УДК 517.95+511.2

М. М. Симотюк, О. М. Медвідь

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджено коректність задачі з інтегральними умовами для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими комплексними коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

Задачі з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними вивчались у різних аспектах в роботах [1, 5, 9–11, 14]. Зокрема, в [1, 9–11] встановлено класи коректності задач з інтегральними умовами (з різними ваговими функціями під знаком інтеграла) за часовою змінною та умовами росту на нескінченності за іншими координатами для еволюційних систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами. У [5, § 7.4; 14, § 2.3] встановлено, що для гіперболічних рівнянь розв'язність задач з інтегральними умовами в класах функцій, майже періодичних за просторовими змінними, пов'язана із проблемою малих знаменників, при цьому доведено коректність таких задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компоненти яких складені з коефіцієнтів рівняння та параметрів області.

У пропонованій роботі встановлено умови існування єдиного розв'язку задачі з інтегральними умовами за виділеною змінною t та умовами періодичності за $x_1,\ldots,x_p$ для лінійних рівнянь із частинними похідними (без обмежень на тип) другого порядку за змінною t. У роботі посилено результати праць [5, § 7.4; 14, § 2.3] у тому плані, що встановлено коректність задачі *для довільних коефіцієнтів* рівняння і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_1 \in (0,T]$, які є значеннями верхньої межі інтегрування в інтегральних умовах. У роботі розроблено новий метод доведення метричних теорем про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі, відмінний від описаного в [5, 14]. Цей метод базується на встановленій у [6] лемі про оцінки мір множин, на яких є обмеженим модуль розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. В останньому пункті роботи виділено клас рівнянь, для яких відсутня проблема малих знаменників при дослідженні задачі з інтегральними умовами. Основні результати роботи анонсовано в [4].

1. Використовуємо такі позначення: $\operatorname{mes} A$ – міра Лебега в $\mathbb{R}$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}$; Ω_p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $Q_p = (0,T)\times\Omega_p$; $x = (x_1,\ldots,x_p) \in \Omega_p$, $k = (k_1,\ldots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$; $D = (-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$; $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta \ge 0$, $\gamma > 0$, – простір функцій, отриманий в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik,x)$ за нормою

$$\left\| \varphi(x); W^{\gamma}_{\alpha,\beta} \right\| = \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} |\varphi_k|^2 (1+|k|)^{2\alpha} \exp(2\beta|k|^{\gamma})}\,;$$

$C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ – простір функцій $u(t,x)$ таких, що при фіксованому $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j$, $0 \le j \le n$, належать до простору $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$. Норму в просторі

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2003. – 46, № 4. – С. 92-101.

$C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ задаємо формулою

$$\left\| u(t,x); C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta}) \right\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j};\ W^{\gamma}_{\alpha,\beta} \right\|.$$

2. Розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) u(t,x) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + A_1(D)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + A_2(D)u(t,x) = 0, \quad (t,x)\in Q_p, \tag{1}$$

$$\int_0^{t_1} u(t,x)\,dt = \varphi_1(x), \quad \int_0^{t_1} t u(t,x)\,dt = \varphi_2(x), \quad 0 < t_1 \le T, \quad x\in\Omega_p, \tag{2}$$

де $A_j(\xi_1,\ldots,\xi_p) = \sum_{|s|\le N_j} A_{js}\xi_1^{s_1}\ldots\xi_p^{s_p}$, $A_{js}\in\mathbb{C}$, $s=(s_1,\ldots,s_p)$, $N_j\in\mathbb{N}$, $j=1,2$.

Якщо рівняння (1) описує деякий процес, а t − часова змінна, то задача (1), (2) полягає у знаходженні цього процесу, коли відомі його «усереднені» значення (2) на деякому проміжку часу $[0,t_1]\subset[0,T]$.

3. Розв’язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t)\exp(ik,x). \tag{3}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є розв’язком такої задачі:

$$\frac{d^2u_k(t)}{dt^2} + A_1(k)\frac{du_k(t)}{dt} + A_2(k)u_k(t) = 0, \tag{4}$$

$$\int_0^{t_1} u_k(t)\,dt = \varphi_{1,k}, \quad \int_0^{t_1} t u_k(t)\,dt = \varphi_{2,k}, \quad 0 < t_1 \le T, \tag{5}$$

де $\varphi_{1,k}$, $\varphi_{2,k}$, $k\in\mathbb{Z}^p$, − коефіцієнти Фур’є функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ відповідно.

Нехай $\{f_1(t,k), f_2(t,k)\}$ − така фундаментальна система розв’язків рівняння (4), що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{j,q}$, j, $q=1,2$, де $\delta_{j,q}$ − символ Кронекера; $G_k(t,\tau)$ − функція, означена в квадраті $\{(t,\tau)\in\mathbb{R}^2 : 0\le t\le T,\ 0\le\tau\le T\}$ рівністю

$$G_k(t,\tau) = f_2(t,k)f_1(\tau,k) - f_1(t,k)f_2(\tau,k). \tag{6}$$

Легко перевірити, що для довільного фіксованого $\tau\in[0,t)$ виконуються такі співвідношення:

$$L\left(\frac{d}{dt},k\right)G_k(t,\tau) = 0, \quad \lim_{t\to\tau+0} G_k(t,\tau) = 0, \quad \lim_{t\to\tau+0}\frac{\partial G_k(t,\tau)}{\partial t} = \mathcal{W}(\tau,k), \tag{7}$$

де $\mathcal{W}(\tau,k) = \det\| f_q^{(j-1)}(\tau,k)\|_{j,q=1}^2$. Тому з теореми про єдиність розв’язку задачі Коші [3, с. 84], формул (7) та з означення функції $f_2(t,k)$ випливає, що

$$G_k(t,\tau) = \mathcal{W}(\tau,k) f_2(t-\tau,k), \qquad 0\le\tau\le t\le T. \tag{8}$$

Розв’язок задачі (4), (5) із класу $C^2[0,T]$ зображається формулою

$$u_k(t) = C_{k,1}\, f_1(t,k) + C_{k,2}\, f_2(t,k)\,, \tag{9}$$

де сталі $C_{k,1}$, $C_{k,2}$ визначаються із системи рівнянь

$$C_{k,1} \int_0^{t_1} t^{j-1} f_1(t,k)\,dt + C_{k,2} \int_0^{t_1} t^{j-1} f_2(t,k)\,dt = \varphi_{j,k}, \qquad j = 1,2\,, \tag{10}$$

визначник якої позначимо через $\Delta(k,t_1)$:

$$\Delta(k,t_1) = \begin{vmatrix} \int_0^{t_1} f_1(t,k)\,dt & \int_0^{t_1} f_2(t,k)\,dt \\ \int_0^{t_1} t f_1(t,k)\,dt & \int_0^{t_1} t f_2(t,k)\,dt \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}^{\gamma})$ *необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \qquad \Delta(k,t_1) \ne 0\,. \tag{12}$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 4.1 з [5, §4]. ◊

4. Надалі вважатимемо, що умова (12) справджується. Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ система (10) має єдиний розв'язок, і на підставі (3) та (9) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} \exp(ik,x) \left[\frac{\varphi_{2,k}}{\Delta(k,t_1)} \int_0^{t_1} G_k(t,\tau)\,d\tau - \frac{\varphi_{1,k}}{\Delta(k,t_1)} \int_0^{t_1} G_k(t,\tau)\,\tau\,d\tau \right]. \tag{13}$$

Збіжність ряду (13), взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k,t_1)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Зауваження 1. Якщо справджується умова (12), а $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in \mathcal{T}(\mathcal{T}')$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який належить до класу $C^2([0,T];\mathcal{T})$ $(C^2([0,T];\mathcal{T}'))$, де $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ – простори тригонометричних поліномів та формальних тригонометричних рядів відповідно [2, розд. 2, § 6.2].

Нехай $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – корені рівняння $L(\lambda,k) = 0$. Відомо [8, с. 102], що при кожному $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються такі оцінки:

$$|\lambda_j(k)| \le M_3(1+|k|^{\gamma})\,,$$

$$-M_2(1+|k|^{\gamma}) \le \operatorname{Re}\lambda_j(k) \le M_1(1+|k|^{\gamma}), \qquad j = 1,2\,, \tag{14}$$

де

$$\gamma = \max\{N_1,\ N_2/2\}\,,$$

$$M_1 = \max\big\{0;\ \sup\{\operatorname{Re}\lambda_j(k)/(1+|k|^{\gamma}),\ j=1,2,\ k\in\mathbb{Z}^p\}\big\}\,,$$

$$M_2 = -\min\big\{0;\ \inf\{\operatorname{Re}\lambda_j(k)/(1+|k|^{\gamma}),\ j=1,2,\ k\in\mathbb{Z}^p\}\big\}\,,$$

$$M_3 = \sup\{|\lambda_j(k)|/(1+|k|^{\gamma}),\ j=1,2,\ k\in\mathbb{Z}^p\}\,.$$

Нижче у роботі фігурують додатні сталі C_j, $j = 1,\ldots,11$, які не залежать від k.

Теорема 2. *Нехай справджується умова* (12) *та існують такі сталі* $\omega,\ \delta \in \mathbb{R}$, *що для всіх* (*крім скінченної кількості*) $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\,\Delta(k,t_1)\,| \ge (1+|k|\,)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^{\gamma}). \tag{15}$$

Якщо $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x) \in W^{\gamma}_{\alpha+\omega+5\gamma,\beta+\delta+2M_1T}$, *то в просторі* $C^2([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображається рядом* (13) *і неперервно залежить від* $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$.

Д о в е д е н н я. На підставі нерівностей (14) і леми 12.7.7 з [12, с. 162] випливає, що для функцій $f_1(t,k),\ f_2(t,k)$ і їхніх похідних виконуються такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]}|\,f_1^{(j-1)}(t,k)\,| \le C_1(1+|k|)^{\gamma(j+1)}\exp(M_1T|k|^{\gamma}), \qquad j=1,2,3, \tag{16}$$

$$\max_{t\in[0,T]}|\,f_2^{(j-1)}(t,k)\,| \le C_2(1+|k|\,)^{\gamma j}\exp(M_1T|k|^{\gamma}), \qquad j=1,2,3. \tag{17}$$

З нерівностей (16), (17) і формули (6) отримуємо, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\int_0^{t_1}G_k(t,\tau)\,d\tau\right| \le C_3(1+|k|\,)^{\gamma(j+2)}\exp(2M_1T|k|^{\gamma}), \quad j=1,2,3, \tag{18}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\int_0^{t_1}G_k(t,\tau)\,\tau\,d\tau\right| \le C_4(1+|k|)^{\gamma(j+2)}\exp(2M_1T|k|^{\gamma}), \quad j=1,2,3. \tag{19}$$

З нерівностей (15), (16)–(19) і формули (13) випливає, що

$$\max_{t\in[0,T]}|\,u_k^{(q)}(t)\,| \le C_5(\,|\,\varphi_{1,k}\,|+|\,\varphi_{2,k}\,|\,)\,\rho_k, \qquad q=0,1,2, \tag{20}$$

де $\rho_k = (1+|k|\,)^{5\gamma+\omega}\exp\left((2M_1T+\delta)|k|^{\gamma}\right),\ k\in\mathbb{Z}^p$. Із формул (3), (20) і нерівності трикутника для норми дістаємо оцінку

$$\left\|\,u(t,x);C^2([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})\,\right\| \le$$

$$\le \sum_{q=0}^{2}\sqrt{\sum_{\|k|\ge 0}\max_{t\in[0,T]}|\,u_k^{(q)}(t)\,|^2(1+|k|\,)^{2\alpha}\exp(2\beta|k|^{\gamma})} \le$$

$$\le C_6\sum_{j=1}^{2}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}|\,\varphi_{j,k}\,|^2\rho_k^2(1+|k|\,)^{2\alpha}\exp(2\beta|k|^{\gamma})} =$$

$$= C_6\sum_{j=1}^{2}\left\|\,\varphi_j(x);W^{\gamma}_{\alpha+\omega+5\gamma,\beta+\delta+2M_1T}\,\right\|,$$

з якої випливає доведення теореми. ◊

5. Виясниმо, наскільки «багата» множина задач, для яких виконується оцінка (15). Для цього використаємо допоміжне твердження, що є частковим випадком леми з [6].

Лема. *Нехай* $\mathcal{R}(\mu) = \mu^n + b_1\mu^{n-1}+\dots+b_n$, *де* $b_j\in\mathbb{C},\ j=1,\dots,n$, *і нехай* $\mu_j,\ j=1,\dots,n$, *– корені многочлена* $\mathcal{R}(\mu)$. *Нехай* $B_{\mathcal{R}} = 1+\max_{1\le j\le n}|\,\mu_j\,|$, $\Lambda^-_{\mathcal{R}} = \min_{1\le j\le n}\operatorname{Re}\mu_j$, $\psi_{\mathcal{R}} = \max_{t\in[0,T]}\exp(-\Lambda^-_{\mathcal{R}}t)$. *Якщо функція* $f\in C^n([0,T];\mathbb{R}(\mathbb{C}))$ *є розв'язком задачі Коші*

$$\mathcal{R}(d/dt)\, f(t) = 0, \qquad f^{(j-1)}(0) = f_j, \qquad j = 1, \dots, n, \qquad |\, f_1 \,| + \dots + |\, f_n \,| > 0\,,$$

то для довільного ε, $\quad 0 < \varepsilon < \dfrac{P_{\mathcal{R},f}}{n\, 2^n\, e^T\, \psi_{\mathcal{R}}\, B_{\mathcal{R}}^n}, \quad P_{\mathcal{R},f} \equiv \max\limits_{1 \le j \le n} \left\{ \dfrac{|\, f^{(j-1)}(0) \,|}{B_{\mathcal{R}}^j} \right\},$

$$\operatorname{mes}\{\, t \in [0, T] : |\, f(t) \,| < \varepsilon \,\} \le C_7\, B_{\mathcal{R}} \left(\frac{\varepsilon\, \psi_{\mathcal{R}}}{P_{\mathcal{R},f}} \right)^{1/(n-1)}, \qquad C_7 = C_7(n, T).$$

Теорема 3. *Для довільних фіксованих коефіцієнтів* A_{js}, $|\, s \,| \le N_j$, $j = 1, 2$, *рівняння* (1) *і для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $t_1 \in (0, T]$ *нерівність* (15) *виконується для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\omega > 5(p + 2\gamma)$, $\delta \ge 2M_2T$.

Доведення. Будемо розглядати визначник $\Delta(k, t_1)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, як функцію від змінної $t_1 \in [0, T]$. Покажемо, що $\Delta(k, t_1)$ є розв'язком такого диференціального рівняння:

$$\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt_1}, k \right) \Delta(k, t_1) = 0\,, \tag{21}$$

де $\mathcal{S}(\mu, k) = (\mu + A_1(k))\, L^2(\mu, k)\, \mu$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Диференціюючи визначник $\Delta(k, t_1)$ за t_1, одержимо

$$\frac{d\Delta(k, t_1)}{dt_1} = \begin{vmatrix} f_1(t_1, k) & f_2(t_1, k) \\ \int\limits_0^{t_1} \tau f_1(\tau, k)\, d\tau & \int\limits_0^{t_1} \tau f_2(\tau, k)\, d\tau \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \int\limits_0^{t_1} f_1(\tau, k)\, d\tau & \int\limits_0^{t_1} f_2(\tau, k)\, d\tau \\ t_1 f_1(t_1, k) & t_1 f_2(t_1, k) \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{t_1} \tau \left(f_1(t_1, k)\, f_2(\tau, k) - f_2(t_1, k)\, f_1(\tau, k) \right) d\tau \,+$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} t_1 \left(f_1(\tau, k)\, f_2(t_1, k) - f_2(\tau, k)\, f_1(t_1, k) \right) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{t_1} (t_1 - \tau) G_k(t_1, \tau)\, d\tau\,. \tag{22}$$

Відомо [3, с. 81], що для довільної функції $h(t) \in C[0, T]$ інтеграл $\int\limits_0^{t} f_2(t - \tau, k) h(\tau)\, d\tau$ є розв'язком рівняння $L\left(\dfrac{d}{dt}, k \right) \int\limits_0^{t} f_2(t - \tau, k) h(\tau)\, dt = h(t)$. Тому, враховуючи формулу (8), отримуємо

$$L\left(\frac{d}{dt_1}, k \right) \int\limits_0^{t_1} G_k(t_1, \tau)\, d\tau = \mathcal{W}(t_1, k)\,,$$

$$L\left(\frac{d}{dt_1}, k \right) \int\limits_0^{t_1} \tau\, G_k(t_1, \tau)\, d\tau = t_1 \mathcal{W}(t_1, k)\,. \tag{23}$$

Безпосередньою перевіркою можна встановити, що

$$L\left(\frac{d}{dt_1},k\right)\int_0^{t_1} t_1 G_k(t_1,\tau)\,d\tau =$$

$$= 2\int_0^{t_1} \frac{\partial G_k(t_1,\tau)}{\partial t_1}\,d\tau + A_1(k)\int_0^{t_1} G_k(t_1,\tau)\,d\tau + t_1 \mathcal{W}(t_1,k). \qquad (24)$$

Із формул (22)–(24) дістаємо, що

$$L\left(\frac{d}{dt_1},k\right)\frac{d\Delta(k,t_1)}{dt_1} = 2\int_0^{t_1} \frac{\partial G_k(t_1,\tau)}{\partial t_1}\,d\tau + A_1(k)\int_0^{t_1} G_k(t_1,\tau)\,d\tau. \qquad (25)$$

Враховуючи формулу Ліувілля для вронскіана, з (23) маємо

$$L\left(\frac{d}{dt_1},k\right)\int_0^{t_1} \frac{\partial G_k(t_1,\tau)}{\partial t_1}\,d\tau = L\left(\frac{d}{dt_1},k\right)\frac{d}{dt_1}\int_0^{t_1} G_k(t_1,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt_1} L\left(\frac{d}{dt_1},k\right)\int_0^{t_1} G_k(t_1,\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt_1}\mathcal{W}(t_1,k) = -\,A_1(k)\mathcal{W}(t_1,k). \qquad (26)$$

Тоді з (23), (25), (26) отримуємо рівність

$$L\left(\frac{d}{dt_1},k\right)\,L\left(\frac{d}{dt_1},k\right)\frac{d\Delta(k,t_1)}{dt_1} = -\,A_1(k)\mathcal{W}(t_1,k),$$

з якої на основі формули Ліувілля дістаємо

$$\left(\frac{d}{dt_1} + A_1(k)\right)L\left(\frac{d}{dt_1},k\right)L\left(\frac{d}{dt_1},k\right)\frac{d\Delta(k,t_1)}{dt_1} = 0,$$

тобто $\mathcal{S}\left(\frac{d}{dt_1},k\right)\Delta(k,t_1) = 0$.

Легко перевірити, що

$$\left.\frac{d^j\Delta(k,t_1)}{dt_1^j}\right|_{t_1=0} = (j-1)\int_0^{t_1}\frac{\partial^{j-2}G_k(t_1,\tau)}{\partial t_1^{j-2}}\,d\tau + \int_0^{t_1}(t_1-\tau)\frac{\partial^{j-1}G_k(t_1,\tau)}{\partial t_1^{j-1}}\,d\tau +$$

$$+ 2\delta_{j,4}\,\mathcal{W}(t_1,k) - 5\delta_{j,5}\,A_1(k)\mathcal{W}(t_1,k), \qquad j = 1,\ldots,5. \qquad (27)$$

Із формул (11), (22), (27) випливає, що $\Delta(k,t_1)$ має такі початкові значення:

$$\left.\frac{d^{j-1}\Delta(k,t_1)}{dt_1^{j-1}}\right|_{t_1=0} = 2\delta_{j,5}, \quad j = 1,\ldots,5, \qquad \left.\frac{d^5\Delta(k,t_1)}{dt_1^5}\right|_{t_1=0} = -5A_1(k). \qquad (28)$$

Отже, функція $\Delta(k,t_1)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі Коші (21), (28).

Позначимо: $\mu_j(k)$, $j = 1,\ldots,6$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – корені многочлена $\mathcal{S}(\mu,k)$,

$$B_{\mathcal{S}}(k) = 1 + \max_{1\le j\le 6}|\mu_j(k)|, \qquad \Lambda^-_{\mathcal{S}}(k) = \min_{1\le j\le 6}\operatorname{Re}\mu_j(k),$$

$$\psi_{\mathcal{S}}(k) = \max_{t\in[0,T]}\exp\left(-\Lambda^-_{\mathcal{S}}(k)t\right), \qquad P_{\mathcal{S},\Delta}(k) \equiv \max_{1\le j\le 6}\left\{B^{-j}_{\mathcal{S}}(k)\left|\left.\frac{d^{j-1}\Delta(k,t_1)}{dt_1^{j-1}}\right|_{t_1=0}\right|\right\}.$$

Зі структури коренів $\mu_j(k)$, $j = 1,\ldots,6$, і формул (14) дістаємо, що $B_{\mathcal{S}}(k) \le C_8(1+|k|^\gamma)$, $\Lambda^-_{\mathcal{S}}(k) \ge -\,2M_2(1+|k|^\gamma)$, $\psi_{\mathcal{S}}(k) \le C_9\exp(2M_2T|k|^\gamma)$.

Оскільки

$$P_{\mathcal{S},\Delta}(k) \ge B_{\mathcal{S}}^{-5}(k) \left| \left. \frac{d^4\Delta(k,t_1)}{dt_1^4} \right|_{t_1=0} \right|,$$

то з (28) отримуємо, що

$$P_{\mathcal{S},\Delta}(k) \ge 2B_{\mathcal{S}}^{-5}(k) \ge 2\left(C_8(1+|k|^{\gamma})\right)^{-5}.$$

Розглянемо такі множини:

$$E_{\delta,\omega}(k) = \{t_1 \in [0,T] : |\Delta(k,t_1)| < (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^{\gamma})\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Із леми випливає, що при $\delta \ge 2M_2T$, $\omega > 5(p+2\gamma)$

$$\operatorname{mes} E_{\delta,\omega}(k) \le C_{10}B_{\mathcal{S}}(k)\left(\frac{(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^{\gamma})\,\psi_{\mathcal{S}}(k)}{(1+|k|)^{-5\gamma}}\right)^{1/5} \le$$

$$\le C_{11}(1+|k|)^{\gamma}\left(\frac{(1+|k|)^{-\omega}\exp\left((-\delta+2M_2T)|k|^{\gamma}\right)}{(1+|k|)^{-5\gamma}}\right)^{1/5} \le$$

$$\le C_{11}(1+|k|)^{\gamma+(5\gamma-\omega)/5} \le C_{11}(1+|k|)^{-p-\varepsilon_1}, \qquad (29)$$

де $\varepsilon_1 = (\omega - 5(p+2\gamma))/5 > 0$. З нерівності (29) випливає, що при $\delta \ge 2M_2T$, $\omega > 5(p+2\gamma)$ ряд $\sum\limits_{|k|\ge 0} \operatorname{mes} E_{\delta,\omega}(k)$ є збіжним. За лемою Бореля − Кантеллі [5, с. 17] міра Лебега в $\mathbb{R}$ множини чисел t_1, які належать до нескінченної кількості множин $E_{\delta,\omega}(k)$, $\delta \ge 2M_2T$, $\omega > 5(p+2\gamma)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, дорівнює нулеві. ◊

Запропонований метод доведення теореми 3 відрізняється від методу, розробленого П. І. Штабалюком [5, §7.4; 14, §2.3], і в технічному плані є зручнішим.

Зауваження 2. У теоремі 3 вказано оцінки знизу для показників ω, δ, при яких нерівність (15) виконується для майже всіх чисел $t_1 \in (0,T]$ і для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Однак можуть існувати такі числа $t_1 \in (0,T]$, що нерівність (15) не виконується для безмежної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при як завгодно великих ω, δ. Покажемо це на прикладі такої задачі:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0, \qquad (t,x) \in Q_1,$$

$$\int_0^{t_1} u(t,x)\,dt = \varphi_1(x), \qquad \int_0^{t_1} tu(t,x)\,dt = \varphi_2(x), \qquad 0 < t_1 \le T, \quad x \in \Omega_1. \qquad (30)$$

Для задачі (30) маємо $\gamma = 1$, $\Delta(k,t_1) = 4k^{-4}\sin\left(\frac{kt_1}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{kt_1}{2}\right) - \frac{kt_1}{2}\cos\left(\frac{kt_1}{2}\right)\right)$, якщо $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\Delta(0,t_1) = \frac{t_1^4}{12}$. За теоремою Хінчина [13, с. 48] для довільних $\omega > 0$, $\delta > 0$ існує таке ірраціональне число $\frac{t_1}{2\pi} > 0$, що нерівність

$$\left|\frac{kt_1}{2} - m\pi\right| < \frac{|k|^4(1+|k|)^{-\omega}}{4(1+|k|\theta)}\exp(-\delta|k|), \qquad \theta = \frac{T}{2},$$

має нескінченну множину розв'язків у цілих числах k, m.

Оскільки

$$|\Delta(k,t_1)| \le 4\,|k|^{-4}\,(1+|k|\,\theta)\left|\sin\left(\frac{kt_1}{2}\right)\right| =$$

$$= 4\,|k|^{-4}\,(1+|k|\,\theta)\left|\sin\left(\frac{kt_1}{2}-m\pi\right)\right| \le 4\,|k|^{-4}(1+|k|\,\theta)\left|\frac{kt_1}{2}-m\pi\right|,$$

де $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$, то нерівність $|\Delta(k,t_1)| < (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|)$ має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах k.

З теорем 2, 3 випливає наступне твердження про розв'язність задачі (1), (2) для майже всіх чисел $t_1 \in (0,T]$.

Теорема 4. *Нехай* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in W^{\gamma}_{\alpha+5(p+3\gamma)+\varepsilon,\beta+2(M_1+M_2)T}$, $\varepsilon > 0$. *Для довільних фіксованих коефіцієнтів* A_{js}, $|s| \le N_j$, $j = 1,2$, *рівняння* (1) *і для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $t_1 \in (0,T]$ *у просторі* $C^2([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який неперервно залежить від* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

Результат теореми 4 є сильнішим порівняно з результатами робіт [5, §7.4; 14, §2.3] у тому сенсі, що в них встановлено коректну розв'язність задач з інтегральними умовами для майже всіх чисел $t_1 \in (0,T]$ і для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів рівняння (1).

Зауваження 3. Якщо в рівнянні (1) $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$ − однорідні форми степенів η, 2η відповідно (тобто $\gamma = \eta$), а оператор $L(\partial/\partial t, D)$ є строго гіперболічним (тобто корені $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ рівняння $L(\lambda,k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є уявними та різними), то нерівність (15) виконується для майже всіх чисел $t_1 \in (0,T]$ при $\delta = 0$, $\omega > 5(p+2\eta)$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. У цьому випадку з теореми 4 і теорем вкладення Соболєва [7] випливає, що для майже всіх $t_1 \in (0,T]$ у просторі $C^2([0,T];C^{2\eta}(\Omega_p))$ існує розв'язок задачі (1), (2), якщо $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in C^m(\Omega_p)$, $m > 6p + 17\eta + 1$.

6. Розглянемо частковий випадок задачі (1), (2), коли для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ рівняння $L(\lambda,k) = 0$ є дійсними.

Теорема 5. *Якщо для кожного* $k \in \mathbb{Z}^p$ *корені* $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ *рівняння* $L(\lambda,k) = 0$ *є дійсними, то задача* (1), (2) *у просторі* $C^2([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ *не може мати більше ніж один розв'язок.*

Д о в е д е н н я. Враховуючи теорему 1, досить показати, що виконується умова (12). Оскільки функція $f_2(t,k)$ є розв'язком задачі Коші $L(d/dt,k)\,f_2(t,k) = 0$, $f_2(0,k) = 0$, $f_2'(0,k) = 1$, то для неї справедливе одне з наступних зображень:

$$f_2(t,k) = \frac{2\exp\left(\dfrac{(\lambda_1(k)+\lambda_2(k))\,t}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\dfrac{(\lambda_1(k)-\lambda_2(k))\,t}{2}\right)}{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}, \quad \lambda_1(k) \ne \lambda_2(k), \tag{31}$$

$$f_2(t,k) = t\exp(\lambda_1(k)\,t), \qquad \lambda_1(k) = \lambda_2(k). \tag{32}$$

Очевидно, що функції (31), (32) мають лише один дійсний нуль $t = 0$ і $f_2(t,k) > 0$ для всіх $t > 0$. Отже, $f_2(t_1 - t,k) > 0$ для всіх t, t_1 таких, що

$0 \le t < t_1 \le T$. Оскільки $\mathcal{W}(t,k) = \exp(-A_1(k)t) = \exp((\lambda_1(k) + \lambda_2(k))t) > 0$, то з формули (8) дістаємо, що $G_k(t_1, t) > 0$ при $0 \le t < t_1$. Тоді з (22) маємо, що $\dfrac{d\Delta(k,t_1)}{dt_1} > 0$ при $t_1 > 0$. Оскільки $\Delta(k,t_1)\big|_{t_1=0} = 0$, то інтегруючи попередню нерівність, дістанемо, що $\Delta(k,t_1) > 0$ при $t_1 > 0$.

Теорема 6. *Нехай для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ *корені* $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ *є дійсними і* $A_1(k) \le -M|k|^\gamma$, *де* $M \ge 0$. *Тоді для довільного* $\nu > 0$, *для всіх чисел* $t_1 > \nu$, *для всіх векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$\Delta(k,t_1) \ge \frac{1}{2}\nu^2(t_1 - \nu)^2 \exp\left(\frac{\nu M|k|^\gamma}{2}\right). \tag{33}$$

Д о в е д е н н я. Для визначника $\Delta(k,t_1)$ із формул (8), (11), (22) випливає таке зображення:

$$\Delta(k,t_1) = \int_0^{t_1}\int_0^{\tau} u\,\mathcal{W}(\tau - u, k)\, f_2(u,k)\,du\,d\tau. \tag{34}$$

За умовою $A_1(k) \le 0$, тому $\mathcal{W}(\tau - u, k) \ge 1$, коли $\tau \ge u$. Тоді з (34) дістаємо, що

$$\Delta(k,t_1) \ge \int_0^{t_1}\int_0^{\tau} u\, f_2(u,k)\,du\,d\tau. \tag{35}$$

Змінюючи порядок інтегрування у повторному інтегралі у формулі (35), одержимо

$$\Delta(k,t_1) \ge \int_0^{t_1} u\, f_2(u,k)\int_u^{t_1} d\tau\,du = \int_0^{t_1} u(t_1 - u)\, f_2(u,k)\,du. \tag{36}$$

Із формул (31), (32) та умов теореми 6 випливає, що для всіх $t \ge \nu$

$$f_2(t,k) \ge \nu \exp\left(\frac{\nu M|k|^\gamma}{2}\right). \tag{37}$$

Тому з (36), (37) отримуємо

$$\Delta(k,t_1) \ge \int_\nu^{t_1} u\,(t_1 - u)\, f_2(u,k)\,du \ge$$

$$\ge \nu^2 \exp\left(\frac{\nu M|k|^\gamma}{2}\right)\int_\nu^{t_1} u\,(t_1 - u)\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\nu^2(t_1 - \nu)^2 \exp\left(\frac{\nu M|k|^\gamma}{2}\right).$$

Теорему доведено. ◊

Встановлена оцінка (33) означає, що проблема малих знаменників відсутня у задачі з інтегральними умовами (2) для рівнянь (1), всі корені $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, яких є дійсними, і для яких $A_1(k) \le 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$.

Зауваження 4. Результати роботи можна перенести на випадок рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами.

1. *Виленц И. Л.* Классы единственности решения общей краевой задачи в слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН УССР. Сер. А. − 1974. − № 3. − С. 195−197.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. − Киев: Наук. думка, 1984. − 284 с.
3. *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. − М.: Наука, 1980. − 288 с.
4. *Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: Доп. VI Міжнар. наук. конф. (Львів, 26−29 травня 2003 р.). − Львів. − 2003. − С. 507−509.
5. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. − К.: Наук. думка, 2002. − 416 с.
6. *Симотюк М. М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Математика, інформатика. − 2002. − Вип. 7. − С. 96−107.
7. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. − М.: Наука, 1988. − 336 с.
8. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. − К.: Вища шк., 1971. − 316 с.
9. *Фардигола Л. В.* Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое // Изв. вузов. Математика. − 1993. − № 7. − С. 51−58.
10. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями // Укр. мат. журн. − 1990. − **42**, № 11. − С. 1546−1551.
11. *Фардигола Л. В.* Свойства T-устойчивости интегральной краевой задачи в слое // Теория функций, функц. анализ и их прил. − 1991. − № 55. − С. 78−80.
12. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. − Т. 2. − М.: Мир, 1986. − 456 с.
13. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. − М.: Наука, 1978. − 112 с.
14. *Штабалюк П. И.* Почти-периодические решения дифференциальных уравнений гиперболического и составного типов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. − Львов, 1984. − 146 с.

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Исследована корректность задачи с интегральными условиями для линейных дифференциальных уравнений с частными производными с постоянными комплексными коэффициентами. Установлены условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, возникающих при построении решения задачи.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

The correctness of the problem with integral conditions for linear partial differential equations with constant coefficients is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorems of estimations of small denominators of the problem are proved.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
28.05.03