УДК 517.956

Я. О. Баранецький[1✉], П. І. Каленюк[1], М. І. Копач[2]

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння парного порядку з частинними похідними із постійними коефіцієнтами методом Фур'є в обмеженій області G вивчається задача з крайовими умовами, які є багатоточковими збуреннями умов Неймана. Визначено власні значення і власні функції оператора L багатоточкової задачі. Встановлено умови повноти системи власних функцій $V(L)$ оператора L у просторі $L_2(G)$. Для випадку еліптичного рівняння встановлено умови, при виконанні яких система $V(L)$ є базисом Рісса простору $L_2(G)$. Розв'язок неоднорідної задачі з однорідними багатоточковими умовами побудовано у вигляді ряду Фур'є за системою власних функцій і встановлено умови його існування та єдиності.

Ключові слова: *метод Фур'є, кореневі функції, базис Рісса, багатоточкові умови, оператор перетворення.*

Вступ. Рівняння із частинними похідними з постійними коефіцієнтами використовуються в математичній фізиці для опису різних явищ в теорії пружності, акустиці, електродинаміці, квантовій механіці. Дослідженням властивостей розв'язків цих рівнянь і знаходженням їх розв'язків займалися ще в XVIII-XIX ст. Ф. В. Бессель, Дж. Грін, Ж. Л. Даламбер, Л. Ейлер, Г. Р. Кірхгоф, П. С. Лаплас, Ж. Фур'є, С. Д. Пуассон, О. Гевісайд.

У першій половині 20 століття суттєві результати в цій області були отримані у працях Ж. Адамара, Г. Герглотца, Л. Гордінга, І. Лере, І. Г. Петровського, М. Рісса. У наступні десятиліття в роботах М. С. Аграновича, В. М. Борок, М. І. Вишика, І. М. Гельфанда, Л. Еренпрайса, Б. Мальгранжа, В. П. Паламодова, Л. Хермандера, Л. Шварца, Г. Е. Шилова була створена загальна теорія таких рівнянь. Це виявилося можливим на основі теорії узагальнених функцій, виникнення і розвиток якої було тісно пов'язане з вивченням рівнянь математичної фізики.

Класи єдиності та існування розв'язку крайових задач в необмежених областях (простір, півпростір, необмежена смуга) для рівнянь з постійними коефіцієнтами розглядались в працях [6, 7, 10, 23–26].

Крайові задачі в обмежених областях для окремих класів диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами досліджено в працях [1, 3, 4, 8, 11–14, 16, 22, 27, 28].

Крайові задачі для полігармонічних рівнянь вивчались в роботах [17–19, 20, 31].

Фундаментальні результати, які стосуються властивостей базисів Рісса, отримано в роботі Н. К. Барі [5].

Ця робота є продовженням вивчення властивостей багатоточкової задачі, розпочатого у працях [2, 29, 30] для диференціально-операторних рівнянь.

1. Основні позначення. Нехай

$$G \equiv \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : 0 < x_j < X_j < \infty,\ j = 1, \ldots, m\},$$

$$\mathbb{Z}_0 \equiv \{k : k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_0^m,\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m,$$

D_j – оператор диференціювання за змінною x_j, $j = 1, \ldots, m$,

$$D^{2\alpha} := D_1^{2\alpha_1} \ldots D_m^{2\alpha_m}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_0^m,$$

✉ baryarom@ukr.net

$$W = \{y \in L_2(G) : D^\alpha y \in L_2(G), |\alpha| \le 2n\},$$

$$(y,z;W) := (y,z;L_2(G)) + \sum_{j=1}^{m}(D_j^{2n}y, D_j^{2n}z; L_2(G)),$$

$$\|y;W\|^2 := \|y;L_2(G)\|^2 + \sum_{j=1}^{m}\left\|D_j^{2n}y; L_2(G)\right\|^2,$$

I_j – інволюція в $L_2(0,X_j)$, $I_j z(x) := z(X_j - x)$, $z(x) \in L_2(0,X_j)$,

$[L_2(0,X_j)]$ – множина лінійних неперервних операторів, заданих в $L_2(0,X_j)$,

E_j – тотожне перетворення в $L_2(0,X_j)$,

p_j – ортопроектори в просторі $L_2(0,X_j)$:

$$L_{2,r}(0,X_j) := \{z(x) \in L_2(0,X_j) : z(x) \equiv p_r z(x),\ r = 0,1\},$$

$$p_{r,j}z(x) := \frac{1}{2}(z(x) + (-1)^r z(X_j - x)), \quad z(x) \in L_2(0,X_j),$$

$W_{2n}^*(0,X_j)$ – простір лінійних неперервних функціоналів над $W_2^{2n}(0,X_j)$, $j = 1,\ldots,m$:

$$W_{2n,s}^*(0,X_j) := \{\ell \in W_{2n}^*(0,X_j) : \ell\big(e^{iht} - (-1)^s e^{ih(X_j - t)}\big) = 0,\ h \in \mathbb{R},\ s = 0,1\},$$

$p_J := p_{j_1} \otimes \ldots \otimes p_{j_m}$ – ортопроектор у просторі $L_2(G)$, $J \in J_m$:

$$L_{2,J}(G) := \{y \in L_2(G) : p_J y \equiv y,\ J \in J_m\},$$

$$J_m := \{J \in \mathbb{Z}_0^m : J := (j_1,\ldots,j_m),\ j_s \in \{0,1\},\ s = 1,\ldots,m\}.$$

Систему елементів $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ називають замкнутою (повною) в сепарабельному гільбертовому просторі H, якщо лінійна оболонка цієї системи всюди щільна в H, тобто будь який елемент простору H можна наблизити лінійною комбінацією елементів цієї системи з будь-якою точністю за нормою простору H.

Систему елементів $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ називають тотальною в H, якщо лише нульовий елемент простору H є ортогональним до всіх елементів цієї системи.

Систему елементів $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ називають біортогональною в H до системи елементів $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset H$, якщо $(g_m, e_k; H) = \delta_{k,m}$, $k, m \in \mathbb{N}$.

Систему елементів $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ називають базисом Рісса простору H, якщо, разом з оберненим, існує обмежений оператор $A : H \to H$ такий, що система $\{Ae_k\}_{k=1}^\infty$ є ортонормованим базисом.

2. Формулювання задачі та основні результати. Розглянемо багатоточкову задачу

$$L(-D^2)y := \sum_{|\alpha| \le n}(-1)^{|\alpha|}b_\alpha D^{2\alpha}y = f, \qquad x \in G, \tag{1}$$

$$\ell_{s,j}y := D_j^{2s-1}y\Big|_{x_j=0} - D_j^{2s-1}y\Big|_{x_j=X_j} = 0, \tag{2}$$

$$\ell_{n+s,j}y := D_j^{2s-1}y\Big|_{x_j=0} + D_j^{2s-1}y\Big|_{x_j=X_j} + \sum_{r=0}^{r_j}\sum_{q=0}^{m_{s,j}} b_{q,r,s,j}\, D_j^q y\Big|_{x_j=x_{r,j}} = 0, \tag{3}$$

де $0 \le x_{0,j} < x_{1,j} < \ldots < x_{r_j,j} < X_j$, $b_{q,r,s,j} \in \mathbb{R}$, $q = 0,1,\ldots,m_{s,j}$, $r = 0,1,\ldots,r_j$, $m_{s,j} < 2n$, $s = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$.

Нехай $L : W_2^{2n}(G) \to W_2^{2n}(G)$ − оператор задачі (1)−(3):

$$Ly := L(-D^2)y, \quad y \in D(L), \quad D(L) := \{y \in W : \ell_{s,j}y = 0,\, s = 1,\ldots,2n,\; j = 1,\ldots,m\},$$

і через $V(L)$ позначимо систему власних функцій оператора L.

Розв'язком задачі (1)−(3) будемо називати функцію $y \in D(L)$, що задовольняє співвідношення $\left\|L(-D^2)y - f; L_2(G)\right\| = 0$.

Вважаємо, що виконуються такі припущення.

Припущення P_1**:** $\quad x_{r,j} = X_j - x_{r_j - r,j}$, $\quad b_{q,r,s,j} = (-1)^q b_{q,r_j-r,s,j}$,

$$q = 0,1,\ldots,m_{s,j},\ r = 0,1,\ldots,r_j,\ m_{s,j} < 2n,\ s = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m.$$

Припущення P_2**:** $\quad m_{s,j} \le 2s - 1, \quad s = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m$.

Припущення P_3**:** $\quad |\lambda_k| \ge C_1 |k|^{2n}, \quad k \in \mathbb{Z}_0^m, \quad 0 < C_1 < \infty$.

Припущення P_4**:** $\quad k_1X_1 + \ldots + k_mX_m \ne 0, \quad k_j \in \mathbb{Z}_0, \quad j = 1,\ldots,m$.

Теорема 1. *Нехай справджується припущення* P_1. *Тоді для будь-яких* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $b_{q,r,s,j} \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $q = 0,1,\ldots,m_{s,j}$, $r = 0,1,\ldots,r_j$, $j = 1,\ldots,m$, $s = 1,\ldots,n$, *оператор* L *має власні значення*

$$\lambda_k \equiv \sum_{|\alpha| \le n} b_\alpha (k_1 \pi X_1^{-1})^{2\alpha_1} \ldots (k_m \pi X_m^{-1})^{2\alpha_m}, \quad k \in \mathbb{Z}_0^m,$$

та повну і мінімальну в просторі $L_2(G)$ *систему* $V(L)$ *власних функцій.*

Теорема 2. *Нехай справджуються припущення* $P_1 - P_3$. *Тоді система* $V(L)$ *є базисом Рісса простору* $L_2(G)$.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення* $P_1 - P_4$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in L_2(G)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1)−(3).

3. Спектральні крайові задачі.

3.1. Самоспряжена задача для звичайного диференціального рівняння другого порядку. Нехай $A_{0,j}$ − оператор, породжений в просторі $L_2(0, X_j)$ крайовою задачею

$$-z^{(2)}(t) = g(t), \quad t \in (0, X_j), \quad z^{(1)}(0) = z^{(1)}(X_j) = 0,$$

$$A_{0,j}y(t) := -y^{(2)}(t), \quad y \in D(A_{0,j}),$$

$$D(A_{0,j}) := \{y \in W_2^2(0, X_j) : y^{(1)}(0) = y^{(1)}(X_j) = 0\}.$$

Лема 1. *Оператор* $A_{0,j}$ *має точковий спектр*

$$\sigma(A_{0,j}) := \{\mu_{k,j} \in \mathbb{R} : \mu_{k,j} = (k\pi X_j^{-1})^2,\ k = 0,1,\ldots\}$$

і систему власних функцій

$$T_j := \left\{\tau_{k,j}(x_j) \in L_2(0, X_j) : \tau_{0,j}(x_j) := \frac{1}{\sqrt{X_j}},\ \tau_{k,j}(x_j) := \right.$$

$$\left. := \frac{2}{\sqrt{2X_j}} \cos(\pi k_j X_j^{-1} x_j),\ k_j = 1,2,\ldots, \quad j = 1,\ldots,m\right\}.$$

Д о в е д е н н я. Безпосередньою підстановкою можна переконатися, що $\tau_{k,j}(x_j) \in D(A_j)$, $A_{0,j}\tau_{k,j}(x_j) = \mu_{k,j}\tau_{k,j}(x_j)$, $k = 0,1,\ldots$. Враховуючи, що підсистема $T_{j,s} = \{\tau_{2q+s,j}(x_j) \in L_2(0,X_j),\, q = 0,1,\ldots,\, s = 0,1\}$ власних функцій оператора $A_{0,j}$ є ортонормованим базисом простору $L_{2,s}(0,X_j)$, отримуємо твердження леми. ♦

Розглянемо задачу для рівняння (1) з крайовими умовами

$$\ell_{0,s,j}y := D_j^{2s-1}y\Big|_{x_j=0} - D_j^{2s-1}y\Big|_{x_j=X_j} = 0\,, \tag{4}$$

$$\ell_{0,s+n,j}y := D_j^{2s-1}y\Big|_{x_j=0} + D_j^{2s-1}y\Big|_{x_j=X_j} = 0\,, s = 1,\ldots,n,\quad j = 1,\ldots,m\,. \tag{5}$$

Нехай $L_0 : W \to W$ – оператор задачі (1), (4), (5),

$$y \in D(L_0),\quad D(L_0) := \{y \in W : \ell_{0,s,j}y = 0,\ s = 1,\ldots,2n,\ j = 1,\ldots,m\}\,,$$

і

$$V(L_0) := \left\{v_{0,k}(x) \in L_2(G) : v_{0,k}(x) := \prod_{j=1}^{m}\tau_{k_j,j}(x_j),\ k \in \mathbb{Z}_0^m\right\}$$

– ортонормований базис простору $L_2(G)$,

$$V_J := \left\{v_{0,k}(x) \in L_2(G) : v_{0,k}(x) := \prod_{j=1}^{m}\tau_{k_j,j}(x_j),\ k_j = 1,2,\ldots\right\},$$

$L_{2,J}(G)$ – замикання лінійної оболонки системи функцій V_J, $J \in J_m$, за нормою простору $L_2(G)$; $L_{0,J}$ – звуження оператора L_0 на підпростір $L_{2,J}(G)$, $J \in J_m$.

Простір $L_2(G)$ є ізоморфним гільбертовому тензорному добутку просторів $L_2(0,X_j)$, $j = 1,\ldots,m$. Тому оператор L_0 можна подати у вигляді

$$L_0 = \sum_{|\alpha|\le n} b_\alpha (A_{0,1}^{+})^{\alpha_1}\ldots(A_{0,m}^{+})^{\alpha_m}\,,\qquad A_{0,j}^{+} : L_2(G) \to L_2(G)\,,$$

$$A_{0,1}^{+} = A_{0,1} \otimes E_2 \otimes \ldots \otimes E_m \ldots,\qquad A_{0,m}^{+} = E_1 \otimes E_2 \otimes \ldots \otimes A_{0,m}\,.$$

Безпосередньою підстановкою встановлюємо, що елементи системи V_J, $J \in J_m$, є власними функціями оператора L_0. Тому справджується

Зауваження 1. Оператор L_0 має власні значення $\lambda_k := \sum_{|\alpha|\le n} b_\alpha \prod_{j=1}^{m}\mu_{k,j}^{\alpha_j}$, $k \in \mathbb{Z}_0^m$, і систему власних функцій $V(L_0)$, яка є ортонормованим базисом $L_2(G)$.

3.2. Несамоспряжена задача для звичайного диференціального рівняння другого порядку. Розглянемо спектральну крайову задачу

$$-z^{(2)}(t) = \lambda z(t),\qquad t \in \{0,X_j\},\qquad \lambda \in \mathbb{C}\,, \tag{6}$$

$$\ell_1 z := z^{(1)}(0) - z^{(1)}(X_j) = 0\,,$$

$$\ell_2 z : z^{(1)}(0) + z^{(1)}(X_j) + b_j(z(0) + z(X_j)) = 0,\qquad b_j \in \mathbb{R}\,. \tag{7}$$

Нехай $A_j : L_2(0,X_j) \to L_2(0,X_j)$ – оператор задачі (6), (7):

$$Az(t) := -z^{(2)}(t), \qquad z(t) \in D(A_j),$$

$$D(A_j) := \{z \in W_2^2(0, X_j) : \ell_r z = 0,\ r = 1,2\}.$$

Корені характеристичного рівняння $-\rho^2 = \lambda$ виберемо так, що $\operatorname{Re}\rho \le 0$. Фундаментальну систему розв'язків рівняння (6) означимо співвідношеннями

$$z_{q,j}(t,\rho) := e^{i\rho t} + (-1)^q e^{i\rho(X_j - t)} \in L_{2,q}(0, X_j), \qquad q = 0,1.$$

Загальний розв'язок рівняння (6) означимо виразом

$$z_j(t,\rho) := c_0 z_{0,j}(t,\rho) + c_1 z_{1,j}(t,\rho), \qquad c_0, c_1 \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Підставляючи розв'язок (8) у крайові умови (7), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно c_0, c_1, визначник якої породжує рівняння для визначення власних значень:

$$\Delta_j(\rho) := \Delta_{0,j}(\rho)\Delta_{1,j}(\rho) = 0, \tag{9}$$

де

$$\Delta_{0,j}(\rho) = \rho(1 - e^{i\rho X_j}), \qquad \Delta_{1,j}(\rho) = \rho(1 + e^{i\rho X_j}).$$

Рівняння (9) має корені $\rho_{k,j} = \pi k X_j^{-1}$, $k = 0,1,\ldots$, які не залежать від b_j.

Власні функції оператора A_j означимо співвідношеннями [2]

$$v_0(x_j, A_j) = \frac{1}{\sqrt{X_j}} + b_j(2x_j - X_j),$$

$$v_{2k}(x_j, A_j) = \frac{2}{\sqrt{2X_j}} \cos\rho_{2k,j} x_j + \frac{2}{\sqrt{2X_j}} \eta_{j,k} \sin\rho_{2k,j} x_j, \quad \eta_{j,k} = -b\,\rho_{2k,j}^{-1},$$

$$v_{2k-1}(x_j, A_j) = \frac{2}{\sqrt{2X_j}} \cos\rho_{2k-1,j} x_j, \qquad k = 1,2,\ldots.$$

Враховуючи, що умови (7) є сильно регулярними за Біркгофом [23], на основі теореми Кессельмана – Михайлова [21, 23] отримуємо, що система $V(A_j)$ власних функцій оператора A_j є базисом Рісса простору $L_2(0, X_j)$. Таким чином, встановлено таке твердження.

Лема 2. *Для будь-яких $b_j \in \mathbb{R}$ спектри операторів A_j, $A_{0,j}$ співпадають і система функцій $V(A_j)$ утворює базис Рісса простору $L_2(0, X_j)$, $j = 1,\ldots,m$.*

4. Оператори перетворення для диференціальних рівнянь другого порядку. Виберемо будь-яку послідовність $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ і розглянемо визначений в просторі $L_2(0, X_j)$ оператор B_j, власні значення якого співпадають з власними значеннями оператора $A_{0,j}$, а власні функції визначаються співвідношеннями

$$v_{2k_j-1}(x_j, B_j) = \frac{2}{\sqrt{2X_j}} \cos\rho_{2k-1,j} x_j, \tag{10}$$

$$v_0(x_j, B_j) = \frac{1}{\sqrt{X_j}} + \theta_0(2x_j - X_j), \tag{11}$$

$$v_{2k}(x_j, B_j) = \frac{2}{\sqrt{2X_j}} \cos\rho_{2k,j} x_j + \theta_k \frac{2}{\sqrt{2X_j}} \sin\rho_{2k,j} x_j, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{12}$$

Нехай $R(B_j): L_2(0,X_j) \to L_2(0,X_j)$ − оператор, який відображає $V(A_{0,j})$ у $V(B_j)$ і $R(B_j)\tau_{k,j}(t) := v_{k,j}(x_j, B_j)$, $k = 0,1,\dots$.

З означення оператора $R(B_j) := E_j + S(B_j)$ отримуємо

$$S(B_j): L_{2,0}(0,X_j) \to L_{2,1}(0,X_j), \quad S(B_j): L_{2,1}(0,X_j) \to 0, \quad S^2(B_j) = 0.$$

Тому існує оператор $R^{-1}(B_j) = E_j - S(B_j)$.

Лема 3. *Для будь-якої послідовності* $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *система функцій* $V(B_j)$ *є повною і мінімальною в просторі* $L_2(0,X_j)$, $j = 1,\dots,m$.

Д о в е д е н н я. Покажемо від протилежного, що система функцій $V(B_j)$ є тотальною (повною) в просторі $L_2(0,X_j)$.

Нехай існує функція $h = h_0 + h_1$, $h_s \in L_{2,s}(0,X_j)$, яка є ортогональною до всіх елементів системи $V(B_j)$. Враховуючи, що система (10) є ортонормованим базисом простору $L_{2,1}(0,X_j)$, отримуємо, що $h_1 = 0$. Отже, $h = h_0 \in \in L_{2,0}(0,X_j)$.

Із припущення ортогональності функції h до елементів системи $V(B_j)$ маємо такі рівності:

$$(h, v_{2k}(x_j, B_j); L_2(0,X_j) = (h_0, \tau_{2k;j}(x_j); L_2(0,X_j) = 0, \quad k = 0,1,\dots.$$

Оскільки система

$$T_{j,0} = \{\tau_{2k,j}(x_j) \in L_2(0,X_j), k = 0,1,\dots\}$$

є ортонормованим базисом простору $L_{2,0}(0,X_j)$, отримуємо, що

$$h_0 \equiv 0, \qquad h \equiv 0. \qquad \blacklozenge$$

Лема 4. *Система функцій* $V(B_j)$, $j = 1,\dots,m$, *є базисом Рісса простору* $L_2(0,X_j)$ *тоді й лише тоді, коли послідовність* $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ *є обмеженою.*

*Д о в е д е н н я. **Необхідність.*** Якщо система $V(B_j)$ є базисом Рісса, тоді вона є майже нормованою. Тому, враховуючи співвідношення (11), (12), отримуємо нерівність

$$0 < C_{3,j} \le \left\| v_{2k}(t, B_j); L_2(0,X_j) \right\|^2 = (1 + |\theta_k|)^2 \le C_{2,j} < \infty.$$

Достатність. Враховуючи формули (11), (12), для будь-якої функції $h \in L_2(0,X_j)$ отримаємо такі нерівності:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \left(R^*(B_j)h, v_k(x_j, A_{0,j}); L_2(0,X_j) \right) \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \left(h, v_k(x_j, B_j); L_2(0,X_j) \right) \right|^2 \le$$

$$\le C(\theta) \left\| h; L_2(0,X_j) \right\|^2, \quad C(\theta) = (1 + \max \theta_k)^2,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \left((R^*(B_j))^{-1} h, v_k(x_j, A_{0,j}); L_2(0,X_j) \right) \right|^2 \le C(\theta) \left\| h; L_2(0,X_j) \right\|^2.$$

Отже, оператори $R^*(B_j)$, $(R^*(B_j))^{-1}: L_2(0,X_j) \to L_2(0,X_j)$ є обмеженими. Тобто система, біортогональна до системи $V(B_j)$, є базисом Рісса за означенням.

На підставі теореми 8 з роботи [5] отримуємо, що система функцій $V(B_j)$ є базисом Рісса простору $L_2(0,X_j)$. ♦

5. Несамоспряжена задача для звичайного диференціального рівняння парного порядку. Розглянемо для будь-яких $p=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$ багатоточкову спектральну задачу

$$L(-D^2)y := \sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{|\alpha|} b_\alpha D^{2\alpha} y = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{13}$$

$$\ell_{1,r,q} y := D_q^{2r-1} y\big|_{x_q=0} - D_q^{2r-1} y\big|_{x_q=X_q} = 0, \tag{14}$$

$$\ell_{1,n+r,j} y := D_j^{2r-1} y\big|_{x_j=0} + D_j^{2r-1} y\big|_{x_j=X_j} = 0, \qquad q \ne j, \tag{15}$$

$$\ell_{1,n+r,j} y := D_j^{2r-1} y\big|_{x_j=0} - D_j^{2r-1} y\big|_{x_j=X_j} = 0, \quad r=1,\ldots,n, \quad q=1,\ldots,m, \tag{16}$$

$$\ell_{1,n+p,j} y := D_j^{2p-1} y\big|_{x_j=0} + D_j^{2p-1} y\big|_{x_j=X_j} + \ell^1_{p,j} y = 0, \tag{17}$$

де

$$\ell^1_{p,j} y := \sum_{r=0}^{r_j} \sum_{q=0}^{m_{p,j}} b_{q,r,p,j} D_j^q y\big|_{x_j=x_{j,r}}, \qquad j=1,\ldots,m. \tag{18}$$

Нехай $L_{1,p,j}$ – оператор задачі (13)–(18), $V(L_{1,p,j})$ – система власних функцій оператора $L_{1,p,j}$, $L_{1,p,j} y := L(-D^2)y$, $y \in D(L_1)$, і

$$D(L_{1,p,j}) := \{ y \in W_2^{2n}(G) : \ell_{1,q,r} y = 0,\ q=1,\ldots,2n,\ r=1,\ldots,m \}.$$

Розглянемо при фіксованому $k(j) := (k_1,\ldots,k_{j-1},k_{j+1},\ldots,k_m) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$ розв'язок задачі (13)–(18) у вигляді добутку

$$y(x) := z(x_j) \prod_{r=1, r\ne j}^{m} \tau_{k_r,r}(x_r). \tag{19}$$

Для визначення невідомої функції $z(x_j)$ отримаємо задачу на власні значення [2, 15]:

$$\sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{2\alpha_j} b_\alpha \prod_{s=1, s\ne j}^{m} (\rho_{k,s})^{2\alpha_s} z^{(2\alpha_j)}(x_j) = \lambda z(x_j), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{20}$$

$$\ell_{1,r,j} z := z^{(2r-1)}\big|_{x_j=0} - z^{(2r-1)}\big|_{x_j=X_j} = 0, \tag{21}$$

$$\ell_{1,n+r,j} z := z^{(2r-1)}\big|_{x_j=0} + z^{(2r-1)}\big|_{x_j=X_j} = 0, \quad r \ne p, \quad r=1,\ldots,n, \tag{22}$$

$$\ell_{1,n+p,j} z := z^{(2p-1)}\big|_{x_j=0} + z^{(2p-1)}\big|_{x_j=X_j} + \ell^1_{p,j} z = 0, \tag{23}$$

де

$$\ell^1_{p,j} z := \sum_{r=0}^{r_j} \sum_{q=0}^{m_{p,j}} b_{q,r,p,j} z^{(q)}\big|_{x_j=x_{j,r}}, \qquad j=1,\ldots,m. \tag{24}$$

Нехай $L_{1,k(j)}$ – оператор задачі (20)–(24):

$$L_{1,k(j)} z := \sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{\alpha_j} b_\alpha \prod_{s=1, s\ne j}^{m} (\rho_{k,s})^{2\alpha_s} z^{(2\alpha_j)}(x_j), \qquad z \in D(L_{1,k(j)}),$$

$$D(L_{1,k(j)}) := \{ y \in W_2^{2n}(0,X_j) : \ell_{1,s,j} z = 0,\ s=1,\ldots,2n \},$$

і нехай $L_{0,k(j)}$ – частковий випадок оператора $L_{1,k(j)}$ при $b_{q,r,p,j}=0$.

Лема 5. *Нехай виконується припущення* $\boldsymbol{P}_1$. *Тоді для будь-яких* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $b_{q,r,p,j} \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $q = 0,1,\dots,m_{s,j}$, $r = 0,1,\dots,r_j$, $s = 1,\dots,n$, $p = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$, *оператор* $L_{1,k(j)}$, $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$, *має власні значення*

$$\lambda_k \equiv \sum_{|\alpha|\le n} b_\alpha (\rho_{k,1})^{2\alpha_1} \dots (\rho_{k,m})^{2\alpha_m}, \qquad k_j = 1,2,\dots, \tag{25}$$

і систему власних функцій $V(L_{1,k(j)})$, *яка є повною в просторі* $L_2(0,X_j)$.

Д о в е д е н н я. Визначимо власні значення оператора $L_{1,k(j)}$. Корені $\pm\omega_r(k(j),\lambda)$, $r=1,\dots,n$, рівняння

$$\sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{\alpha_j} b_\alpha \prod_{s=1,s\ne j}^{m} (\rho_{k,s})^{2\alpha_s} \omega^{2\alpha_j} = \lambda,$$

яке є характеристичним для рівняння (20), виберемо так, що

$$\operatorname{Re}\omega_n(k(j),\lambda) \le \operatorname{Re}\omega_{n-1}(k(j),\lambda) \le \dots \le \operatorname{Re}\omega_1(k(j),\lambda) \le 0, \quad k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}.$$

Фундаментальну систему розв'язків рівняння (20) означимо формулами

$$z_{r,q,j}(x_j,\lambda) := e^{\omega_q(k(j),\lambda)x_j} + (-1)^r e^{\omega_q(k(j),\lambda)(X_j - x_j)} \in L_{2,r}(0,X_j),$$

$$q = 1,\dots,n, \qquad k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}. \tag{26}$$

Підставляючи загальний розв'язок $\sum_{q=1}^{2n} C_q z_{0,q,j}(x_j,\lambda)$ диференціального рівняння (20) у крайові умови (21)–(24), для визначення власних функцій оператора $L_{1,k(j)}$ отримуємо систему лінійних рівнянь, яка має визначник

$$\Delta_{1,j}(\lambda) := \det\left(\ell_{1,s} z_{0,q}(x_j,\lambda)\right)_{s,q=1}^{2n}.$$

Враховуючи рівності $\ell_{1,n+p,j} z_{0,n+q}(x_j,\lambda) = 0$, p, $q = 1,\dots,n$, отримуємо тотожність

$$\Delta_{1,j}(\lambda) \equiv \Delta_{0,j}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

де

$$\Delta_{0,j}(\lambda) := \det\left(\ell_{0,r,j} z_{0,q}(x_j,\lambda)\right)_{r,q=1}^{2n},$$

$$\Delta_{0,j}(\lambda) = \Delta_{0,j}^0(\lambda)\Delta_{0,j}^1(\lambda),$$

$$\Delta_{0,j}^0(\lambda) := \det\left(\ell_{0,r,j} z_{0,s}(x_j,\lambda)\right)_{r,s=1}^{n},$$

$$\Delta_{0,j}^1(\lambda) := \det\left(\ell_{0,n+r,j} z_{0,n+s}(x_j,\lambda)\right)_{r,s=1}^{n}.$$

Розв'язуючи рівняння $\Delta_{0,j}(\lambda) = 0$, знаходимо власні значення (25) операторів $L_{1,k(j)}$ і $L_{0,k(j)}$ і систему T_j власних функцій оператора $L_{0,k(j)}$.

Підставляючи елементи системи функцій $T_{j,1}$ у крайові умови (21)–(24), отримуємо, що $\tau_{2k_j-1}(x_j) \in D(L_{1,k(j)})$, $k_j = 1,2,\dots$.

Отже, власним значенням λ_k, коли $k_j = 2q_j - 1$, $q_j = 1,2,\dots$, оператора $L_{1,k(j)}$ відповідають власні функції

$$v_{1,k_j}(x_j, L_{1.k(j)}) = \tau_{2k_j-1,j}(x_j), \qquad q_j = 1,2,\ldots. \tag{27}$$

Нехай $\omega_{r,k_j}(\lambda_k)$, $r=1,\ldots,n$, – корені рівняння

$$\sum_{|\alpha|\le n}(-1)^{\alpha_j} b_\alpha \prod_{s=1,s\ne j}^{m}(\rho_{k,s})^{2\alpha_s}\omega^{2\alpha_j} = \lambda_k$$

вибрано так, що

$$\omega_{1,k_j}(\lambda_k) = i\pi 2k_j X_j^{-1},$$

$$\operatorname{Re}\omega_{n,k_j}(\lambda_k) \le \operatorname{Re}\omega_{n-1,k_j}(\lambda_k) \le \ldots \le \operatorname{Re}\omega_{2,k_j}(\lambda_k) < 0, \quad k_j = 1,2,\ldots.$$

Розглянемо системи функцій

$$y_{0,1}(x_j,k_j,\lambda_k) := \frac{1}{2}\sin\rho_{2k,j}x_j \in L_{2,1}(0,X_j), \tag{28}$$

$$y_{0,r}(x_j,k_j,\lambda_k) \equiv \frac{1}{2}\left(1+e^{\omega_{r,k_j}(\lambda_k)X_j}\right)^{-1}\left(e^{\omega_{r,k_j}(\lambda_k)x_j} - e^{\omega_{r,k_j}(\lambda_k)(X_j-x_j)}\right),$$

$$r = 2,3,\ldots,n, \qquad k_j = 1,2,\ldots, \tag{29}$$

і квадратну матрицю порядку n, елементи якої означимо таким способом: елементами p-го рядка є функції (28), (29), елементами інших рядків є числа:

$$\psi_{p,1,r,k_j} = (-1)^{r-1}, \; p = 1,\ldots,n, \;\; k_j = 1,2,\ldots,$$

$$\psi_{p,q,r,k_j} = \rho_{2k,j}^{1-2r}\ell_{0,n+r,j}y_{0,q}(x_j,k_j,\lambda_k) = (\omega_{j,k_j}(\lambda_k)X_j)^{2r-1}, \; r\ne p, \; q=2,\ldots,n.$$

Визначник отриманої матриці позначимо через $y_{1,p}(x_j,k_j,\lambda_k)$, $p = 1,\ldots,n$, $k_j = 1,2,\ldots$.

Зауваження 3. Для будь-якого фіксованого $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$ при $k_j \to \infty$ маємо

$$\delta_{1,k_j}(\lambda_k) = \omega_{1,2k_j}(\lambda_k)(\rho_{2k,j})^{-1} = 1,$$

$$\delta_{q,k_j}(\lambda_k) = \omega_{q,2k_j}(\lambda_k)(\rho_{2k,j})^{-1} = \varepsilon_q X_j(1+O(k_j^{-1})),$$

де ε_q – корені рівняння $(\varepsilon)^{2n} = 1$, $\operatorname{Im}\varepsilon_q < 0$, $q = 2,3,\ldots,n$.

Підставляючи функцію $y_{1,p}(x_j,k_j,\lambda_k)$ у крайові умови (21)–(23), отримаємо рівності

$$\ell_{1,r,j}y_{1,p}(x_j,k_j,\lambda_k) = 0, \qquad r \ne n+p,$$

$$\ell_{1,n+p,j}y_{1,p}(x_j,k_j,\lambda_k) = c_{p,j,k}\rho_{2k_j}^{2p-1}$$

$$c_{p,j,k} = (-1)^{p-1}\frac{2}{\sqrt{2X_j}}W_{k_j}(\lambda_k)h_{p,j},$$

де $W_{k_j}(\lambda_k)$ – визначник Вандермонда порядку n, побудований за числами $\delta_{q,k_j}^2(\lambda_k)$, $q = 1,\ldots,n$, $h_{j,k} := \prod_{q=1}^{n}\delta_{q,k_j}(\lambda_k)$.

Нехай

$$y_{2,p}(x_j,k_j,\lambda_k) := c_{p,j,k}y_{1,p}(x_j,k_j,\lambda_k).$$

Тоді

$$\ell_{1,r,j}y_{2,p}(x_j,k_j,\lambda_k) = 0, \qquad r \neq n+p,$$

$$\ell_{1,n+p,j}y_{2,p}(x_j,k_j,\lambda_k) = \rho_{2k_j}^{2p-1}.$$

Зауваження 4. Для будь-якого фіксованого $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$ при $k_j \to \infty$ числова послідовність $W_{k_j}(\lambda_k)$ збігається до визначника Вандермонда [27] $W(\varepsilon_2^2,\dots,\varepsilon_n^2)$, побудованого за числами $\varepsilon_2^2,\dots,\varepsilon_n^2$. При цьому послідовність $\delta_{q,k_j}(\lambda_k)$ збігається до ε_q, $q = 1,\dots,n$. Тому

$$0 < C_4 \le \left|c_{p,j,k}\right|^{-1} \le C_5.$$

Власні функції $v_{2k_j}(x_j,L_{1,(k_j)})$ оператора $L_{1,(k_j)}$ означимо сумою [15]

$$v_0(x_j,L_{1,(k_j)}) := \frac{1}{\sqrt{X_j}} + \eta_{p,j,0}(x_j - X_j), \qquad k_j = 1,2,\dots, \tag{30}$$

$$v_{2k_j}(x_j,L_{1,(k_j)}) := \frac{2}{\sqrt{2X_j}}\cos\rho_{2k,j}x_j + \eta_{p,j,k}y_{2,p}(x_j,k_j,\lambda_k). \tag{31}$$

Для визначення параметра $\eta_{p,j,k}$ підставимо вираз (30) в умови (16), (17):

$$\eta_{p,j,0} = -\frac{1}{2}\ell_{p,j}^1\tau_{0,j}(x_j) = 0, \tag{32}$$

$$\eta_{p,j,k} = -\frac{2}{\sqrt{2X_j}}(\rho_{2k,j})^{1-2p}\ell_{p,j}^1\tau_{2k_j-1,j}(x_j), \qquad k_j = 1,2,\dots. \tag{33}$$

Отже, оператор $L_{1,k(j)}$ має систему власних функцій (27), (30)–(33).

Повнота системи $V(L_{1,k(j)})$ в просторі $L_2(0,X_j)$ доводиться від протилежного, аналогічно до доведення леми 2. ♦

6. Оператори перетворення для диференціальних рівнянь парного порядку. Виберемо будь-яку послідовність дійсних чисел $\{\theta_{k_j}\}_{k_j=1}^{\infty}$, і розглянемо оператор $A_{2,j}$, власні значення якого співпадають з власними значеннями оператора $A_{0,j}$, а власні функції визначаються за формулами вигляду

$$v_0(x_j,A_{2,j}) = \frac{1}{\sqrt{X_j}}, \qquad v_{2k_j-1}(x_j,A_{2,j}) = \frac{2}{\sqrt{2X_j}}\cos\rho_{2k_j-1,j}x_j, \tag{34}$$

$$v_{2k_j}(x_j,A_{2,j}) = \frac{2}{\sqrt{2X_j}}\cos\rho_{2k,j}x_j + \theta_{k_j}y_{2,p}(x_j,k_j,\lambda_k), \quad k_j = 1,2,\dots. \tag{35}$$

Нехай $R(A_{2,j}) = E_j + S(A_{2,j})$ – оператор, визначений в просторі $L_2(0,X_j)$, який відображає $V(A_{0,j})$ у $V(A_{2,j})$, $R(A_{2,j})\tau_{k,j}(x_j) := v_{k_j}(x_j,A_{2,j})$, $k = 0,1,\dots$.

З означення оператора $R(A_{2,j})$ отримуємо, що $S^2(A_{2,j}) = 0$. Тому існує оператор $R^{-1}(A_{2,j}) = E_j - S(A_{2,j})$.

Лема 6. *Для будь-якої послідовності* $\{\theta_{k_j}\}_{k_j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, *система функцій* $V(A_{2,j})$, $j = 1,\dots,m$, *є повною і мінімальною в просторі* $L_2(0, X_j)$.

Д о в е д е н н я. Повнота системи $V(A_{2,j})$ доводиться аналогічно до доведення леми 2. З існування щільно визначеного оператора $R^{-1}(A_{2,j}) = E_j - S(A_{2,j}) : L_2(0, X_j) \to L_2(0, X_j)$ випливає мінімальність системи $V(A_{2,j})$.

Подамо функцію $y_{1,p}(x_j, k_j, \lambda_k)$, $p = 1,\dots,n$, у вигляді суми

$$y_{1,p}(x_j, k_j, \lambda_k) = \Delta_{1,1}(k_j, \lambda_k) z_{1,1}(x_j, k_j, \lambda_k) + \sum_{r=2}^{n} \Delta_{1,j}(k_j, \lambda_k) z_{1,r}(x_j, k_j, \lambda_k), \tag{36}$$

$$\Delta_{1,1}(k_j, \lambda_k) = \prod_{r=2}^{n} \delta_{r,k_j}(\lambda_k) W_{j,k_j,n-1}(\lambda_k), \qquad k_j = 1, 2, \dots . \tag{37}$$

де $W_{j,k_j,n-1}(\lambda_k)$ – визначник Вандермонда порядку $n-1$, побудований за числами $\delta_{s,k_j}^2(\lambda_k)$, $s = 2, 3, \dots, n$, $k_j = 1, 2, \dots$.

Розглянемо оператор B_j у припущенні, що $\theta_{k_j} := \Delta_{1,1}(k_j, \lambda_k)$, $k_j = 1, 2, \dots$. Отриманий оператор позначимо через $A_{3,j}$, $j = 1,\dots,m$.

Будь-який співмножник добутку (37) має границю при $k_j \to \infty$, а отже, є обмеженою послідовністю. Тому послідовність $\{\Delta_{1,1}(k_j, \lambda_k)\}_{k_j=1}^{\infty}$ є обмеженою.

Таким чином, враховуючи лему 4, отримаємо, що $V(A_{3,j})$ є базисом Рісса в $L_2(0, X_j)$. ♦

Нехай $A_{4,j}$ – частковий випадок оператора $A_{2,j}$ при $\theta_{k_j} = 1$, $k_j = 1, 2, \dots$.

Лема 7. *Для будь-яких фіксованих* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, *система функцій* $V(A_{4,j})$, $j = 1,\dots,m$, *є базисом Рісса простору* $L_2(0, X_j)$.

Д о в е д е н н я. З твердження леми 4 випливає повнота системи $V(A_{4,j})$ в просторі $L_2(0, X_j)$.

Враховуючи формули (26), (27), (36), отримуємо, що системи функцій $V(A_{4,j})$, $V(A_{3,j})$ є квадратично близькими. Тому, враховуючи лему 4 і теорему Н. К. Барі [9], отримуємо твердження леми 7. ♦

Лема 8. *Для будь-яких фіксованих* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, *система функцій* $V(A_{2,j})$, $j = 1,\dots,m$, *є базисом Рісса простору* $L_2(0, X_j)$ *тоді й лише тоді, коли послідовність* $\{\theta_{k_j}\}_{k_j=0}^{\infty}$ *обмежена.*

Д о в е д е н н я проводиться аналогічно до доведення леми 4. ♦

Сукупність усіх операторів $R(A_{2,j}) : L_2(0, X_j) \to L_2(0, X_j)$, власні функції яких визначені рівностями (33), (34), позначимо через $\Gamma(k(j))$, $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$.

Сукупність усіх операторів, означених формулою

$$R_j = E_1 \times \dots \times E_{j-1} \times R(A_{2,j}) \times E_{j+1} \times \dots \times E_m, \quad j = 1,\dots,m,$$

де $R(A_{2,j}) \in \Gamma(k(j))$, позначимо через $\Gamma_j(L_0)$, $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$.

Нехай $R_{k(j)} := E_j + S_{k(j)}$ – оператор, який відображає $V(A_{0,j})$ у $V(L_{1,k(j)})$, і E_j – тотожне перетворення в просторі $L_2(0, X_j)$. З формули (32) маємо включення $R_{k(j)} := E_j + S_{k(j)} \in \Gamma(k(j))$, $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$.

Лема 9. *Нехай виконуються припущення* $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$. *Тоді система функцій* $V(L_{1,k(j)})$, $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$, *є базисом Рісса простору* $L_2(0, X_j)$, $j = 1, \ldots, m$.

Д о в е д е н н я. З формули (33) випливає обмеженість елементів послідовності $\{\eta_{p,j,k}\}_{k=0}^{\infty}$ за умови, що справджується припущення $\boldsymbol{P}_2$. Тому, застосовуючи лему 8, отримуємо твердження леми. ♦

Вибравши дві послідовності $\{c_k^1\}_{k=0}^{\infty}$, $\{c_k^2\}_{k=0}^{\infty}$, означимо два оператори перетворення:

$$R_j^p = E_j + S_j^p : L_2(0, X_j) \to L_2(0, X_j) \in \Gamma(k(j)), \quad p = 1, 2, \; k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}.$$

Враховуючи співвідношення $(S_j^p)^2 = 0$, $p = 1, 2$, можемо означити на множині $\Gamma(k(j))$ операцію множення

$$R_j^1 R_j^2 = E_j + S_j^1 + S_j^2.$$

Множина $\Gamma(k(j))$ є групою, оскільки

$$(R_j^p)^{-1} = E_j - S_j^p, \qquad R_j^1 R_j^2 = E_j + S_j^1 + S_j^2.$$

Беручи до уваги рівність $R_j^1 R_j^2 = E_j + S_j^1 + S_j^2 = R_j^2 R_j^1$, отримуємо, що $\Gamma(k(j))$ є комутативною групою.

Означимо власні функції оператора $L_{1,p,j}$ рівностями

$$v_k(x, L_{1,p,j}) := v_{k_j}(x_j, L_{1,k(j)}) \prod_{r=1, r \neq j}^{m} \tau_{k_r, r}(x_r), \qquad k \in \mathbb{Z}_0^m. \tag{38}$$

За системою $V(L_{1,p,j})$ власних функцій (38) оператора $L_{1,p,j}$ означимо оператор $R(L_{1,p,j}) := E + S(L_{1,p,j}) : L_2(G) \to L_2(G)$, який відображає систему функцій $V(L_0)$ у $V(L_1)$:

$$R(L_{1,p,j}) v_k(x) := v_k(x, L_{1,p,j}), \qquad k \in \mathbb{Z}_0^m.$$

Оператор $R(L_{1,p,j})$ має зображення

$$R(L_{1,p,j}) = E_1 \times \ldots \times E_{j-1} \times R(L_{1,k(j)}) \times E_{j+1} \ldots \times E_m, \quad p = 1, \ldots, n. \tag{39}$$

За аналогією з формулою (37), на множині $\Gamma_j(L_0)$ означимо множення, відносно якого ця множина є абелевою групою.

Множину операторів $R(L_{1,p,j})$ позначимо через $\Gamma(L_0)$.

Зауваження 5. Згідно з формулою (39) на множині $\Gamma(L_0)$ означимо множення, відносно якого $\Gamma(L_0)$ є абелевою групою.

Теорема 4. (*i*). *Нехай виконуються припущення* $\boldsymbol{P}_1$. *Тоді для будь-яких* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $b_{q,r,p,j} \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $q = 0, 1, \ldots, m_{s,j}$, $r = 0, 1, \ldots, r_j$, $s = 1, 2, \ldots, n$, *оператор* $L_{1,p,j}$ *має власні значення* (25) *і систему власних функцій*

$V(L_{1,p,j})$, $p = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$, *яка є повною і мінімальною у просторі* $L_2(G)$.

(ii). *Якщо виконуються припущення* $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, *то система функцій* $V(L_{1,p,j})$ *є базисом Рісса простору* $L_2(G)$.

Д о в е д е н н я. ***(i).*** Згідно з лемою 4 для кожного $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$ існує система функцій $W(L_{1,k(j)}) = \{w_{k_j}(x_j, L_{1,k(j)}),\ k_j = 1,2,\ldots\}$, біортогональна до системи $V(L_{1,k(j)})$, $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$. Тому можна означити елементи системи $W(L_1)$, біортогональної в просторі $L_2(G)$ до системи $V(L_{1,p,j})$:

$$w_k(x, L_{1,p,j}) = w_{k_j}(x_j, L_{1,k(j)}) \prod_{r=1, r\neq j}^{m} \tau_{k_r,r}(x_r), \qquad k \in \mathbb{Z}_0^m .$$

Отже, система $V(L_{1,p,j})$ є повною і мінімальною в просторі $L_2(G)$.

(ii). При виконанні припущення $\boldsymbol{P}_2$, враховуючи лему 8, отримуємо майже нормованість і бесселевість [9] системи $V(L_{1,p,j})$ в просторі $L_2(G)$. Тому $R(L_{1,p,j}), R^{-1}(L_{1,p,j}) \in [L_2(G)]$. Отже, за означенням, система $V(L_{1,p,j})$ є базисом Рісса простору $L_2(G)$. ♦

7. Багатоточкові задачі. Для довільного $j = 1,2,\ldots,m$ розглянемо задачу для рівняння (13) з крайовими умовами

$$\ell_{2,s,r} y := D_r^{2s-1} y\big|_{x_r=0} - D_r^{2s-1} y\big|_{x_r=X_r} = 0 , \tag{40}$$

$$\ell_{2,n+s,r} y := D_r^{2s-1} y\big|_{x_r=0} + D_r^{2s-1} y\big|_{x_r=X_r} = 0 , \tag{41}$$

$$r \neq j , \qquad s = 1,\ldots,n , \qquad r = 1,\ldots,m ,$$

$$\ell_{2,s,j} y := D_j^{2s-1} y\big|_{x_j=0} - D_j^{2s-1} y\big|_{x_j=X_j} = 0, \quad s = 1,\ldots,n , \tag{42}$$

$$\ell_{2,n+p,j} y := D_j^{2p-1} y\big|_{x_j=0} + D_j^{2p-1} y\big|_{x_j=X_j} + \ell_{p,j}^1 y = 0, \quad p = 1,\ldots,n . \tag{43}$$

Нехай $L_{2,j}$ − оператор задачі (13), (40)−(43), $V(L_{2,j})$ − система власних функцій оператора $L_{2,j}$, $L_{2,j} y := L(-D^2) y$, $y \in D(L_{2,j})$, і

$$D(L_{2,j}) := \{y \in W : \ell_{2,s,r} y = 0,\ s = 1,\ldots,2n,\ r = 1,\ldots,m\} .$$

При $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$ розв'язок задачі (13), (40)−(43) означимо добутком (19). Невідому функцію $z(x_j)$ визначаємо як розв'язок задачі для рівняння (20) з крайовими умовами

$$\ell_{2,s,j} z := z^{(2s-1)}\big|_{x_j=0} - z^{(2s-1)}\big|_{x_j=X_j} = 0 , \tag{44}$$

$$\ell_{2,n+s,j} z := z^{(2s-1)}\big|_{x_j=0} + z^{(2s-1)}\big|_{x_j=X_j} + \ell_{s,j}^1 z = 0, \quad s = 1,\ldots,n . \tag{45}$$

Нехай $L_{2,k(j)}$ − оператор задачі (20), (44), (45):

$$L_{2,k(j)} z := \sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{\alpha_j} b_\alpha \prod_{s=1, s\neq j}^{m} (\rho_{k,s})^{2\alpha_s} z^{(2\alpha_j)}(x_j), \quad z \in D(L_{2,k(j)}),$$

$$D(L_{2,k(j)}) := \{y \in W_2^{2n}(0, X_j) : \ell_{2,s,j} z = 0,\ s = 1,\ldots,2n\} .$$

Лема 10. ***(i).*** *Нехай справджується припущення* $\boldsymbol{P}_1$. *Тоді для будь-яких* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $b_{q,r,s,j} \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $q = 0,1,\ldots,m_{s,j}$, $r = 0,1,\ldots,r_j$, $m_{s,j} < 2n$, $s = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$, *оператор* $L_{2,k(j)}$, $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$, *має власні значення* (25) *і систему власних функцій* $V(L_{2,k(j)})$, *яка є повною і мінімальною в просторі* $L_2(0,X_j)$.

(ii). *Якщо виконується припущення* $\boldsymbol{P}_2$, *то система функцій* $V(L_{2,k(j)})$, $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$, *є базисом Рісса простору* $L_2(0,X_j)$, $j = 1,\ldots,m$.

Д о в е д е н н я. ***(i).*** Ізоспектральність операторів $L_{0,(k_j)}$ і $L_{2,k(j)}$, $k(j)\in \mathbb{Z}_0^{m-1}$, доводиться міркуваннями, застосованими при доведенні леми 5.

Враховуючи припущення $\boldsymbol{P}_2$, безпосередньою підстановкою загального розв'язку рівняння (43) у крайові умови (44), (45) визначаємо власні функції оператора $L_{2,k(j)}$, $k(j)\in \mathbb{Z}_0^{m-1}$:

$$v_0(x_j, L_{2,k(j)}) := \frac{1}{\sqrt{X_j}} + \sum_{p=1}^{n} \eta_{p,j,0}(x_j - X_j),$$

$$v_{2k_j-1}(x_j, L_{2,k(j)}) := \frac{2}{\sqrt{2X_j}} \cos \rho_{2k-1,j} x_j, \quad k_j = 1,2,\ldots, \tag{46}$$

а власні функції $v_{2k_j}(x_j, L_{2,k(j)})$, $k_j = 1,2,\ldots$, оператора $L_{2,k(j)}$ означимо виразом [15]

$$v_{2k_j}(x_j, L_{2,(k_j)}) := \frac{2}{\sqrt{2X_j}} \cos \rho_{2k,j} x_j + \sum_{p=1}^{n} \eta_{p,j,k} y_{2,p}(x_j, k_j, \lambda_k), \tag{47}$$

де числа $\eta_{p,j,k}$, $k_j = 1,2,\ldots$, визначаються за формулою (33).

Отже, оператор $L_{2,k(j)}$ має систему власних функцій (46), (47), (33). З формул (46), (47) випливає, що оператор $L_{2,k(j)}$ є частковим випадком оператора $A_{2,j}$.

Тому, взявши до уваги лему 7, отримаємо, що система $V(L_{2,k(j)})$ є повною і мінімальною у просторі $L_2(0,X_j)$, а також, що існує біортогональна система

$$W(L_{2,k(j)}) := \{w_{k_j}(x_j, L_{2,(k_j)}) \in L_2(0,X_j),\, k_j = 0,1,\ldots\}, \quad k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}.$$

(ii). Нехай справджується припущення $\boldsymbol{P}_2$. Тоді, беручи до уваги співвідношення (47), (33), отримуємо оцінку

$$\sum_{k_j=0}^{n} \left|\eta_{p,j,k}\right|^2 \le C_{6,j} < \infty, \qquad p = 1,\ldots,n. \tag{48}$$

Отже, власні функції оператора $L_{2,k(j)}$, $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$, утворюють майже нормовану систему функцій в просторі $L_2(0,X_j)$.

Враховуючи твердження леми 4, отримуємо базисність за Ріссом системи $V(L_{2,k(j)})$, $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$, у просторі $L_2(0,X_j)$. ♦

Власні функції оператора $L_{2,j}$ задамо у такому вигляді:

$$v_k(x, L_{2,j}) = v_{k_j}(x_j, L_{2,k(j)}) \prod_{r=1, r\neq j}^{m} \tau_{k_r,r}(x_r), \qquad k \in \mathbb{Z}_0^m. \tag{49}$$

За системою $V(L_{2,j})$ власних функцій (49) оператора $L_{2,j}$ означимо оператор перетворення $R(L_{2,j}) := E + S(L_{2,j}) : L_2(G) \to L_2(G)$:

$$R(L_{2,j}) := \prod_{p=1}^{n} R(L_{1,p,j}) \in \Gamma_j(L_0), \qquad S(L_{2,j}) \equiv \sum_{p=1}^{n} S(L_{1,p,j}),$$

який відображає систему функцій $V(L_0)$ у систему $V(L_{2,j})$:

$$R(L_{2,j}) v_{0,k}(x) := v_k(x, L_{2,j}), \qquad k \in \mathbb{Z}_0^m.$$

Теорема 5. (*i*). *Нехай справджується припущення* $\boldsymbol{P}_1$. *Тоді для будь-яких* $b_\alpha \in \mathbb{R}$, $b_{q,r,p,j} \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le n$, $q = 0,1,\ldots,m_{s,j}$, $r = 0,1,\ldots,r_j$, $m_{s,j} < 2n$, $s = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$, *оператор* L_2 *має власні значення* (25) *і систему власних функцій* $V(L_2)$, *яка є повною та мінімальною в просторі* $L_2(G)$.

(*ii*). *Якщо виконуються припущення* $\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_3$, *то система функцій* $V(L_2)$ *є базисом Рісса простору* $L_2(G)$.

Д о в е д е н н я. **(*i*).** Нехай виконується припущення $\boldsymbol{P}_1$. Тоді за лемою 9, для кожного $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$ існує система функцій

$$W(L_{2,k(j)}) = \{ w_{k_j}(x_j, L_{2,k(j)}),\ k_j = 0,1,\ldots \},$$

біортогональна до $V(L_{2,k(j)})$.

Тому можна визначити елементи системи $W(L_2)$, яка біортогональна в просторі $L_2(G)$ до системи $V(L_2)$ таким співвідношенням

$$w_k(x, L_2) = w_{k_j}(x_j, L_{2,k(j)}) \prod_{r=1, r\neq j}^{m} \tau_{k_r,r}(x_r), \qquad k \in \mathbb{Z}_0^m. \tag{50}$$

Отже, система $V(L_2)$ є повною та мінімальною в просторі $L_2(G)$.

(*ii*). Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4. ♦

8. Доведення теорем 1, 2. Розглянемо для рівняння (13) задачу з умовами (2), (3)

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Нехай

$$R(L) := \prod_{j=1}^{m} R(L_{2,j}), \qquad R(L) = E + \sum_{j=1}^{m} S_j(L_2) \in \Gamma(L_0).$$

Власні функції оператора L означимо у вигляді

$$v_k(x, L) := \prod_{j=1}^{m} v_{k_j}(x_j, L_{2,k(j)}), \quad k \in \mathbb{Z}_0^m.$$

Отже, $V(L) := \{ v_k(x, L) \in L_2(G) : v_k(x, L) = R(L) v_k(x, L_0),\ k \in \mathbb{Z}_0^m \}$ – система власних функцій оператора L.

Враховуючи існування для кожного $k(j) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$ системи $W(L_{2,k(j)})$, біортогональної до системи $V(L_{2,k(j)})$, означимо елементи $w_k(x, L) = \prod_{j=1}^{m} w_{k_j}(x_j, L_{2,k(j)})$ системи $W(L)$, яка є біортогональною до $V(L)$. ♦

Д о в е д е н н я **теореми 2**. При виконанні припущень теореми 2 виконується теорема 5. Тому $R(L_{2,j}), R^{-1}(L_{2,j}) \in [L_2(G)]$, $j = 1,2,\dots,m$. Враховуючи співвідношення $R(L) := \prod_{j=1}^{m} R_j(L_2)$, отримаємо включення $R(L)$, $R^{-1}(L) \in [L_2(G)]$. Тому з означення базису Рісса в гільбертовому просторі отримуємо твердження теореми 2. ♦

Зауваження 6. Існують додатні числа $C_1(L)$, $C_2(L)$ такі, що для будь-якої функції

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} f_k v_k(x,L) \in L_2(G), \qquad f_k = (f, w_k(x,L); L_2(G)), \tag{51}$$

справджується нерівність

$$C_1(L)\|f; L_2(G)\|^2 \le \sum_{|k|=0}^{\infty} |f_k|^2 \le C_2(L)\|f; L_2(G)\|^2.$$

9. Багатоточкова задача з однорідними умовами. Розв'язок $u(x)$ багатоточкової задачі (1)–(3) знаходимо у вигляді ряду за системою власних функцій оператора L:

$$u(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} u_k v_k(x,L) \in L_2(G). \tag{52}$$

Підставляючи розвинення (51), (52) у рівняння (1), отримаємо рівності

$$u_k = \lambda_k^{-1} f_k, \qquad k \in \mathbb{Z}_0^m,$$

$$u(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \lambda_k^{-1} f_k v_k(x,L).$$

Д о в е д е н н я **теореми 3.** З припущення P_3 випливає, що усі коефіцієнти при старших похідних D_j^{2n} виразу $L(-D^2)$ мають однаковий знак і відмінні від нуля.

Тому, не зменшуючи загальності міркувань, припустимо, що у виразі $L(-D^2)$ коефіцієнт $b_{0,0,\dots,m}$ при похідній D_m^{2n} дорівнює одиниці і доведення проведемо для змінної x_m.

Покажемо, що $h_m(x) := D_m^{2n} u(x) \in L_2(G)$. Нехай

$$D_m^{2n} u(x) := \sum_{|k|=0}^{\infty} f_k v_{m,k}(x), v_{m,k}(x) = \lambda_k^{-1} D_m^{2n} v_{m,k}(x,L).$$

Зафіксуємо $k(m) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$ і розглянемо функції

$$v_{m,k}(x) = \bigotimes_{j=1}^{m-1} R(L_{2,j}) \tau_{k_j,j}(x_j) \otimes \lambda_k^{-1} D_m^{2n} v_{k_m}(x_m, L_{2,k(m)}), \quad k \in \mathbb{Z}_0^m,$$

$$v_{k_m,k(m)}(x_m) := \lambda_k^{-1} D_m^{2n} v_{k_m}(x_m, L_{2,k(m)}), \tag{53}$$

$$v_{1,k_m,k(m)}(x_m) := (-1)^n \lambda_k^{-1} \rho_{k(m)}^{2n} v_{k_m}(x_m, L_{2,(k_m)}), \quad k_m = 1,2,\dots. \tag{54}$$

Нехай

$$V_{k(m)} := \{v_{k_m,k(m)}(x_m) \in L_2(0, X_m) : k_m = 1,2,\dots\},$$

$$V_{1,k(m)} := \{v_{1,k_m,k(m)}(x_m) \in L_2(0, X_m) : k_m = 0,1,\dots\}.$$

Зауваження 7. При виконанні припущення $\boldsymbol{P}_3$ послідовність чисел $(\lambda_k^{-1}\rho_{k(m)}^{2n})_{k_m=1}^{\infty}$, $k(m) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$, є обмеженою зверху та знизу.

Тому система функцій $V_{1,k(m)}$, елементи якої отримуємо множенням на числа $\lambda_k^{-1}\rho_{k(m)}^{2n}$ відповідних елементів базису Рісса $V(L_{2,k(m)})$, є базисом Рісса в $L_2(0, X_m)$.

Аналогічно до доведення леми 3 доводиться

Лема 11. *Для довільного* $k(m) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$ *система функцій* $V_{k(m)}$ *є повною і мінімальною в просторі* $L_2\left(0, X_m\right)$.

Беручи до уваги формули (53), (54) та асимптотику при $k_m \to \infty$ функцій $z_{1,q}(x_m, k_m, \lambda_k)$, $q = 1,\ldots,n$, отримуємо таке твердження.

Лема 12. *Для довільного* $k(m) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$ *система функцій* $V_{k(m)}$ *є квадратично близькою до системи* $V_{1,k(m)}$.

Тому із теореми Н. К. Барі [5] отримуємо правильність наступної леми.

Лема 13. *Для довільного фіксованого* $k(m) \in \mathbb{Z}_0^{m-1}$ *система функцій* $V_{k(m)}$ *є базисом Рісса простору* $L_2(0, X_m)$.

Беручи до уваги співвідношення (53) і теорему 5, отримуємо, що система функцій $V_m := \{v_{m,k}(x),\, k \in \mathbb{Z}_0^m\}$ *є базисом Рісса простору* $L_2(G)$.

Нехай $R_m : L_2(\mathrm{G}) \to L_2(\mathrm{G})$ – оператор, що відображає елементи системи $V(L)$ в елементи системи V_m. Обидві системи є базисами Рісса. Тому $\|R_m; [L_2(\mathrm{G})]\| \le C_7 < \infty$.

Отже, враховуючи зауваження 6, отримуємо, що $D_m^{2n}u(x) \in L_2(\mathrm{G})$ і

$$\left\|D_m^{2n}L^{-1}f; [L_2(\mathrm{G})]\right\| \le C_8 \left\|f; L_2(\mathrm{G})\right\|^2 < \infty, \qquad C_8 = C_7^2 C_2(L).$$

Аналогічно доводяться включення $D_j^{2n}u(x) \in L_2(G)$, $j = 1,\ldots, m-1$.

Тому, враховуючи означення норми простору $W_2^{2n}(G)$, отримуємо, що $u(x) \in W_2^{2n}(G)$. ♦

Зауваження 7. Якщо зняти припущення $\boldsymbol{P}_4$, тоді

- У випадку $L(-D^2)y := -\sum_{j=1}^{m} D_j^2 y$ кратність власних значень оператора L зростає і його обернений не буде цілком неперервним оператором $L_2(G) \to L_2(G)$.
- У випадку $L(-D^2)y := D_1^2 y - \sum_{j=2}^{m} D_j^2 y$ число «0» буде власним значенням нескінченної кратності.

1. *Баранецький Я. О.* Нелокальна крайова задача для рівнянь з постійними коефіцієнтами // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1997. – № 320. – С. 13–15.
2. *Баранецький Я. О., Баша А. А.* Нелокальна багатоточкова задача для диференціально-операторних рівнянь порядку $2n$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 3. – С. 37–44.
   Те саме: *Baranetskij Ya. O., Basha A. A.* Nonlocal multipoint problem for differential-operator equations of order $2n$ // J. Math. Sci. – 2016. – **217**, No. 2. – P. 176–186. – doi:10.1007/s10958-016-2965-0.

3. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І., Сохан П. Л.* Крайові задачі для оператора двократного диференціювання. Сильно регулярні та нерегулярні за Біркгофом нелокальні умови // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – № 871. – С. 13–19.
4. *Баранецький Я. О., Копчук-Кашецький А. В.* Спектральні властивості нелокальної багатоточкової задачі для бігармонічного рівняння // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 239–242.
   – http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/9896.
5. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. записки Моск. гос. ун-та. – 1951. – **4**, вып. 148. – С. 69–107.
6. *Борок В. М.* О корректной разрешимости краевой задачи в бесконечном слое для линейных уравнений с постоянными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 4. – С. 922–939.
   Те саме: *Borok V. M.* On correct solvability of a boundary value problem in an infinite slab for linear equations with constant coefficients // Math. of the USSR–Izv. – 1971. – **5**, No. 4. – P. 935–953.
   – doi: 10.1070/IM1971v005n04ABEH001126.
7. *Борок В. М., Фардигола Л. В.* Нелокальные корректные краевые задачи в слое // Мат заметки. – 1990. – **48,** № 1. – С. 20–25.
   Те саме: *Borok V. M., Fardigola L. V.* Nonlocal well-posed boundary-value problems in a layer // Math. Notes of the Acad. of Sci. of the USSR. – 1990. – **48**, No. 1. – P. 635–639. – doi: 10.1007/BF01164259.
8. *Бурский В. П., Буряченко Е. А.* Некоторые вопросы нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка в круге // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 4. – С. 498–508.
   Те саме: *Burskii V. P., Buryachenko E. A.* Some aspects of the nontrivial solvability of homogeneous Dirichlet problems for linear equations of arbitrary even order in the disk // Math. Notes. – 2005. – **77,** No. 4. – P. 461–470.
   – doi: 10.4213/mzm2508.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
   Те саме: *Gohberg I. C., Krein M. G.* Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1969. – xv+378 p.
10. *Дикополов Г. В., Шилов Г. Е.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24,** № 3. – С. 369–380.
11. *Иргашев Б. Ю.* Краевая задача для уравнения высокого четного порядка // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Физика. – 2016. – № 3(34). – С. 6–18. – doi: 10.15688/jvolsu1.2016.3.1.
12. *Иргашев Б. Ю.* Об одной краевой задаче для уравнения высокого четного порядка // Изв. вузов. Математика. – 2017. – № 9. – С. 13–29.
   Те саме: *Irgashev B. Yu.* On one boundary-value problem for an equation of higher even order // Russian Math. (Izv. VUZ). – 2017. – **61,** No. 9. – P. 10–26. doi: 10.3103/S1066369X1709002X.
13. *Ільків В. С.* Умови неєдиності розв'язку задачі Діріхле в одиничному крузі у термінах коефіцієнтів диференціального рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 3. – С. 49–60.
   Те саме: *Il'kiv V. S.* Nonuniqueness conditions for the solutions of the Dirichlet problem in a unit disk in terms of the coefficients of differential equation // J. Math. Sci. – 2013. – **194**, No. 2. – P. 182–197. – doi: 10.1007/s10958-013-1519-y.
14. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1993. – 230 с.
15. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Задача з однорідною інтегральною умовою для неоднорідного рівняння із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 4. – С. 7–14.
   Те саме: *Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* Problem with homogeneous integral condition for an inhomogeneous partial differential equation // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 5. – P. 535–544. – doi: 10.1007/s10958-012-1081-z.
16. *Каленюк П., Баранецький Я., Коляса Л.* Нелокальна крайова задача для оператора диференціювання парного порядку // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Б. Й. Пташника. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 91–109.

17. *Кангужин Б. Е., Кошанов Б. Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимск. мат. журн. – 2010. – **2**, № 2. – С. 41–52.
18. *Карачик В. В.* Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. – 2018. – **54,** № 5. – С. 653–662. – doi: 10.1134/S0374064118050096.
    Те саме: *Karachik V. V.* Riquier–Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball // Differ. Equat. – 2018. – **54,** No. 5. – P. 648–657. doi: 10.1134/S0012266118050087.
19. *Карачик В. В.* Задача типа Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Челяб. физ.-мат. журн. – 2017. – **2**, № 4. –С. 420–429.
20. *Карачик В. В.* Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2017. – **54**, № 7. – С. 1149–1170.
    Те саме: *Karachik V. V.* Construction of polynomial solutions to the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball // Comput. Math. Math. Phys. – 2014. – **54**, No. 7. – P. 1122–1143. – doi: 10.1134/S0965542514070070
21. *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 2(39). – С. 82–93.
22. *Кошанов Б. Д., Солдатов А. П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2016. – **52**, № 12. – С. 1666–1681. – doi: 10.1134/S0374064116120074.
    Те саме: *Koshanov B. D., Soldatov A. P.* Boundary value problem with normal derivatives for a higher-order elliptic equation on the plane // Differ. Equat. – 2016. – **52**, No. 12. – P. 1594–1609. – doi: 10.1134/S0012266116120077.
23. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
24. *Павлов А. Л.* Разрешимость краевых задач в полупространстве для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классе медленно растущих обобщенных функций // Сиб. мат. журн. – 2013. – **54**, № 4. – С. 871–889.
    Те саме: *Pavlov A. L.* Solvability of boundary value problems in a half-space for differential equations with constant coefficients in the class of tempered distributions // Sib. Math. J. – 2013. – **54**, No. 4. – P. 697–712. – doi: 10.1134/S0037446613040101.
25. *Паламодов В. П.* Об условиях корректной разрешимости в цело некоторого класса уравнений с постоянными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 3. – С. 528–530.
26. *Паламодов В. П.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 3. – С. 381–386.
27. *Пташник Б. Й., Ількiв В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
28. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Мат. заметки. – 2015. – **97**, № 2. – С. 262–276. – doi: 10.4213/mzm9286.
    Те саме: *Sabitov K. B.* The Dirichlet problem for higher-order partial differential equations // Math. Notes. – 2015. – **97**, No. 1-2. – P. 265–267. – https://doi.org/10.1134/S0001434615010277.
29. *Baranetskij Ya. O., Demkiv I. I., Ivasiuk I. Ya., Kopach M. I.* The nonlocal problem for the differential equations the order $2n$ with an unbounded operator coefficients with the involution // Карпат. мат. публікації. – 2018. – **10**, № 1. – P. 14–30. – doi: 10.15330/cmp.10.1.14-30.
30. *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kolyasa L. I., Kopach M. I.* The nonlocal problem for the differential-operator equation of the even order with the involution // Карпат. мат. публікації. – 2017. – **9**, № 2. – P. 109–119. – doi: 10.15330/cmp.9.2.109-119
31. *Gazzola F., Grunau H. C., Sweers G.* Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains // Lect. Notes in Math. – Berlin: Springer, 2010. – **1991**. – xviii+423 p.

НЕЛОКАЛЬНАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Для уравнения четного порядка в частных производных с постоянными коэффициентами методом Фурье в области G изучена задача с условиями, являющемися несамоспряжеными многоточечными возмущениями краевых условий Неймана. Определены собственные значения и собственные функции оператора L многоточечной задачи и доказано полноту системы собственных функций $V(L)$ оператора L в пространстве $L_2(G)$. В случае, когда уравнение является эллиптическим, определены условия, при выполнении которых система $V(L)$ является базисом Рисса этого пространства. Построено решение неоднородной задачи с однородными многоточечными условиями в виде ряда Фурье по системе $V(L)$ и предложеы условия существования и единственности решения.

Ключевые слова: *метод Фурье, корневые функции, базис Рисса, многоточечные условия, оператор преобразования.*

NONLOCAL MULTIPOINT PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS OF EVEN ORDER

For an equation of even order in derivatives with constant coefficients, the Fourier method in the region G is studying a problem with boundary conditions that are multipoint perturbations of the Neumann conditions. The eigenvalues and eigenfunctions of the operator L of a multipoint problem are determined and the completeness of the system $V(L)$ of eigenfunctions of the operator L in space is proved. In the case when the equation is elliptic, the conditions are determined under which the system $V(L)$ is a Riesz basis of this space. The solution of an inhomogeneous problem with homogeneous multipoint conditions in the form of a Fourier series of the system $V(L)$ is constructed and the conditions of existence and uniqueness of the solution are established.

Key words: *Fourier method, root functions, Riesz basis, multipoint conditions, transformation operator.*

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[2] Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
18.02.18