УДК 519.624.2

М. В. Кутнів

МОДИФІКОВАНІ ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ МОНОТОННИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Для нелінійних монотонних крайових задач побудовано триточкові різницеві схеми високого порядку точності на нерівномірній сітці. Доведено існування і єдиність розв'язку триточкових різницевих схем, отримано оцінку точності, а також досліджено збіжність методу простої ітерації для їх розв'язування.

У роботі [8] була здійснена спроба побудови триточкової різницевої схеми (ТРС) 4-го порядку точності для задачі

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = \mu_1, \qquad u(1) = \mu_2, \tag{1}$$

але обґрунтування наведено тільки для випадку $k(x) = \exp(bx/a)$. Запропонована у [8] методика не може бути використана навіть у такому спеціальному випадку для побудови ТРС вищого порядку точності, ніж 4. На основі теорії точних триточкових різницевих схем (ТТРС) у [2, 5] побудовано та обґрунтовано ТРС m-го порядку точності на рівномірній сітці для задачі (1) з кусково-гладкими $k(x)$, $f(x,u)$, а у випадку нелінійних монотонних звичайних диференціальних рівнянь – в [1].

У цій роботі розроблено нову ефективну алгоритмічну реалізацію ТТРС на нерівномірній сітці через ТРС порядку точності $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ (тут $[a]$ – ціла частина числа a) за умов [3]

$$0 < c_1 \le k(x) \le c_2 \qquad \forall x \in [0,1], \qquad k(x) \in Q^1[0,1], \tag{2}$$

$$f_u(x) \equiv f(x,u) \in Q^0[0,1] \qquad \forall u \in \mathbb{R}^1,$$

$$f_x(u) \equiv f(x,u) \in C(\mathbb{R}^1) \qquad \forall x \in [0,1], \tag{3}$$

$$|f(x,u)| \le g(x) + c|u| \qquad \forall x \in [0,1], \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad c \ge 0, \tag{4}$$

$$[f(x,u) - f(x,v)](u-v) \le c_3|u-v|^2 \qquad \forall x \in [0,1],$$

$$u, v \in \mathbb{R}^1, \quad 0 \le c_3 < \pi^2 c_1, \tag{5}$$

які гарантують існування та єдиність розв'язку задачі (1). Тут $g(x) \in L_2(0,1)$; c, c_1, c_2, c_3 – сталі; $Q^p[0,1]$ – клас функцій з кусково-неперервними похідними до p-го порядку включно зі скінченною кількістю точок розриву першого роду. У точці розриву ξ вимагаємо виконання умов узгодженості

$$u(\xi - 0) = u(\xi + 0), \qquad k(x)\frac{du}{dx}\Big|_{x=\xi-0} = k(x)\frac{du}{dx}\Big|_{x=\xi+0}.$$

ТТРС на нерівномірній сітці $\hat{\omega}_h = \{x_j \in (0,1),\ j = 1,2,\dots,N-1,\ h_j = x_j - x_{j-1} > 0,\ h_1 + h_2 + \dots + h_N = 1\}$, вибраній так, щоб точки розриву функцій $k(x)$, $f(x,u)$ збігалися з вузлами сітки, за умов (2)–(5) побудовано та обґрунтовано в [3].

Зауважимо, що з урахуванням рівності

$$(-1)^{\alpha+1} \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j} V_\alpha^j(\xi) f(\xi, u)\, d\xi =$$

$$= (-1)^\alpha V_\alpha^j(x_j)\, \ell_\alpha^j(x_j, u) + w_\alpha^j(x_j, u), \qquad \alpha = 1, 2,$$

де

$$V_1^j(x) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x} \frac{dt}{k(t)}, \qquad V_2^j(x) = \int\limits_{x}^{x_{j+1}} \frac{dt}{k(t)},$$

$$u(x) = \hat{u}(x) + w_\alpha^j(x,u) - \frac{V_\alpha^j(x)}{V_\alpha^j(x_j)} w_\alpha^j(x_j, u), \qquad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \tag{6}$$

$$\hat{u}(x) = \left[u(x_j) V_1^j(x) + u(x_{j-1}) V_2^{j-1}(x)\right]\left[V_1^j(x_j)\right]^{-1}, \qquad x \in [x_{j-1}, x_j],$$

функції $w_\alpha^j(x,u)$, $\ell_\alpha^j(x,u)$ – розв'язки задач Коші

$$\frac{dw_\alpha^j(x,u)}{dx} = \frac{\ell_\alpha^j(x,u)}{k(x)},$$

$$\frac{d\ell_\alpha^j(x,u)}{dx} = -f\left(x, \hat{u}(x) + w_\alpha^j(x,u) - \frac{V_\alpha^j(x)}{V_\alpha^j(x_j)} w_\alpha^j(x_j, u)\right),$$

$$x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \tag{7}$$

$$w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = \ell_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1,$$

ТТРС буде мати вигляд (див. [3])

$$(a u_{\bar{x}})_{\hat{x}} = -\varphi(x,u), \qquad x \in \hat{\omega}_h, \qquad u(0) = \mu_1, \qquad u(1) = \mu_2, \tag{8}$$

$$u_{\bar{x},j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}, \qquad u_{\hat{x},j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\hbar_j}, \qquad \hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2},$$

$$a(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} V_1^j(x_j)\right]^{-1},$$

$$\varphi(x_j, u) = \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha \left[\ell_\alpha^j(x_j, u) + (-1)^\alpha \frac{w_\alpha^j(x_j, u)}{V_\alpha^j(x_j)}\right]. \tag{9}$$

Для побудови ТТРС (8), (9) $\forall x_j \in \hat{\omega}_h$ необхідно розв'язати дві задачі Коші (7): одну ($\alpha = 1$) вперед, на відрізку $[x_{j-1}, x_j]$, а другу ($\alpha = 2$) – назад, на відрізку $[x_j, x_{j+1}]$, причому обидві мають гладкі коефіцієнти. Застосуємо для їх чисельного розв'язування будь-який однокроковий метод: розвинення у ряд Тейлора чи Рунге-Кутта $\bar{m}$-го порядку точності. Для визначеності викладки будемо проводити для методу розвинення у ряд Тейлора. Зауважимо, що функції $w_\alpha^j(x,u)$, $\ell_\alpha^j(x,u)$, $\alpha = 1, 2$, які є розв'язками системи (7), залежать від параметрів $b_\alpha \equiv b_\alpha^j(u) \equiv w_\alpha^j(x_j, u)$, тобто $w_\alpha^j(x,u) \equiv \equiv w_\alpha^j(x, u, b_\alpha)$, $\ell_\alpha^j(x,u) \equiv \ell_\alpha^j(x, u, b_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$. Тоді алгоритм розв'язування задачі (7) має вигляд:

1°. Послідовно диференціюючи (7), знаходимо похідні

$$\frac{d^p w_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{dx^p}, \qquad \frac{d^p \ell_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{dx^p}, \qquad p = 2,3,\ldots,$$

$$x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \qquad \alpha = 1,2.$$

2°. Визначаємо наближене значення параметрів b_α:

$$b_\alpha^{(s-1)} = w_\alpha^{(s-1)j}(x_j,u) = -\frac{h_{j-1+\alpha}^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} +$$

$$+\sum_{p=3}^{s-1}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^p}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u,b_\alpha^{(s-2)})}{dx^p}, \quad s = 3,4,\ldots,\bar{m}. \qquad (10)$$

3°. Обчислюємо наближений розв'язок задачі (7):

$$w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u) = -\frac{h_{j-1+\alpha}^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} +$$

$$+\sum_{p=3}^{\bar{m}}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^p}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u,b_\alpha^{(\bar{m}-1)})}{dx^p}, \qquad (11)$$

$$\ell_\alpha^{(m)j}(x_j,u) = (-1)^\alpha h_{j-1+\alpha} f_{j+(-1)^\alpha} +$$

$$+\sum_{p=2}^{m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^p}{p!}\frac{d^p \ell_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u,b_\alpha^{(\bar{m}-1)})}{dx^p}. \qquad (12)$$

Лема 1. *Нехай*

$$0 < c_1 \le k(x), \quad k(x) \in Q^{m+1}[0,1], \quad f(x,u) \in \bigcup_{j=1}^{N} C^{m+1}\big([x_{j-1},x_j]\times\mathbb{R}^1\big).$$

Тоді виконуються такі співвідношення:

$$V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) = (-1)^{\alpha+1}\sum_{p=1}^{\bar{m}}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^p}{p!}\left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\frac{1}{k(x)}\right]\Bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} =$$

$$= V_\alpha^j(x_j) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}), \qquad (13)$$

$$w_\alpha^j(x_j,u) = w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u) +$$

$$+\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar{m}+1}}{(\bar{m}+1)!}\frac{d^{\bar{m}+1}w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)}{dx^{\bar{m}+1}} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}), \qquad (14)$$

$$\ell_\alpha^j(x_j,u) = \ell_\alpha^{(m)j}(x_j,u) +$$

$$+\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}\ell_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)}{dx^{m+1}} + O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}). \qquad (15)$$

Д о в е д е н н я є аналогічним до доведення леми 3 з роботи [2]. ◊

Замість ТТРС (8), (9), (7) можна тепер скористатись ТРС $\bar{m}$-го рангу вигляду

$$\left(a^{(\bar{m})} y_{\bar{x}}^{(\bar{m})}\right)_{\hat{x}} = -\varphi^{(\bar{m})}(x, y^{(\bar{m})}), \qquad x \in \hat{\omega}_h,$$

$$y^{(\bar{m})}(0) = \mu_1, \qquad y^{(\bar{m})}(1) = \mu_2, \tag{16}$$

$$a^{(\bar{m})}(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} V_1^{(\bar{m})j}(x_j)\right]^{-1},$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) = \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^{\alpha} \left[\ell_{\alpha}^{(m)j}(x_j, u) + (-1)^{\alpha} \frac{w_{\alpha}^{(\bar{m})j}(x_j, u)}{V_{\alpha}^{j}(x_j)}\right].$$

Для доведення існування і єдиності розв'язку ТРС (16), а також для встановлення її точності необхідна

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді справджуються оцінки*

$$\left| a^{(\bar{m})}(x_j) - a(x_j) \right| \le M |h|^{\bar{m}}, \tag{17}$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \left\{ h_j^{m+1} \left[\frac{k(x_j - 0)}{(m+2)!} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \left(\frac{\ell_2^{j-1}(x, u)}{k(x)} \right) \right|_{x = x_j - 0} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{(m+1)!} \frac{d^{m+1} \ell_2^{j-1}(x, u)}{dx^{m+1}} \right|_{x = x_j - 0} \right] \Bigg\}_{\hat{x}} + O\left(\frac{h_j^{m+2} + h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j} \right), \tag{18}$$

якщо m – непарне, і

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) =$$

$$= \left\{ \frac{h_j^m}{(m+1)!} k(x) \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{\ell_2^{j-1}(x, u)}{k(x)} \right] \right|_{x = x_j - 0} \Bigg\}_{\hat{x}} + O\left(\frac{h_j^{m+1} + h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j} \right), \tag{19}$$

якщо m – парне.

Д о в е д е н н я. Нерівність (17) випливає з (13). Дійсно,

$$a^{(\bar{m})}(x_j) - a(x_j) = \frac{h_j \left[V_1^j(x_j) - V_1^{(\bar{m})j}(x_j) \right]}{V_1^{(\bar{m})j}(x_j) V_1^j(x_j)} = O(h_j^{\bar{m}}).$$

Доведемо виконання оцінок (18), (19). Зауважимо, що

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) =$$

$$= \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^{\alpha} \left\{ \ell_{\alpha}^{(m)j}(x_j, u) - \ell_{\alpha}^{j}(x_j, u) + \right.$$

$$\left. + (-1)^{\alpha} \left[\frac{w_{\alpha}^{(\bar{m})j}(x_j, u)}{V_{\alpha}^{(\bar{m})j}(x_j)} - \frac{w_{\alpha}^{j}(x_j, u)}{V_{\alpha}^{j}(x_j)} \right] \right\}. \tag{20}$$

За лемою 1 маємо

$$\frac{w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)}{V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}-\frac{w_\alpha^{j}(x_j,u)}{V_\alpha^{j}(x_j)}=$$

$$=-\frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^{\bar m+1}}{(\bar m+1)!}\frac{d^{\bar m+1}w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)}{dx^{\bar m+1}}\frac{1}{V_\alpha^j(x_j)}+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}). \quad (21)$$

Співвідношення (20), (15), (21) і $V_1^j(x_j)=\dfrac{h_j}{k_{j-1}}+O(h_j^2)$, $V_2^j(x_j)=\dfrac{h_{j+1}}{k_{j+1}}+O(h_{j+1}^2)$ при непарному m зводяться до виразу

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\frac{1}{\hbar_j}\left[\frac{h_{j+1}^{m+1}k_{j+1}}{(m+2)!}\frac{d^{m+2}w_2^j(x_{j+1},u)}{dx^{m+2}}-\right.$$

$$-\frac{h_j^{m+1}k_{j-1}}{(m+2)!}\frac{d^{m+2}w_1^j(x_{j-1},u)}{dx^{m+2}}-\frac{h_{j+1}^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}\ell_2^j(x_{j+1},u)}{dx^{m+1}}+$$

$$\left.+\frac{h_j^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}\ell_1^j(x_{j-1},u)}{dx^{m+1}}\right]+O\left(\frac{h_j^{m+2}+h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j}\right), \quad (22)$$

а при парному m – до виразу

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\frac{1}{(m+1)!\,\hbar_j}\left[h_{j+1}^m k_{j+1}\frac{d^{m+1}w_2^j(x_{j+1},u)}{dx^{m+1}}-\right.$$

$$\left.-h_j^m k_{j-1}\frac{d^m w_1^j(x_{j-1},u)}{dx^{m+1}}\right]+O\left(\frac{h_j^{m+1}+h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j}\right). \quad (23)$$

Зі співвідношення (6) маємо

$$u(x)=\hat u(x)+w_1^j(x,u)-\frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}w_1^j(x_j,u)=$$

$$=\hat u(x)+w_2^{j-1}(x,u)-\frac{V_2^{j-1}(x)}{V_2^{j-1}(x_{j-1})}w_2^{j-1}(x_j,u),\qquad x\in[x_{j-1},x_j],$$

а звідси отримуємо

$$w_1^j(x,u)=w_2^{j-1}(x,u)+\frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}w_1^j(x_j,u)-$$

$$-\frac{V_2^{j-1}(x)}{V_2^{j-1}(x_{j-1})}w_2^{j-1}(x_{j-1},u),\qquad x\in[x_{j-1},x_j].$$

Продиференціювавши останню рівність і помноживши на $k(x)$, отримаємо

$$\ell_1^j(x,u)=\ell_2^{j-1}(x,u)+\frac{w_1^j(x_j,u)+w_2^{j-1}(x_{j-1},u)}{V_1^j(x_j)},\qquad x\in[x_{j-1},x_j].$$

Оскільки за умов леми виконуються співвідношення

$$\frac{d^{m+1}\ell_1^j(x,u)}{dx^{m+1}} = \frac{d^{m+1}\ell_2^{j-1}(x,u)}{dx^{m+1}},$$

$$\frac{d^{m+1}w_1^j(x,u)}{dx^{m+1}} = \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{k(x)}\right] \frac{w_1^j(x_j,u) + w_2^{j-1}(x_{j-1},u)}{V_1^j(x_j)} +$$

$$+\frac{d^{m+1}w_2^{j-1}(x,u)}{dx^{m+1}} = \frac{d^{m+1}w_2^{j-1}(x,u)}{dx^{m+1}} + O(h_j), \qquad x \in [x_{j-1}, x_j],$$

то згідно з рівністю $k_{j-1} = k_j + O(h_j)$ одержимо

$$\frac{d^{m+1}\ell_1^j(x_{j-1}+0,u)}{dx^{m+1}} = \frac{d^{m+1}\ell_2^{j-1}(x_j-0,u)}{dx^{m+1}} + O(h_j),$$

$$k(x_{j-1}+0)\frac{d^{m+1}w_1^j(x_{j-1}+0,u)}{dx^{m+1}} = k(x_j-0)\frac{d^{m+1}w_2^{j-1}(x_j-0,u)}{dx^{m+1}} + O(h_j). \qquad (24)$$

З урахуванням (24) зі співвідношень (22), (23) випливають (18), (19). ◊

У просторі сіткових функцій H_h введемо скалярні добутки

$$(u,v)_{\hat\omega_h} = \sum_{\xi\in\hat\omega_h} \hbar(\xi)u(\xi)v(\xi), \qquad (u,v)_{\hat\omega_h^+} = \sum_{\xi\in\hat\omega_h^+} h(\xi)u(\xi)v(\xi)$$

та норми

$$\|u\|_{0,2,\hat\omega_h} = (u,u)_{\hat\omega_h}^{1/2}, \qquad \|u\|_{0,2,\hat\omega_h^+} = (u,u)_{\hat\omega_h^+}^{1/2},$$

$$\|u\|_{1,2,\hat\omega_h} = \left(\|u\|_{0,2,\hat\omega_h}^2 + \|u_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+}^2\right)^{1/2}.$$

На підставі попередніх тверджень доведемо теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (2)–(5) *та умови леми 1. Тоді* $\exists h_0 > 0$ *таке, що* $\forall\{h_j\}_{j=1}^N : |h| = \max_{1\le j\le N} h_j \le h_0$ *і ТРС* (16), (10)–(12) *має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$\left\|y^{(\bar m)} - u\right\|_{1,2,\hat\omega_h}^* = \left[\left\|y^{(\bar m)} - u\right\|_{0,2,\hat\omega_h}^2 + \left\|k\frac{dy^{(\bar m)}}{dx} - k\frac{du}{dx}\right\|_{0,2,\hat\omega_h}^2\right]^{1/2} \le M|h|^{\bar m},$$

де

$$k(x_j)\frac{dy^{(\bar m)}(x_j)}{dx} = \frac{h_j y_{\bar x,j}^{(\bar m)} - w_1^{(\bar m)j}(x_j, y^{(\bar m)})}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)} + \ell_1^{(m)j}(x_j, y^{(\bar m)})$$

і стала M не залежить від $|h|$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо оператор

$$A_h^{(\bar m)}(x,u) = B_h^{(\bar m)}u - \varphi^{(\bar m)}(x,u), \qquad B_h^{(\bar m)}u = -\left(a^{(\bar m)}u_{\bar x}\right)_{\hat x}.$$

З (17)–(19) випливає співвідношення

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,u) - A_h^{(\bar m)}(x,u), u-v\right)_{\hat\omega_h} = \left(a^{(\bar m)}(u_{\bar x} - v_{\bar x}), u_{\bar x} - v_{\bar x}\right)_{\hat\omega_h} -$$

$$-\left(\varphi^{(\bar m)}(x,u) - \varphi^{(\bar m)}(x,v), u-v\right)_{\hat\omega_h} = \left(A_h(x,u) - A_h(x,v), u-v\right)_{\hat\omega_h} + O(|h|^{\bar m}).$$

Тоді (згідно з нерівністю (14) з [3]) $\exists h_0 > 0$ таке, що $\forall \{h_j\}_{j=1}^{N} : |h| \le h_0$, маємо

$$0 < \tilde{c}_1 \le a^{(\bar{m})}(x),$$

$$\left(A_h^{(\bar{m})}(x,u) - A_h^{(\bar{m})}(x,u), u-v\right)_{\hat{\omega}_h} \ge c\| u-v \|^2_{B_h^{(\bar{m})}} \ge 8c\tilde{c}_1 \| u-v \|^2_{0,2,\hat{\omega}_h}, \tag{25}$$

де стала $c > 0$. Отже, $A_h^{(\bar{m})}(x,u)$, $|h| \le h_0$, − сильно монотонний оператор і при $|h| \le h_0$ ТРС (16) має єдиний розв'язок $y^{(\bar{m})}(x)$, $x \in \hat{\omega}_h$ (див. [7, с. 461]).

Для похибки $z(x) = y^{(\bar{m})}(x) - u(x)$, $x \in \hat{\omega}_h$, будемо мати задачу

$$\left[a^{(\bar{m})}(x) z_{\bar{x}}(x)\right]_{\hat{x}} + \varphi^{(\bar{m})}\left(x, y^{(\bar{m})}\right) - \varphi^{(\bar{m})}(x,u) =$$

$$= \varphi(x,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x,u) + \left[\left(a(x) - a^{(\bar{m})}(x)\right) u_{\bar{x}}(x)\right]_{\hat{x}}, \quad z(0) = z(1) = 0. \tag{26}$$

З (26) отримаємо

$$\left(A_h^{(\bar{m})}(x,u) - A_h^{(\bar{m})}(x, y^{(\bar{m})}), z\right)_{\hat{\omega}_h} =$$

$$= \left(\varphi^{(\bar{m})}(x,u) - \varphi(x,u), z\right)_{\hat{\omega}_h} + \left(\left(a^{(\bar{m})} - a\right) u_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}\right)_{\hat{\omega}_h}. \tag{27}$$

З урахуванням (25) справджується оцінка

$$\left(A_h^{(\bar{m})}(x,u) - A_h^{(\bar{m})}(x, y^{(\bar{m})}), z\right)_{\hat{\omega}_h} \ge c\| z \|^2_{B_h^{(\bar{m})}}. \tag{28}$$

За допомогою нерівності Коші − Буняковського, використовуючи (17)−(19), оцінимо праву частину рівності (27):

$$\left(\left(a - a^{(\bar{m})}\right) u_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}\right)_{\hat{\omega}_h} \le \left\| a^{(\bar{m})} - a \right\|_{0,2,\hat{\omega}_h} \| u_{\bar{x}} \|_{0,2,\hat{\omega}_h^+} \| z_{\bar{x}} \|_{0,2,\hat{\omega}_h^+} \le$$

$$\le M|h|^{\bar{m}} \| z_{\bar{x}} \|_{0,2,\hat{\omega}_h^+} \le \frac{M|h|^{\bar{m}}}{\tilde{c}_1} \| z \|_{B_h^{(\bar{m})}}, \tag{29}$$

$$\left(\varphi^{(\bar{m})}(x,u) - \varphi(x,u), z\right)_{\hat{\omega}_h} \le M|h|^{m+1} \| z_{\bar{x}} \|_{0,2,\hat{\omega}_h^+} \le \frac{M|h|^{m+1}}{\tilde{c}_1} \| z \|_{B_h^{(\bar{m})}}, \tag{30}$$

якщо m − непарне, і

$$\left(\varphi(x,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x,u), z\right)_{\hat{\omega}_h} \le M|h|^{m} \| z_{\bar{x}} \|_{0,2,\hat{\omega}_h^+} \le \frac{M|h|^{m}}{\tilde{c}_1} \| z \|_{B_h^{(\bar{m})}}, \tag{31}$$

якщо m − парне.

З оцінок (28)−(31) випливає, що $\| z \|_{B_h^{(\bar{m})}} \le M|h|^{\bar{m}}$. Звідси з огляду на еквівалентність норм $\|\cdot\|_{1,2,\hat{\omega}_h}$, $\|\cdot\|_{B_h^{(\bar{m})}}$ маємо $\| z \|_{1,2,\hat{\omega}_h} \le M|h|^{\bar{m}}$.

Оскільки з урахуванням співвідношень (13)−(15)

$$\left\| k\frac{dz}{dx} \right\|_{0,2,\hat{\omega}_h} \le \left\| \frac{1}{V_1^{(\bar{m})j}} - \frac{1}{V_1^{j}} \right\|_{0,2,\hat{\omega}_h} \left[|h| \cdot \| u_{\bar{x}} \|_{0,2,\hat{\omega}_h^+} + \left\| w_1^j(x,u) \right\|_{0,2,\hat{\omega}_h} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\left\| V_1^{(\bar{m})j} \right\|_{0,2,\hat{\omega}_h}} \left[|h| \cdot \left\| y_{\bar{x}}^{(\bar{m})} - u_{\bar{x}} \right\|_{0,2,\hat{\omega}_h^+} + \left\| w_1^j(x, y^{(\bar{m})}) - w_1^j(x,u) \right\|_{0,2,\hat{\omega}_h} + \right.$$

$$+\left\| w_1^{(\bar m)j}(x,y^{(\bar m)}) - w_1^j(x,y^{(\bar m)}) \right\|_{0,2,\hat\omega_h} \Bigg] + \left\| \ell_1^j(x,y^{(\bar m)}) - \ell_1^j(x,u) \right\|_{0,2,\hat\omega_h} +$$

$$+\left\| \ell_1^{(m)j}(x,y^{(\bar m)}) - \ell_1^j(x,y^{(\bar m)}) \right\|_{0,2,\hat\omega_h} \le M_1 |h|^{\bar m} + \left[\left\| \frac{\partial}{\partial u} \ell_1^j(x,u) \Big|_{u=\tilde u} \right\|_{0,2,\hat\omega_h} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left\| V_1^{(\bar m)j} \right\|_{0,2,\hat\omega_h}} \left\| \frac{\partial}{\partial u} w_1^j(x,u) \Big|_{u=\bar u} \right\|_{0,2,\hat\omega_h} \right] \cdot \| z \|_{0,2,\hat\omega_h} \le M |h|^{\bar m},$$

то отримаємо $\| z \|^*_{1,\infty,\hat\omega_h} \le M h^{\bar m}$. ◊

Для розв'язування нелінійної ТРС $\bar m$-го порядку точності (16) застосуємо ітераційний метод.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді*

$$| \varphi^{(\bar m)}(x,u) - \varphi^{(\bar m)}(x,v) | \le \tilde L | u - v |,$$

$\exists h_0 > 0$ *таке, що* $\forall \{h_j\}_{j=1}^N : |h| \le h_0$, $0 < \tilde c_1 \le a^{(\bar m)}(x)$, *ітераційний метод*

$$B_h^{(\bar m)} \frac{y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m,n-1)}}{\tau} + A_h^{(\bar m)}(x, y^{(\bar m,n-1)}) = 0, \qquad x \in \hat\omega_h, \tag{32}$$

$$y^{(\bar m,n)}(0) = \mu_1, \qquad y^{(\bar m,n)}(1) = \mu_2, \qquad n = 1,2,\dots,$$

$$y^{(\bar m,0)}(x) = \frac{V_2(x)}{V_1(1)} \mu_1 + \frac{V_1(x)}{V_1(1)} \mu_2,$$

$$B_h^{(\bar m)} y = -(a^{(\bar m)} y_{\bar x})_{\hat x}, \qquad A_h^{(\bar m)}(x,y) = B_h^{(\bar m)} y - \varphi^{(\bar m)}(x,y),$$

з $\tau = \tau_0 = \left(1 + \dfrac{\tilde L}{8 \tilde c_1} \right)^{-2}$ *збігається і для похибки виконується оцінка*

$$\left\| y^{(\bar m,n)} - u \right\|^*_{1,2,\hat\omega_h} \le M(h^{\bar m} + q^n), \qquad q = \sqrt{1 - \tau_0}, \tag{33}$$

де

$$k(x_j) \frac{dy^{(\bar m,n)}(x_j)}{dx} = \frac{h_j y^{(\bar m,n)}_{\bar x,j} - w_1^{(\bar m)j}(x_j, y^{(\bar m,n)})}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)} + \ell_1^{(m)j}(x_j, y^{(\bar m,n)})$$

і стала M *не залежить від* $|h|$, m, n.

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 1 маємо

$$\left\| y^{(\bar m,n)} - u \right\|^*_{1,2,\hat\omega_h} \le \left\| y^{(\bar m)} - u \right\|^*_{1,2,\hat\omega_h} + \left\| y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)} \right\|^*_{1,2,\hat\omega_h} \le$$

$$\le M h^{\bar m} + \left\| y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)} \right\|^*_{1,2,\hat\omega_h}. \tag{34}$$

Враховуючи, що $f(x,u) \in \bigcup\limits_{j=1}^{N} C^{m+1}([x_{j-1}, x_i] \times \mathbb{R}^1)$, отримаємо

$$| \varphi^{(\bar m)}(x,u) - \varphi^{(\bar m)}(x,v) | \le \tilde L | u - v |.$$

За допомогою нерівності Коші − Буняковського оцінимо величину

$$(A_h^{(\bar m)}(x,u) - A_h^{(\bar m)}(x,v), w)_{\hat\omega_h} \le \| u - v \|_{B_h^{(\bar m)}} \| w \|_{B_h^{(\bar m)}} +$$

$$+\left\|\varphi^{(\bar m)}(x,u)-\varphi^{(\bar m)}(x,v)\right\|_{0,2,\hat\omega_h}\|w\|_{0,2,\hat\omega_h} \le \|u-v\|_{B_h^{(\bar m)}}\|w\|_{B_h^{(\bar m)}} +$$

$$+\tilde L\|u-v\|_{0,2,\hat\omega_h}\|w\|_{0,2,\hat\omega_h} \le \|u-v\|_{B_h^{(\bar m)}}\|w\|_{B_h^{(\bar m)}} +$$

$$+\frac{\tilde L}{8}\|u_{\bar x}-v_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+}\|w_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+} \le \left(1+\frac{\tilde L}{8\tilde c_1}\right)\|u-v\|_{B_h^{(\bar m)}}\|w\|_{B_h^{(\bar m)}}.$$

Поклавши $w=\left(B_h^{(\bar m)}\right)^{-1}\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v)\right)$, отримаємо

$$\left\|\left(B_h^{(\bar m)}\right)^{-1}\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v)\right)\right\|_{B_h^{(\bar m)}} \le \left(1+\frac{\tilde L}{8\tilde c_1}\right)\|u-v\|_{B_h^{(\bar m)}}. \qquad (35)$$

З оцінок (25), (35) випливає

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v),\ \left(B_h^{(\bar m)}\right)^{-1}\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v)\right)\right)_{\hat\omega_h} \le$$

$$\le\left(1+\frac{\tilde L}{8\tilde c_1}\right)^2\|u-v\|^2_{B_h^{(\bar m)}} \le \left(1+\frac{\tilde L}{8\tilde c_1}\right)^2\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v),u-v\right)_{\hat\omega_h}.$$

Отже (див. [6, с. 502]), ітераційний метод (32) збігається в енергетичному просторі $H_{B_h^{(\bar m)}}$, який є еквівалентний простору $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\hat\omega_h)$ і для похибки справджується оцінка

$$\left\|y^{(\bar m,n)}-y^{(\bar m)}\right\|_{1,2,\hat\omega_h} \le M_1q^n.$$

Крім того,

$$\left\|k\frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx}-k\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right\|_{0,2,\hat\omega_h} \le$$

$$\le \frac{1}{\left\|V_1^{(\bar m)j}\right\|_{0,2,\hat\omega_h}}\Bigg[|h|\left\|y_{\bar x}^{(\bar m,n)}-y_{\bar x}^{(\bar m)}\right\|_{0,2,\hat\omega_h^+}+$$

$$+\left\|w_1^{(\bar m)j}(x,y^{(\bar m,n)})-w_1^{(\bar m)j}(x,y^{(\bar m)})\right\|_{0,2,\hat\omega_h}\Bigg]+$$

$$+\left\|\ell_1^{(\bar m)j}(x,y^{(\bar m,n)})-\ell_1^{(\bar m)j}(x,y^{(\bar m)})\right\|_{0,2,\hat\omega_h} \le M_1\left\|y_{\bar x}^{(\bar m,n)}-y_{\bar x}^{(\bar m)}\right\|_{0,2,\hat\omega_h^+}+$$

$$+\Bigg[\frac{1}{\left\|V_1^{(\bar m)j}\right\|_{0,2,\hat\omega_h}}\left\|\frac{\partial}{\partial u}w_1^{(\bar m)j}(x,u)\Big|_{u=\bar y^{(m)}}\right\|_{0,2,\hat\omega_h}+$$

$$+\left\|\frac{\partial}{\partial u}\ell_1^{(\bar m)j}(x,u)\Big|_{u=\tilde y^{(m)}}\right\|_{0,2,\hat\omega_h}\Bigg]\left\|y^{(\bar m,n)}-y^{(\bar m)}\right\|_{0,2,\hat\omega_h} \le$$

$$\le M\left\|y^{(\bar m,n)}-y^{(\bar m)}\right\|_{1,2,\hat\omega_h} \le M_2q^n.$$

Звідси отримаємо, що

$$\left\|y^{(\bar m,n)}-y^{(\bar m)}\right\|^*_{1,2,\hat\omega_h} \le Mq^n. \qquad (36)$$

З нерівностей (34), (36) випливає оцінка (33). ◊

Отже, у роботі побудовано та обґрунтовано ТРС на нерівномірній сітці $\bar{m}$-го порядку точності як відносно функції $u(x)$, так і відносно потоку $k\dfrac{du}{dx}$ за слабших умов (2)–(5), ніж у [1]. Надалі важливо узагальнити отримані результати на випадок крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь з монотонним оператором.

1. *Кутнив М. В.* Точные трехточечные разностные схемы для монотонных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2001. – **41**, № 6. – С. 909–921.
2. *Кутнив М. В., Макаров В. Л., Самарский А. А.* Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и их реализация // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1999. – **39**, № 1. – С. 45–60.
3. *Кутнів М. В.* Точні триточкові різницеві схеми на нерівномірній сітці для монотонних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Мат. методи та фіз.-мех поля. – 2003. – **46**, № 2. – С. 42–50.
4. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
5. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Докл. АН СССР. – 1990. – **312**, № 4. – С. 795–800.
6. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
7. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
8. *Iyengar S. R. K., Pillai A. C. R.* Difference schemes of polynomial and exponential orders // Appl. Math. Model. – 1989. – **13**, No. 1. – P. 58–62.

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ МОНОТОННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для нелинейных монотонных краевых задач построены трехточечные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерной сетке. Доказаны существование и единственность решения трехточечных разностных схем, получена оценка точности, а также исследована сходимость метода простой итерации для их решения.

MODIFIED THREE-POINT DIFFERENCE SCHEMES OF HIGH ACCURACY ORDER FOR THE SECOND-ORDER MONOTONE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

For nonlinear monotone boundary-value problems the three-point difference schemes of high accuracy order on irregular grids are constructed. The existence and uniqueness of solution of three-point difference schemes are proved and estimation of its accuracy is determined. The analysis of convergence of the method of simple iteration for their solution is given.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
21.05.03