УДК 517.956.4

Г. П. Малицька

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ ІНТЕГРАЛА ПУАССОНА УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується стабілізація інтеграла Пуассона для рівнянь Колмогорова, що мають три групи змінних, за якими є виродження парабалічності.

Ультрапараболічні рівняння, що мають довільну скінченну кількість груп змінних, за якими є виродження параболічності, введені в [3, 4] і для них побудовано фундаментальний розв'язок (ф. р.) задачі Коші. З використанням властивостей ф. р. встановлено достатні та необхідні умови точкової і рівномірної стабілізації інтеграла Пуассона для цих рівнянь. Зокрема, розглянуто випадки, коли початкова функція має граничне середнє по областях, які визначаються лініями рівня ф. р. задачі Коші. У випадку рівняння високого порядку початкова функція має граничне середнє по паралелепіпедах. Одержані результати узагальнюють результати робіт [1, 2] і можуть бути застосовані в теорії стохастичних процесів. Ці результати можна узагальнити на випадок рівнянь із змінними коефіцієнтами в параболічній частині.

Введемо позначення: n – деяке фіксоване натуральне число; m_1, m_2, m_3 – фіксовані цілі невід'ємні числа; $n \ge m_1 \ge m_2 \ge m_3$; $N = n + \sum_{j=1}^{3} m_j$; $X = (x, y_1, y_2, y_3)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y_j \in \mathbb{R}^{m_j}$, $j = 1,2,3$; $y_j = (y_{j,1}, y_{j,2}, \ldots, y_{j,m_j})$, $N_1 = n + \sum_{j=1}^{3} (2j+1) m_j$, $x^{(j)} = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_j})$, $y_j^{(s)} = (y_{j,1}, y_{j,2}, \ldots, y_{j,m_s})$, $j < s$, $X \in \mathbb{R}^{N_1}$; аналогічно $\Xi = (\zeta, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$, $\eta_j \in \mathbb{R}^{m_j}$, $j = 1,2,3$; $(x^{(1)}, D_{y_1}) = \sum_{j=1}^{m_1} x_i D_{y_{1j}}$, $(y_{s-1}^{(s)}, D_{y_s}) = \sum_{j=1}^{m_s} y_{s-1} D_{y_{sj}}$, $s = 2,3$, $\Delta_x = \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2$.

Розглянемо задачу Коші

$$\left(D_t - (x^{(1)}, D_{y_1}) - (y_1^{(2)}, D_{y_2}) - (y_2^{(3)}, D_{y_3}) - a\Delta_x\right) u(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$u(t,X)\big|_{t=\tau} = u_0(X), \quad X \in \mathbb{R}^N, \quad t > \tau \ge 0, \quad a > 0, \tag{2}$$

де $u_0(X)$ – вимірна, обмежена функція в $\mathbb{R}^N$.

Ф. р. задачі (1), (2) має вигляд [4]

$$Z(t,X;\tau,\Xi) = \\ = 12^{m_1/2} 720^{m_2/2} 25200^{m_3/2} (4\pi a)^{-N/2} (t-\tau)^{-N_1/2} \exp\left\{-\frac{\rho(t,X;\tau,\Xi)}{a}\right\},$$

де

$$\rho(t,X;\tau,\Xi) = \\ = |x-\zeta|^2 (t-\tau)^{-1} + 3(t-\tau)^{-3} \left| y_1 - \eta_1 + (x^{(1)} + \zeta^{(1)}) 2^{-1} (t-\tau) \right|^2 + \\ + 180(t-\tau)^{-5} \left| y_2 - \eta_2 + (y_1^{(2)} + \eta_1^{(2)}) 2^{-1}(t-\tau) + (x^{(2)} - \zeta^{(2)}) 12^{-1} (t-\tau)^2 \right|^2 + \\ + 630(t-\tau)^{-7} \Big| y_3 - \eta_3 + (y_2^{(3)} + \eta_2^{(3)}) 2^{-1}(t-\tau) + (y_1^{(3)} - \eta_1^{(3)}) 10^{-1}(t-\tau)^2 + \\ + (x^{(3)} + \zeta^{(3)}) 120^{-1} (t-\tau)^3 \Big|^2,$$

$\rho(t,X;0,\Xi)=r^2$ − сім'я поверхонь рівня ф. р. задачі (1), (2).

Через $F_{r,t}^{X_0}$ позначимо тіло, обмежене еліпсоїдом

$$\rho(t,X_0;0,\Xi)=r^2, \tag{3}$$

де Ξ − змінна точка; через v_N − об'єм тіла, обмеженого поверхнею

$$|\zeta|^2+\left|\eta_1-\sqrt{3}\,\zeta^{(1)}\right|^2+\left|\eta_2-\sqrt{15}\,\eta_1^{(2)}-\sqrt{5}\,\zeta^{(2)}\right|^2+$$

$$+\left|\eta_3-2^{-1}\sqrt{35}\,\eta_2^{(3)}+\sqrt{21}\,\eta_1^{(3)}+2^{-1}\sqrt{7}\,\zeta^{(3)}\right|^2=1\,.$$

Нехай $M_t^X(r)$ − середнє по тілах $F_{r,t}^X$, обмежених поверхнями (3).

Означення 1. Функція $u_0(X)$ має *граничне середнє* $M^X(r)$ по тілах $F_{r,t}^X$, якщо існує $\lim\limits_{t\to\infty} M_t^X(r)=M^X(r)$.

Точкова стабілізація інтеграла Пуассона задачі Коші (1), (2).

Теорема 1. *Якщо* $u_0(X)$ *має граничне середнє по еліпсоїдах* $F_{r,t}^X$, *яке майже при всіх* r *дорівнює* $M^X(r)$, *то інтеграл Пуассона рівняння* (1) *стабілізується* (*прямує при* $t\to\infty$) *до числа*

$$\ell=(2\pi a)^{-N/2}v_N\int\limits_0^{+\infty} r^{N+1}e^{-r^2}M^X(r)\,dr\,.$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо інтеграл Пуассона для рівняння (1)

$$u(t,X)=\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;0,\Xi)\,d\Xi\,. \tag{4}$$

Введемо заміну змінних інтегрування

$$x-\zeta=-2\sqrt{at}\,\alpha, \qquad y_1-\eta_1+x^{(1)}t=-\sqrt{t^3a}\;\beta_1/\sqrt{3}\,,$$

$$y_2-\eta_2+y_1^{(2)}t+x^{(2)}\,t^2/2=-\sqrt{t^5a}\;\beta_2/6\sqrt{5}\,,$$

$$y_3-\eta_3+y_1^{(3)}\,t/2+y_2^{(3)}t^2+x^{(3)}\,t^3/6=-\sqrt{t^7a}\;\beta_3/30\sqrt{7}\,.$$

Тоді (4) набуде вигляду

$$u(t,X)=\pi^{-N/2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\exp\Big\{-|\alpha|^2-\left|\beta_1-\sqrt{3}\,\alpha^{(1)}\right|^2-$$

$$-\left|\beta_2-\sqrt{15}\,\beta_1^{(2)}-\sqrt{5}\,\alpha^{(2)}\right|^2-\left|\beta_3-\sqrt{35}\,\beta_2^{(3)}/2+\sqrt{21}\,\beta_1^{(3)}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{7}\,\alpha^{(3)}/2\right|^2\Big\}\,u_0(t,x+2\sqrt{at}\,\alpha,\;y_1+x^{(1)}t+\sqrt{at^3}\;\beta_1/\sqrt{3}\,,$$

$$y_2+y_1^{(2)}t+x^{(2)}t^2/2+\sqrt{at^5}\beta_2/6\sqrt{5},y_3+y_1^{(3)}t/2+$$

$$+y_2^{(3)}t^2+x^{(3)}t^3/6+\sqrt{at^7}\;\beta_3/30\sqrt{7})\,dE\,,$$

$$E=(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \qquad E\in\mathbb{R}^N\,. \tag{5}$$

Розглянемо додатно визначену квадратичну форму

$$|\alpha|^2+\left|\beta_1-\sqrt{3}\,\alpha^{(1)}\right|^2+\left|\beta_2-\sqrt{15}\,\beta_1^{(2)}-\sqrt{5}\,\alpha^{(2)}\right|^2+\left|\beta_3-\sqrt{35}\,\beta_2^{(3)}/2+\right.$$

$$\left.+\sqrt{21}\,\beta_1^{(3)}+\sqrt{7}\,\alpha^{(3)}/2\right|^2=\sum_{(i,j,k,s)}C_{ijks}\alpha^i\,\beta_1^j\,\beta_2^k\,\beta_3^s\,, \tag{6}$$

де $(i,j,k,s) = |i| + |j| + |k| + |s| = 2$, і відповідну до (6) сім'ю еліпсоїдів, що не перетинаються:

$$\sum_{(i,j,k,s)} C_{ijks} \alpha^i \beta_1^j \beta_2^k \beta_3^s = r^2 .$$

В інтегралі (5) перейдемо до нових змінних інтегрування

$$\alpha_1 = r\Phi(\Psi)\cos\Psi_1 ,$$

$$\alpha_2 = r\Phi(\Psi)\sin\Psi_1 \cos\Psi_2 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\alpha_{3m_3} = r\,\Phi(\Psi)\sin\Psi_1 \sin\Psi_2 \ \ldots \ \cos\Psi_{N-1} , \tag{7}$$

де $\Psi = (\Psi_1 \ldots \Psi_{N-1})$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \Psi_j \le \pi$, $j = 1,\ldots,N-2$, $0 \le \Psi_{N-1} \le 2\pi$, функція $\Phi(\Psi)$ визначається рівністю

$$\Phi^2(\Psi) \sum_{(i,j,k,s)} C_{ijks} \alpha'^i \beta_1'^j \beta_2'^k \beta_3'^s = 1$$

з $\alpha_1' = \cos\Psi_1$, $\alpha_2' = \sin\Psi_1 \cos\Psi_2, \ldots$, $\beta_{3m_3}' = \sin\Psi_1 \sin\Psi_2 \ldots \sin\Psi_{N-1}$. Якобіан перетворення (7) $J = r^{N-1} J_1$, де $J_1 = \Phi^N(\Psi)\sin^{N-2}\Psi_1 \sin^{N-3}\Psi_2 \ldots \sin\Psi_{N-1}$.

Позначимо

$$u_0(t,r,\Psi,X) = u_0\big(2r\sqrt{ta}\,\Phi(\Psi)\cos\Psi_1 + x_1, \ldots ,$$

$$r\sqrt{at^3}\,(30\sqrt{7})^{-1}\Phi(\Psi)\sin\Psi_1 \ldots \cos\Psi_{n+1} + y_{11} + x_1 t, \ldots ,$$

$$r\sqrt{at^5}\,(6\sqrt{5})^{-1}\Phi(\Psi)\sin\Psi_1 \ldots \cos\Psi_{n+m_1+1} + y_{21} + y_{11}t + 2^{-1}x_1 t^2, \ldots ,$$

$$r\sqrt{at^7}\,(30\sqrt{7})^{-1}\Phi(\Psi)\sin\Psi_1 \ldots \sin\Psi_{N-1} +$$

$$+ y_{3m_3} + y_{2m_3}t + 2^{-1}y_{1m_3}t^2 + 6^{-1}x_{m_3}t^3\big) .$$

Тоді

$$u(t,X) = \pi^{-N/2} \int_0^{+\infty} r^{N-1} e^{-r^2}\, dr \int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)\, J_1\, d\Psi =$$

$$= \pi^{-N/2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r \rho^{N-1}\, d\rho \int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)\, J_1\, d\Psi\, dr =$$

$$= 2\pi^{-N/2} \int_0^{+\infty} r\, e^{-r^2} \int_0^r \rho^{N-1}\, d\rho \int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)\, J_1\, d\Psi\, dr ,$$

де Σ_1 – одинична сфера в $\mathbb{R}^N$. Виділимо $M_t^X(r)$:

$$u(t,X) =$$

$$= 2\pi^{-N/2} v_N \int_0^{+\infty} r^{N+1} e^{-r^2} (r^N v_N)^{-1} \int_0^r \rho^{N-1}\, d\rho \int_{\Sigma_1} u_0(t,r,\Psi,X)\, J_1\, d\Psi\, dr =$$

$$= 2\pi^{-N/2} v_N \int_0^{+\infty} r^{N+1} e^{-r^2} M_t^X(r)\, dr . \tag{8}$$

Залишилось здійснити граничний перехід під знаком інтеграла (8) при $t \to \infty$. Це можна зробити на основі теореми Лебега, оскільки існує граничне середнє, а з обмеженості $u_0(X)$ безпосередньо випливає рівномірна (за t) обмеженість $M_t^X(r)$.

Зауважимо, що достатньо вимагати граничного середнього в деякій фіксованій точці X_1, звідки вже випливає існування граничного середнього в будь-якій точці X і факт стабілізації на кожному компакті.

Теорема 2. *Якщо* $u_0(X) \ge 0$, *то для стабілізації інтеграла Пуассона* (4) *до нуля необхідно й достатньо, щоб* $u_0(X)$ *мала граничне середнє* $M^X(r)$, *яке майже скрізь дорівнює нулеві.*

Д о в е д е н н я. *Достатність* випливає із теореми 1. Покажемо, що зі стабілізації інтеграла (4) до 0 випливає існування нульового граничного середнього по $F_{r,t}^X$:

$$M_t^X(r) = \frac{1}{\operatorname{mes} F_{r,t}^X} \int\limits_{F_{r,t}^X} u_0(\Xi)\, d\Xi \le$$

$$\le ct^{-N_1/6} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{ -\rho(t^{1/3}, X, 0, \Xi) \right\} u_0(\Xi)\, d\Xi = c_1 u(t^{1/3}, X). \quad (9)$$

У нерівності (9) $\operatorname{mes} F_{r,t}^X$ замінено об'ємом куба зі стороною $t^{1/6}$, який міститься в $F_{r,t}^X$. Оскільки $u(t,X) \to 0$ при $t \to \infty$, то з (9) випливає, що $M_{r,t}^X \to 0$ при $t \to \infty$ для будь-якого r. ◊

Рівномірна стабілізація інтеграла Пуассона. Розглянемо задачу Коші для рівняння порядку $2b$ за змінними x:

$$\left(D_t - (x^{(1)}, D_{y_1}) - (y_1^{(2)}, D_{y_2}) - (y_2^{(3)}, D_{y_3}) - \sum_{|k|=2b} a_k D_x^k \right) u = 0\,, \qquad (10)$$

де $D_t - \sum\limits_{|k|=2b} a_k D_x^k$ – параболічний за Петровським оператор зі сталими коефіцієнтами, $0 < b_1 \le b$.

Ф. р. задачі Коші (10), (2) задовольняє нерівності [4]

$$\left| D_{y_1}^i D_{y_2}^j D_{y_3}^s D_x^k\, Z(t, X; \tau, \Xi) \right| \le C(t-\tau)^{-N_2/(2b)} \exp\left\{ -\rho_1(t, X; \tau, \Xi) \right\}, \quad (11)$$

де

$$N_2 = |k| + n + (2b+1)(m_1 + |i|) + (4b+1)(m_2 + |j|) + (6b+1)(m_3 + |s|),$$

$$\rho_1(t, X; \tau, \Xi) = \left(|x - \zeta| (t-\tau)^{-1/(2b)} \right)^q + \left(\left| y_1 - \eta_1 + x^{(1)} \right| (t-\tau)^{-(2b+1)/(2b)} \right)^q +$$

$$+ \left(\left| y_2 - \eta_2 + y_1^{(2)}(t-\tau) + \frac{x^{(2)}(t-\tau)^2}{2} \right| (t-\tau)^{-(4b+1)/(2b)} \right)^q +$$

$$+ \left(\left| y_3 - \eta_3 + y_2^{(3)}(t-\tau) + \frac{y_1^{(3)}(t-\tau)^2}{2} + \frac{x^{(3)}(t-\tau)^3}{6} \right| (t-\tau)^{-(6b+1)/(2b)} \right)^q,$$

$$q = 2b/(2b-1).$$

Нехай $u_0(X)$ має граничне середнє

$$\lim_{\substack{b_1\to\infty,\\ \dots,\\ b_N\to\infty}} \frac{1}{2^{2N}\prod\limits_{s=1}^{N} b_s} \int\limits_{-b_1}^{b_1} \dots \int\limits_{-b_N}^{b_N} u_0(\Xi)\, d\Xi = \ell , \tag{12}$$

де $b_j \to \infty$ незалежно одне від одного, $j = 1, 2, \dots, N$.

Теорема 3. *Для того щоб інтеграл Пуассона рівняння* (10) *рівномірно стабілізувався до* ℓ *при* $t \to \infty$, *необхідно й достатньо, щоб* $u_0(X)$ *мала граничне середнє, яке дорівнює* ℓ.

Д о в е д е н н я. Нехай $u_0(X)$ має рівномірне граничне середнє, що дорівнює 0. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $b_0(\varepsilon)$ таке, що при всіх $b_j > b_0(\varepsilon)$ і при будь-якому X виконується

$$\left| \frac{1}{2^{2N}\prod\limits_{s=1}^{N} b_s} \int\limits_{-b_1+x_{11}}^{b_1+x_{11}} \dots \int\limits_{-b_N+y_{3m_3}}^{b_N+y_{3m_3}} u_0(\Xi) d\Xi \right| = 0 .$$

Звідси випливає, що $u_0(X)$ має кутові граничні середні, що дорівнюють 0.

Виконавши в інтегралі Пуассона заміну змінних

$$x - \zeta = -\,\zeta'\, t^{1/(2b)}, \qquad y_1 - \eta_1 + x^{(1)}\, t = -\,\eta_1'\, t^{(2b+1)/(2b)},$$

$$y_2 - \eta_2 + y_1^{(2)} t + \frac{x^{(2)} t^2}{2} = -\,\eta_2'\, t^{(4b+1)/\,2b},$$

$$y_3 - \eta_3 + y_2^{(3)}\, t + \frac{y_1^{(3)}\, t^2}{2} + \frac{x^{(3)}\, t^3}{6} = -\,\eta_3'\, t^{(6b+1)/(2b)},$$

одержимо

$$u(t,X) = t^{N_3/(2b)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z^*(t,X;0,\Xi')\, u_0\Big(x + \zeta'\, t^{1/(2b)},$$

$$y_1 + x^{(1)} t + \eta_1' t^{(2b+1)/(2b)}, \quad y_2 + y_1^{(2)} t + \frac{x^{(2)} t^2}{2} + \eta_2' t^{(4b+1)/(2b)},$$

$$y_3 + y_2^{(3)} t + \frac{y_1^{(3)} t^2}{2} + \frac{x^{(3)} t^3}{6} + \eta_3' t^{(6b+1)/(2b)} \Big) d\Xi',$$

де $Z^*(t,X;0,\Xi')$ − ф. р. задачі Коші (10), (2) у нових змінних,

$$N_3 = n + (2b+1)m_1 + (4b+1)m_2 + (6b+1)m_3,$$

або інакше

$$u(t,X) = t^{N_3/(2b)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z^*(t,X;0,\Xi')\, \frac{\partial^N}{\partial\zeta_1 \dots \partial\eta_{3m_3}} \int\limits_0^{\zeta_1} \dots \int\limits_0^{\eta_{3m_3}} u_0\Big(x + \zeta' t^{1/(2b)},$$

$$y_1 + x^{(1)} t + \eta_1' t^{(2b+1)/(2b)}, \; y_2 + y_1^{(2)} t + \frac{x^{(2)} t^2}{2} + \eta_2' t^{(4b+1)/(2b)},$$

$$y_3 + y_2^{(3)} t + \frac{y_1^{(3)} t^2}{2} + \frac{x^{(3)} t^3}{6} + \eta_3' t^{(6b+1)/(2b)} \Big) d\Xi'\, d\Xi .$$

Проінтегрувавши частинами, матимемо

$$u(t,X)=(-1)^N t^{N_3/(2b)}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial^N Z^*(t,X;0,\Xi')}{\partial\zeta_1\dots\partial\eta_{3m_3}}\int\limits_0^{\zeta_1}\dots\int\limits_0^{\eta_{3m_3}} u_0\Bigg(x+\zeta' t^{1/(2b)},\dots,$$

$$y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+\frac{1}{6}x_{m_3}t^3-\eta'_{3m_3}t^{(6b+1)/(2b)}\Bigg)d\Xi'\,d\Xi=$$

$$=I_1+I_2+I_3\,, \qquad (13)$$

де I_1 – інтеграл по області, для якої виконується хоч одна із нерівностей

$$|\zeta_s|>B_s,\quad |\eta_{ij}|>B_{ij},\quad s=1,2,\dots,n,\quad i=1,2,3,\quad j=1,2,\dots,m_i\,;$$

I_2 – інтеграл по області $\{0<h_s\le|\zeta_s|\le B_s,\ \ 0<h_{ij}\le|\eta_{ij}|\le B_{ij}\}$;

I_3 – інтеграл по області $\{|\zeta_s|\le h_s,\ \ |\eta_{ij}|\le h_{ij}\}$.

Оскільки

$$\left|\frac{\partial^N Z^*(t,X;0,\Xi)}{\partial\zeta_1\dots\partial\eta_{3m_3}}\right|\le C_N t^{-N_3/(2b)}\exp\{-c|\Xi|^q\}, \qquad (14)$$

то з оцінки (14) випливає, що можна вибрати великі B_s, B_{ij} і достатньо малі h_s, h_{ij}, залежні тільки від ε, що для всіх X і t виконується

$$|I_1|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad |I_3|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Перейдемо до оцінки I_2. Позначимо

$$g_t(\Xi)=\int\limits_0^{\zeta_1}\dots\int\limits_0^{\eta_{3m_3}} u_0\Bigg(x+\zeta' t^{1/(2b)},\dots,$$

$$y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\eta'_3 t^{(6b+1)/(2b)}\Bigg)d\Xi\,.$$

Зробивши заміну змінних

$$x+\zeta' t^{1/(2b)}=a,\qquad y_1+x^{(1)}+t'\eta_1\,t^{(2b+1)/(2b)}=\alpha_1\,,$$

$$y_2+y_1^{(2)}\,t+\frac{x^{(2)}\,t^2}{2}+\eta'_2 t^{(4b+1)/(2b)}=\alpha_2\,,$$

$$y_3+y_2^{(3)}\,t+\frac{y_1^{(3)}\,t^2}{2}+\frac{x^{(3)}\,t^3}{6}+\eta'_3 t^{(6b+1)/(2b)}=\alpha_3\,,$$

$g_t(\Xi)$ запишемо у вигляді

$$g_t(\Xi)=t^{N_3/(2b)}\int\limits_{x_{11}}^{x_{11}+\zeta_{11}t^{1/(2b)}}\ \int\limits_{y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+x_{m_3}\frac{t^3}{6}}^{y_{3m_3}+y_{2m_3}t+y_{1m_3}\frac{t^2}{2}+x_{m_3}\frac{t^3}{6}+\eta_{3m_3}t^{(6b+1)/(2b)}} u_0(A)\,dA\,.$$

Оскільки $u_0(X)$ має кутові граничні середні, то для будь-яких X, $|X|\le K$, $t>N_0$, $|g_t(\Xi)|(\zeta_{11}\dots\eta_{3m_3})^{-1}<\delta$ виберемо

$$\delta=C_N^{-1}\,\frac{\varepsilon}{3}\left(\prod_{s=1}^{N}B_s\cdot\prod_{i,j}B_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\exp\{-c_0\,|A|^q\}\,dA\right)^{-1},$$

тому $|I_2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, а $|u(t,X)|<\varepsilon$.

Необхідність. Доведення від супротивного. Нехай

$$u(t,X)=\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;0,\Xi)\,d\Xi \to 0, \qquad t\to\infty,$$

рівномірно по X, а початкова функція $u_0(X)$ не має рівномірного граничного середнього (12), де $\ell=0$. Це означає, що знайдеться таке $\varepsilon_0>0$, що для будь-якого додатного n_0 знайдеться $\mathcal{B}>n_0$ і така точка $\mathcal{M}$, що

$$|S(\mathcal{B},\mathcal{M})|=\left|\frac{1}{2\mathcal{B}^N}\int\limits_{V_{\mathcal{B}}^{\mathcal{M}}} u_0(\Xi)\,d\Xi\right|\ge\varepsilon_0,$$

де $V_{\mathcal{B}}^{\mathcal{M}}$ – куб зі стороною $\mathcal{B}$ і центром у точці $\mathcal{M}$.

Оскільки ф. р. $Z(t,X;0,0)$ можна записати як

$$Z(t,X;0,0)=t^{-N_3/(2b)}Z_1\Bigg(xt^{-1/(2b)},\ (y_1+x^{(1)}t)t^{-(2b+1)/(2b)},$$
$$\left(y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}\right)t^{-(4b+1)/(2b)},$$
$$\left(y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}\right)t^{-(6b+1)/(2b)}\Bigg),$$

де Z_1 – ціла функція вказаних аргументів при $t>0$, і

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(t,X;0,0)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z_1(A)\,dA=1,$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z_1(A)\,dA=\int\limits_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)\,dA+\int\limits_{\mathbb{R}^N-V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)\,dA,$$

$V_{\mathcal{B}^*}$ – куб зі стороною $\mathcal{B}^*$, що

$$\int\limits_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)\,dA<\frac{\varepsilon_0}{4}, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^N-V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)\,dA\ge 1-\frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Після відповідної заміни змінних інтеграл Пуассона запишемо у такому вигляді:

$$u(t,X)=\int\limits_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)\,u_0\Bigg(x+\alpha t^{1/(2b)}, y_1+x^{(1)}t+\beta_1 t^{(2b+1)/(2b)},$$
$$y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}+\beta_2 t^{(4b+1)/(2b)}, y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+$$
$$+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\beta_3 t^{(6b+1)/(2b)}\Bigg)dA+\int\limits_{\mathbb{R}^N-V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)\,u_0\Bigg(x+\alpha t^{1/(2b)},$$
$$y_1+x^{(1)}t+\beta_1 t^{(2b+1)/(2b)}, y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}+\beta_2 t^{(4b+1)/(2b)},$$
$$y_3+y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t^2}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\beta_3 t^{(6b+1)/(2b)}\Bigg)dA=I_1+I_2.$$

Для простоти будемо вважати, що $|u_0(X)|\le 1$, $\mathcal{B}^*$ вибрано так, що $|I_1|\le\frac{\varepsilon}{4}$.

Виберемо послідовність $n_0^{(k)} \to \infty$, за нею знайдемо послідовність $\mathcal{B}_{(k)} \to \infty$ і $\mathcal{M}_{i(k)}$ такі, що $S(\mathcal{B}_{i(k)}, \mathcal{M}_{i(k)}) \ge \varepsilon_0$, та означимо послідовність $t_{i(k)} = \left(\frac{\varepsilon_0}{8N\mathcal{B}^*}, \mathcal{B}_{i(k)} \right)^{2b}$.

Розглянемо

$$\left| \frac{1}{(2\mathcal{B}_{i(k)})^N} \int\limits_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} u(t_{i(k)}, X)\, dX \right| = \int\limits_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)\, dA\, S(\mathcal{B}_{i(k)}, \mathcal{M}_{i(k)}) -$$

$$- \int\limits_{V_{\mathcal{B}^*}} Z_1(A)\, dA \left| \frac{1}{(2\mathcal{B}_{i(k)})^N} \left[\int\limits_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} u_0 \Bigg(x + \alpha t^{1/(2b)},\right.\right.$$

$$y_1 + x^{(1)} t + \beta_1 t^{(2b+1)/(2b)}, y_2 + y_1^{(2)} t + \frac{x^{(2)} t^2}{2} + \beta_2 t^{(4b+1)/(2b)},$$

$$\left.\left. y_3 + y_2^{(3)} t + \frac{y_1^{(3)} t^2}{2} + \frac{x^{(3)} t^3}{6} + \beta_3 t^{(6b+1)/(2b)} \Bigg) dX - \int\limits_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} u_0(X)\, dX \right] \right| -$$

$$- \frac{1}{(2\mathcal{B}_{i(k)})^N} \int\limits_{V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}} |I_2|\, dX \ge \frac{\varepsilon_0}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{4} \right) - \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4} \ge \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Із цієї нерівності випливає, що в кожному кубі $V_{\mathcal{B}_{i(k)}}^{\mathcal{M}_{i(k)}}$ є хоч одна точка $X_{(k)}$, у якій $u(t_{(k)}, X_{(k)}) \ge \frac{\varepsilon_0}{4}$, а $t_{(k)} \to \infty$, що суперечить рівномірній збіжності.

Зауваження. При $n = n_1$, $n_2 = n_3 = 0$ одержимо результати робіт [1, 2].

1. *Малицкая А. П., Репников В. Д., Эйдельман С. Д.* О стабилизации решений задачи Коши для уравнения диффузии с инерцией // Тр. науч.-исслед. ин-та математики ВГУ. – Воронеж, 1972. – Вып. 5. – С. 86–92.
2. *Малицкая А. П., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1976. – **11**. – С. 1316–1330.
3. *Малицька Г. П.* Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії із змінною інерцією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 3. – С. 56–60.
4. *Малицька Г. П.* Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 411. – С. 221–228.

О СТАБИЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется стабилизация интеграла Пуассона для уравнений Колмогорова, имеющих три группы переменных вырождения параболичности.

ON STABILIZATION OF POISSON'S INTEGRAL FOR ULTRAPARABOLIC EQUATIONS

In this paper we consider the stabilization of Poisson's integral for Kolmogorow equations that have three groups of variables with degeneration of parabolic equations.

Прикарпат. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
01.11.02