджується рівність

$$u(t,x):=\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\xi)\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{25}$$

де

$$G_0(t,x;\xi):=\lim_{\tau\to 0}\left(G(t,x;\tau,\xi)\,E^{-a}(T,\tau)\right). \tag{26}$$

Теорема 3. *За умов*:

***1*$_3$)** $A(T,0)=\infty, \quad B(T,0)=\infty$,

***2*$_3$)** $\exists C>0 \quad \forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\| E^{a,b}(T,t)\le C$,

***3*$_3$)** $\lim\limits_{t\to 0}\left(u(t,\cdot)\,E^{a,b}(T,t)\right)=0$,

***4*$_3$)** $\int\limits_0^T \|f(\tau,\cdot)\| E^{a,b}(T,\tau)\dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)}<\infty$

є правильною формула

$$u(t,x):=\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{27}$$

Д о в е д е н н я **теорем 1–3.** Нехай u – розв'язок рівняння (23), який задовольняє умови теорем 1, 2 або 3; $V_R:=(0,T]\times B_R$, де B_R – куля в просторі $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у початку координат; ζ – нескінченно диференційовна на $[0,\infty)$ функція така, що $\zeta=1$ на $[0,1/2]$, $\zeta=0$ на $[3/4,\infty]$ і $\zeta'\le 0$; $\zeta_R(\xi):=\zeta(|\xi|/R)$; (t,x) – фіксована точка з $V_{R_0/4}$, де R_0 – задане додатне число.

Скористаємось формулою (5). Покладемо в ній замість t_1, t_2, $u(\tau,\xi)$ і $v(\tau,\xi)$ відповідно h, $t-\varepsilon$, $u(\tau,\xi)$ і $G(t,x;\tau,\xi)\zeta_R(\xi)$, де $R\ge R_0$, $0<h<t/2$, $0<\varepsilon<t/2$, а u – вибраний розв'язок рівняння (23). Використовуючи властивості функції ζ_R і співвідношення (20), отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-\varepsilon,\xi)\zeta_R(\xi)u(t-\varepsilon,\xi)\,d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)\zeta_R(\xi)u(h,\xi)\,d\xi-$$
$$-\int\limits_h^{t-\varepsilon}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{B_R} u(\tau,\xi)L^*\left(G(t,x;\tau,\xi)\zeta_R(\xi)\right)d\xi+$$
$$+\int\limits_h^{t-\varepsilon}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\zeta_R(\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi,$$

а після переходу до границі при $\varepsilon\to 0$ прийдемо до рівності

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)\zeta_R(\xi)u(h,\xi)\,d\xi -$$

$$-\int_h^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{B_R} u(\tau,\xi)L^*\big(G(t,x;\tau,\xi)\zeta_R(\xi)\big)\,d\xi +$$

$$+\int_h^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\zeta_R(\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi =$$

$$=: I_1^{(R)} + I_2^{(R)} + I_3^{(R)}. \tag{28}$$

Перейдемо в (28) до границі при $R \to \infty$. Користуватимемося тим, що функція G додатна і що згідно з властивістю ***3°*** інтеграл $\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\,d\xi$ збігається при $\tau \ge h$.

Маємо

$$\lim_{R\to\infty} I_1^{(R)} = I_1 := \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)u(h,\xi)\,d\xi\,,$$

оскільки

$$\left|I_1 - I_1^{(R)}\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R/2}} G(t,x;h,\xi)\big(1-\zeta_R(\xi)\big)u(h,\xi)\,d\xi\right| \le$$

$$\le \|u(h,\cdot)\| \left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R/2}} G(t,x;h,\xi)\,d\xi\right| \underset{R\to\infty}{\to} 0\,.$$

Аналогічно отримуємо

$$\lim_{R\to\infty} I_3^{(R)} = I_3 := \int_h^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)t(\tau,\xi)\,d\xi\,,$$

оскільки

$$\left|\, I_3 - I_3^{(R)}\,\right| = \left|\int_h^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\big(1-\zeta_R(\xi)\big)f(\tau,\xi)\,d\xi\right| \le$$

$$\le \int_h^t \|u(\tau,\cdot)\| \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R/2}} G(t,x;\tau,\xi)\,d\xi \underset{R\to\infty}{\to} 0\,.$$

Тепер доведемо, що $I_2^{(R)} \underset{R\to\infty}{\to} 0$. Для цього зазначимо, що

$$L^*\big(G(t,x;\tau,\xi)\zeta_R(\xi)\big) = \big(L^*G(t,x;\tau,\xi)\big)\zeta_R(\xi) +$$

$$+\beta(\tau)\Big[G(t,x;\tau,\xi)\Big(\sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}}\zeta_R(\xi) + \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}}\zeta_R(\xi)\Big) -$$

$$-\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\Big(\partial_{\xi_{1j}} G(t,x;\tau,\xi)\,\partial_{\xi_{1s}}\zeta_R(\xi) +$$

$$+\partial_{\xi_{1j}}\zeta_R(\xi)\,\partial_{\xi_{1s}} G(t,x;\tau,\xi) + G(t,x;\tau,\xi)\,\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}}\zeta_R(\xi)\Big) +$$

$$+b\sum_{j=1}^{n_1} \xi_{1j} G(t,x;\tau,\xi)\,\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}}\zeta_R(\xi)\Big]. \tag{29}$$

Оскільки згідно з властивістю ***2°*** $L^*G(t,x;\tau,\xi) = 0$ при $0 < \tau < t \le T$, то перший доданок з (29) рівний нулеві, а на підставі властивостей функції ζ_R усі вирази з (29) в $\mathbb{R}^n \setminus (B_{3R/4} \setminus B_{R/2})$ дорівнюють нулеві. Використовуючи оцінки (18) і те, що для $\xi \in B_{3R/4} \setminus B_{R/2}$

$$\left| \xi_{1j} \partial_{\xi_{2j}} \zeta_R(\xi) \right| \le C, \qquad \left| \xi_{2j} \partial_{\xi_{3j}} \zeta_R(\xi) \right| \le C,$$

$$\left| \partial_{\xi_{1j}} \zeta_R(\xi) \right| \le C/R, \qquad \left| \partial_{\xi_{1j}\xi_{1s}} \zeta_R(\xi) \right| \le C/R^2,$$

тоді при $R \ge 1$ маємо

$$\left| L^*(G(t,x;\tau,\xi)\,\zeta_R(\xi)) \right| \le C\, E^{a,b}(t,\tau)\,\beta(\tau)\,(p_1(B(t,\tau)))^{-(n_1+1)/2} \times$$

$$\times \prod_{\ell=2}^{3} (p_\ell(B(t,\tau)))^{-n_\ell/2} E_c(t,x;\tau,\xi). \tag{30}$$

Далі використовуватимемо такі нерівності для оцінюючої функції E_{c_0}, $c_0 > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{\ell=1}^{3} p_\ell(B(t,\tau))^{-n_\ell/2} E_{c_0}(t,x;\tau,\xi)\, d\xi \le C_0, \ \ 0 < \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{31}$$

$$E_{c_0}(t,x;\tau,\xi) \le \exp\left\{ -c_0 \frac{(R/4)^2}{q(B(t,h))} \right\}, \ \ h \le \tau < t \le T, \ \ x \in B_{R_0/4}, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus B_{R/2}, \tag{32}$$

де R − досить велике число, R_0 − фіксоване число, причому $0 < R_0 < R$, $q(t) := \max\limits_{\ell \in \{1,2,3\}} p_\ell(t)$.

Інтеграл із (31) не залежить від τ, t і x, він обчислюється за допомогою заміни $\xi_1 = e^{bB(t,\tau)} x_1 + (p_1(B(t,\tau)))^{1/2} \eta_1$, $\xi_\ell = X_\ell(B(t,\tau)) + (p_\ell(B(t,\tau)))^{1/2} \eta_\ell$, $\ell \in \{2,3\}$.

Для доведення нерівності (32), запроваджуючи позначення

$$\tilde{X}(t,\tau) := \left(e^{bB(t,\tau)} x_1, X_2(B(t,\tau)), X_3(B(t,\tau)) \right),$$

$$Y(t,\tau) := \Big((1 - e^{bB(t,\tau)}) x_1, -\alpha_b(B(t,\tau)) \hat{x}_1,$$

$$- B(t,\tau) x_2' - ((\alpha_b(B(t,\tau)) - B(t,\tau))/b) x_1' \Big),$$

отримуємо

$$P := \frac{\left| e^{bB(t,\tau)} x_1 - \xi_1 \right|^2}{p_1(B(t,\tau))} + \sum_{\ell=2}^{3} \frac{\left| X_\ell(B(t,\tau)) - \xi_\ell \right|^2}{p_\ell(B(t,\tau))} \ge$$

$$\ge \frac{1}{q(B(t,h))} \left| \tilde{X}(t,\tau) - \xi \right|^2 \ge \frac{1}{q(B(t,h))} \left(|\xi| - \left| \tilde{X}(t,\tau) \right|^2 \right),$$

$$\left| \tilde{X}(t,\tau) \right| = |x - Y(t,\tau)| \le |x| + |Y(t,\tau)| \le$$

$$\le |x| + \Big((1 - e^{bB(t,\tau)})^2 |x_1|^2 + (\alpha_b(B(t,\tau)))^2 |\hat{x}_1|^2 +$$

$$+ (B(t,\tau))^2 |x_2'|^2 + \frac{(\alpha_b(B(t,\tau)) - B(t,\tau))^2}{b^2} |x_1'|^2 \Big)^{1/2} \le$$

$$\le |x| + \Big((b\,\alpha_b(B(T,h)))^2 |x_1|^2 + (\alpha_b(B(T,h)))^2 |\hat{x}_1|^2 +$$

$$+\left(B(T,h)\right)^2\left|x_2'\right|^2+\frac{\left(\alpha_b(B(T,h))+B(T,h)\right)^2}{b^2}\left|x_1'\right|^2\Bigg)^{1/2}\le$$

$$\le c(h)|x|\le c(h)\frac{R_0}{4}$$

і, отже,

$$P\ge\frac{1}{q(B(t,h))}\left(\frac{R}{2}-c(h)\frac{R_0}{4}\right)^2\ge\frac{1}{q(B(t,h))}\left(\frac{R}{4}\right)^2$$

для всіх $R>c(h)R_0$. Звідси випливає нерівність (32).

За допомогою нерівностей (30)–(32) з $c_0=c/2$ маємо

$$\left|I_2^{(R)}\right|\le C\int_h^t E^{a,b}(t,\tau)\|u(\tau,\cdot)\|\left(p_1(B(t,\tau))\right)^{-1/2}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\times$$

$$\times\exp\left\{-c_0\frac{(R/4)^2}{q(B(t,h))}\right\}\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{\ell=2}^{3}\left(p_\ell(B(t,\tau))\right)^{-n_\ell/2}E_{c_0}(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\le$$

$$\times CC_0\exp\left\{-c_0\frac{(R/4)^2}{q(B(t,h))}\right\}\sup_{\tau\in[h,t]}\left(E^{a,b}(t,\tau)\|u(\tau,\cdot)\|\right)\times$$

$$\times\int_h^t\left(p_1(B(t,\tau))\right)^{-1/2}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\underset{R\to\infty}{\to}0,$$

оскільки

$$\int_h^t\left(p_1(B(t,\tau))\right)^{-1/2}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau\le 2\left(p_1(B(t,h))\right)^{1/2}.$$

Отже, після переходу в (28) до границі при $R\to\infty$ отримуємо

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n}G(t,x;h,\xi)u(h,\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_h^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi=:J_1^{(h)}+J_2^{(h)}.\tag{33}$$

У рівності (33) перейдемо до границі при $h\to 0$. Результат такого переходу залежить від типу виродження рівняння на початковій гіперплощині, тобто від того, яка з умов ***1$_j$***), $j\in\{1,2,3\}$, виконується. Будемо використовувати таке *твердження*: для довільно фіксованих $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$ існують такі сталі $C_0>0$, $c_0\in(0,c)$ (c – стала з оцінок (18)) і $h_0\in(0,t/2)$, що для довільних $h\in(0,h_0)$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$ у випадку виконання умови ***1$_1$***) справджується нерівність

$$|G(t,x;h,\xi)|\le C_0\sup_{h\in(0,t/2]}E^{a,b}(t,h)\prod_{\ell=1}^{3}\left(p_\ell(B(t,t/2))\right)^{-n_\ell/2}E_{c_0}(t,x;0,\xi),\tag{34}$$

а якщо виконується умова ***1$_2$***), то справджується нерівність

$$\left|G(t,x;h,\xi)E^{-a}(T,h)\right|\le$$

$$\le C_0\sup_{h\in(0,t/2]}F^b(t,h)\prod_{\ell=1}^{3}\left(p_\ell(B(t,t/2))\right)^{-n_\ell/2}E_{c_0}(t,x;0,\xi),\tag{35}$$

Доведемо це твердження. На підставі оцінки (18) для G і монотонного зростання функцій p_ℓ маємо у випадку умови ***1$_1$***)

$$|G(t,x;h,\xi)|\le C_0\sup_{h\in(0,t/2]}E^{a,b}(t,h)Z(t,x;h,\xi)$$

і у випадку умови $\boldsymbol{1_2}$)

$$\left|G(t,x;h,\xi)E^{-a}(T,h)\right| \le C \sup_{h\in(0,t/2]} F^b(t,h)Z(t,x;h,\xi),$$

де

$$Z(t,x;h,\xi) := \prod_{\ell=1}^{3}\left(p_\ell\left(B(t,t/2)\right)\right)^{-n_\ell/2} \times$$

$$\times \exp\left\{-c\left(\frac{\left|e^{bB(t,h)}x_1-\xi_1\right|^2}{p_1\left(B(t,0)\right)} + \sum_{\ell=2}^{3}\frac{\left|X_\ell\left(B(t,h)\right)-\xi_\ell\right|^2}{p_\ell\left(B(t,0)\right)}\right)\right\}.$$

Оскільки для $c>0$ існують сталі $C_1>0$ і $c_0\in(0,c)$ такі, що для довільних $\{u,v\}\subset\mathbb{R}$, $|v|\le 1$, справджується нерівність

$$\exp\{-c|u-v|^2\} \le C_1\exp\{-c_0|u|^2\},$$

то

$$\exp\left\{-c\frac{\left|e^{bB(t,h)}x_1-\xi_1\right|^2}{p_1\left(B(t,0)\right)}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-c\frac{\left|\left(e^{bB(t,0)}x_1-\xi_1\right)-\left(-be^{bB(t,0)}\alpha_{-b}(B(h,0))\right)x_1\right|^2}{p_1\left(B(t,0)\right)}\right\} \le$$

$$\le C_1\exp\left\{-c_0\frac{\left|e^{bB(t,0)}x_1-\xi_1\right|^2}{p_1\left(B(t,0)\right)}\right\}$$

якщо h вибрати таким, щоб $be^{bB(t,0)}\alpha_{-b}\left(B(h,0)\right)|x_1|\left(p_1\left(B(t,0)\right)\right)^{-1/2}\le 1$;

$$\exp\left\{-c\frac{\left|X_2\left(B(t,h)\right)-\xi_2\right|^2}{p_2\left(B(t,0)\right)}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-c\frac{\left|\left(X_2\left(B(t,0)\right)-\xi_2\right)-\left(-e^{bB(t,0)}\alpha_{-b}\left(B(h,0)\right)\right)\hat{x}_1\right|^2}{p_2\left(B(t,0)\right)}\right\} \le$$

$$\le C_1\exp\left\{-c_0\frac{\left|X_2\left(B(t,0)\right)-\xi_2\right|^2}{p_2\left(B(t,0)\right)}\right\},$$

якщо h вибрати таким, щоб $be^{bB(t,0)}\alpha_{-b}\left(B(h,0)\right)|\hat{x}_1|\left(p_2\left(B(t,0)\right)\right)^{-1/2}\le 1$, і

$$\exp\left\{-c\frac{\left|X_3\left(B(t,h)\right)-\xi_3\right|^2}{p_3\left(B(t,0)\right)}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-c\frac{\left|\left(X_3\left(B(t,0)\right)-\xi_3\right)-\left(-\dfrac{e^{bB(t,0)}\alpha_{-b}\left(B(h,0)\right)x_1'}{b}+B(h,0)x_2'\right)\right|^2}{p_3\left(B(t,0)\right)}\right\} \le$$

$$\le C_1\exp\left\{-c_0\frac{\left|X_3\left(B(t,0)\right)-\xi_3\right|^2}{p_3\left(B(t,0)\right)}\right\},$$

якщо h вибрати таким, щоб

$$\left(\frac{e^{bB(t,0)}\alpha_{-b}\left(B(h,0)\right)|x_1'|}{b}+B(h,0)|x_2'|\right)\left(p_3\left(B(t,0)\right)\right)^{-1/2}\le 1.$$

Отже, нерівність (34) встановлено. Нерівність (35) доводиться аналогічно з урахуванням очевидних змін.

Для доведення того, що границі при $h\to 0$ інтегралів $J_1^{(h)}$ і $J_2^{(h)}$ з (33) дорівнюють відповідним доданкам із формул (24), (25) і (27), попередньо запишемо ці інтеграли

– у випадку виконання умови ***1₂***) у вигляді

$$J_1^{(h)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(G(t,x;h,\xi)E^{-a}(T,h)\right)\left(u(h,\xi)E^{a}(T,h)\right)d\xi\,,$$

$$J_2^{(h)} = \int_h^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(G(t,x;\tau,\xi)E^{-a}(T,\tau)\right)\left(f(\tau,\xi)E^{a}(T,\tau)\right)d\xi\,,$$

– у випадку виконання умови ***1₃***) у вигляді

$$J_1^{(h)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(G(t,x;h,\xi)E^{-a,-b}(T,h)\right)\left(u(h,\xi)E^{a,b}(T,h)\right)d\xi\,, \tag{36}$$

$$J_2^{(h)} = \int_h^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(G(t,x;\tau,\xi)E^{-a,-b}(T,\tau)\right)\left(f(\tau,\xi)E^{a,b}(T,\tau)\right)d\xi\,. \tag{37}$$

Використавши умови $\boldsymbol{2_j}$), $\boldsymbol{3_j}$), $j \in \{1,2\}$, і те, що праві частини нерівностей (34) і (35) є інтегровними мажорантами відповідних ядер інтегралів $J_1^{(h)}$, за допомогою теореми Лебеґа про мажорантну збіжність після переходу до границі при $h \to 0$ під знаком інтеграла у виразах для $J_1^{(h)}$ отримаємо перші доданки з формул (24) і (25). Границя при $h \to 0$ інтеграла (36) дорівнює нулеві, оскільки з огляду на умови $\boldsymbol{2_3}$) і $\boldsymbol{3_3}$) та першу з рівностей (19) маємо

$$\left|J_1^{(h)}\right| = \left(\|u(h,\cdot)\|\,E^{a,b}(T,h)\right)\int_{\mathbb{R}^n}(G(t,x;h,\xi)\,d\xi\;E^{-a,-b}(T,h)) =$$

$$= E^{a,b}(T,t)\left(\|u(h,\cdot)\|\,E^{a,b}(T,h)\right) \underset{h\to 0}{\to} 0\,.$$

На підставі умов $\boldsymbol{4_j}$), $j \in \{1,2,3\}$, та першої з рівностей (19) інтеграли $J_2^{(h)}$ при $h \to 0$ прямують до других доданків з формул (24), (25) і (27) відповідно . Наприклад, для інтеграла (37) маємо

$$\left|J_2^{(h)} - \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi\right| =$$

$$= \left|\int_0^h \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(G(t,x;\tau,\xi)E^{-a,-b}(T,\tau)\right)\left(f(\tau,\xi)E^{a,b}(T,\tau)\right)d\xi\right| \le$$

$$\le \int_0^h \|f(\tau,\cdot)\|\,E^{a,b}(T,\tau)\,d\tau\,E^{a,b}(T,h) \underset{h\to 0}{\to} 0\,.$$

Отже, теореми 1 – 3 доведено. ♦

Зауваження 4. Твердження, аналогічні теоремам 1 – 3, правильні також для розв'язків рівняння (23), які експоненціально зростають як функції від x при $x \to \infty$ зі спеціальним типом зростання, залежним від часової змінної t. Для рівняння без вироджень на початковій гіперплощині подібні результати встановлено в [11].

Висновки. У статті знайдено явні вирази для ФРЗК G для ультрапараболічного рівняння вигляду (2), отримано точні оцінки функції G та її похідних, установлено деякі інші властивості ФРЗК. За допомогою функції G доведено теореми про інтегральне зображення розв'язків неоднорідного рівняння (23), які, як функції від x, є обмеженими, а при $t \to 0$ поводяться певним чином залежно від типу виродження рівняння на початковій гіперплощині. Ці результати можуть використовуватися для встановлення коректної розв'язності рівняння (23) з класичною початковою умовою у випадку слабкого виродження рівняння при $t = 0$, ваговою початковою умовою або без початкової умови, якщо виродження сильне.

1. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\vec{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2000. – Вип. 76. – С. 5–10.
2. *Березан Л. П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\vec{2b}$-параболічної системи // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 1999. – Вип. 46. – С. 13–18.
3. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\vec{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1998.– № 12. – С. 7–12.
4. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України. – 1994. – № 6. – С. 7–11.
5. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Однозначна розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь з узагальненими початковими даними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44,** № 4. – С. 27–39.
6. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. НАН України. – 1996. – № 10.– С. 11–16.
7. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині // Буков. мат. журн. – 2015. – **3**, № 3-4. – С. 41–51.
8. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з двома групами просторових змінних та виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. Нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – № 871. – С. 46–64.
9. *Івасишен С. Д., Возняк О. Г.* Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 2. – С. 13–19.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Voznyak O. G.* On fundamehtal solutions of the Cauchy problem for a class of degenerate parabolic equations // J. Math. Sci. – 2000. – **99**, No. 5. – P. 1533–1540. – https://doi.org/10.1007/BF02674176.
10. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Задача Коші для $\vec{2b}$-параболічних систем із виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 3. – С. 15–24.
11. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту марематики НАН України / Відп. ред. В. А. Михайлець. – 2015. – **12**, № 2. – С. 205–229.
   http://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/issue/archive.
12. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про задачу Коші для $\vec{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1484–1496.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S.* On the Cauchy problem for $\vec{2b}$-parabolic systems with growing coefficients // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, No. 11. – P. 1691–1705. – https://doi.org/10.1023/A:1010427120130.
13. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\vec{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 18–22.
14. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В. А. Михайлець. – 2014. – **11**, № 2. – С. 126–153.
15. *Івасишен С., Пасічник Г.* Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів // Мат. вісн. НТШ. – 2014. – **11**. – С. 73–87.
16. *Мединський І. П.* Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. –1998. – № 337. – С. 133–136.

17. *Мединський І. П.* Про апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. Нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. − 2000. − № 407. − С. 185−194.
18. *Мединський І. П.* Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. − 1999. − № 364. − С. 298−307.
19. *Пасічник Г. С., Івасишен С. Д.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. − 2000. − Вип. 76. − С. 82−91.
20. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. − Basel: Birkhäuser, 2004. − 390 p. − (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. − Vol. 152.) https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.
21. *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane // Мат. студії. − 2000. − **13**, № 1. − С. 33−46.

УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННО РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ГРУППЕ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ И ВЫРОЖДЕНИЯМИ НА НАЧАЛЬНОЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Рассмотрено ультрапараболическое уравнение с неограниченно растущими при $|x| \to \infty$ *младшими коэффициентами и вырождением при* $t = 0$. *Для такого уравнения найдено явное выражение для фундаментального решения* G *и установлены свойства функции* G, *в частности, получены точные оценки* G *и её производных. С помощью этих свойств доказаны теоремы об интегральном представлении решений неоднородного уравнения, которые являются ограниченными функциями от* x, *а при* $t \to 0$ *ведут себя соответствующим образом в зависимости от типа вырождения уравнения при* $t = 0$.

Ключевые слова: *ультрапараболическое уравнение, задача Коши, фундаментальное решение, вырождение, интегральное представление решения.*

ULTRAPARABOLIC EQUATIONS WITH INFINITELY GROWING COEFFICIENTS IN A GROUP OF MINOR TERMS AND WITH DEGENERATIONS ON THE INITIAL HYPERPLANE

An ultraparabolic equation with infinitely growing as $|x| \to \infty$ *minor coefficients and with degeneration at* $t = 0$ *is considered. The explicit expression of the fundamental solution* G *of this equation is found, and the properties of the function* G *are established, in particular exact estimates are obtained for* G *and its derivatives. Using these properties, the theorems on the integral representation of solutions to the nonhomogeneous equation are proved. These solutions are bounded as functions on* x. *and as* $t \to 0$, *their behavior depends on the type of degeneration of the equation at* $t = 0$.

Key words: *ultraparabolic equation, Cauchy problem, fundamental solution, degeneration, integral representation of solution.*

[1] Нац. техн. ун-т України
«Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського», Київ,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[3] Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
31.01.18