УДК 513.88

О. Я. Мильо, Г. М. Піпа, О. Г. Сторож

ПРО ФУНКЦІЮ ВЕЙЛЯ ТА ЕКСТРЕМАЛЬНІ РОЗШИРЕННЯ НАПІВГЛАДКОГО ЗВУЖЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ОПЕРАТОРА

У термінах абстрактних крайових умов побудовано функцію Вейля напівгладкого звуження замкненого симетричного додатно визначеного оператора в гільбертовому просторі, а також жорстке та м'яке розширення цього звуження.

1. Позначення та постановка задачі. У цій праці, частину результатів якої анонсовано в [12], використовуємо такі позначення:

$D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень та многовид нулів лінійного оператора T, що діє з гільбертового простору X у гільбертів простір Y;

T^* – спряжений оператор;

$\mathcal{B}(X,Y)$ – множина всіх лінійних неперервних операторів $T : X \to Y$ таких, що $D(T) = X$, $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$;

$(\,.\,|\,.\,)_X$, $\|\cdot\|_X$, 1_X – скалярний добуток, норма та тотожне перетворення простору X;

$T \mid E$ – звуження оператора T на многовид E.

Під H розуміємо фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(.\,|\,.)$ і з нормою $\|\cdot\|$, за вихідний об'єкт приймаємо замкнений додатно визначений оператор $L_0 : H \to H$ з областю визначення, щільною в H, через L_F та L_K позначаємо відповідно фрідріхсівське (жорстке) та крейнівське (м'яке) розширення оператора L_0, а через H_e та $(.\,|\,.)_e$ – його енергетичний простір і відповідний скалярний добуток (означення див. у [5, 9]).

Крім цього, вважаємо заданим оператор $\Psi \in \mathcal{B}(H_e, G)$, де G – допоміжний гільбертів простір. Означимо оператор $\Psi^\bullet \in \mathcal{B}(G, H_e)$ за допомогою співвідношення $\forall u \in H_e, \forall g \in G \quad (\Psi u \mid g) = (u \mid \Psi^\bullet g)_e$ і припустимо, що

$$R(\Psi^\bullet) \cap D(L_F) = \{0\}, \qquad R(\Psi) = R(\Psi \mid D(L_0)) = G, \tag{1}$$

$$\ker L \dotplus R(\Psi^\bullet) \qquad \text{замкнена в } H \tag{2}$$

(тут і надалі $L = L_0^*$).

Відомо [13], що при зроблених припущеннях $L_{\min}$ є напівгладким звуженням оператора L_0. Останнє означає, що $L_{\min}$ – замкнений щільно визначений оператор і $D(L_{\min}^*) \subset H_e \dotplus \ker L$ (пор. з означенням 4.3 з монографії [6, розд. 4]).

Метою цієї праці є побудова функції Вейля оператора $L_{\min}$, а також його жорсткого та м'якого розширень. Зазначимо, що у випадку, коли L_0 має скінченні дефектні числа, ці питання досліджувались у [7].

2. Допоміжні поняття і твердження. Нехай $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ − простір граничних значень (ПГЗ) оператора L_0 у сенсі означення, запропонованого в [3] (див. також [1]), а $L_\lambda = (L \mid \ker \Gamma_2 - \lambda 1)^{-1}$, $1 = 1_H$. Оператор-функцію $Z_\lambda = (\Gamma_1 L_\lambda)^*$, $\lambda \le 0$, називатимемо фундаментальною функцією оператора L_0, що відповідає зазначеному ПГЗ. Відомо [6], що $\forall \lambda \le 0 \quad Z_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, H)$ і

$$R(Z_\lambda) = \ker(L - \lambda 1), \qquad \Gamma_2 Z_\lambda = 1_{\mathcal{H}}. \tag{3}$$

Іншими словами,

$$y = Z_\lambda a \quad \Leftrightarrow \quad Ly = \lambda y, \qquad \Gamma_2 y = a. \tag{4}$$

Нагадаємо також (див. [2]), що $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-значну функцію $M(\lambda)$, яка визначається з умови

$$D(L_0) \dot{+} \ker (L - \lambda 1) = \{y \in D(L) : \Gamma_1 y = M(\lambda) \Gamma_2 y\}, \tag{5}$$

називають функцією Вейля оператора L_0, що відповідає ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, і

$$\forall \lambda \le 0 \qquad M(\lambda) = \Gamma_1 Z_\lambda \tag{6}$$

(див. [10] і цитовану там літературу).

Надалі вважаємо, що $(\mathcal{H}, \Gamma_{1,} \Gamma_2)$ − фіксований жорсткий ПГЗ оператора L_0, тобто що $\ker \Gamma_1 = D(L_\mathrm{K})$, $\ker \Gamma_2 = D(L_\mathrm{F})$.

Зазначимо, що існування такого ПГЗ доведено в [4] (див. також [1]) і що, як випливає з результатів, викладених у [2, 10, 11], ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ є жорстким тоді й тільки тоді, коли

$$s - \lim_{\lambda \to -\infty} \left(M(\lambda)\right)^{-1} = 0, \qquad M(0) = 0. \tag{7}$$

Означимо оператор $L_{\max}$ за допомогою співвідношень

$$D(L_{\max}) = D(L) \dot{+} R(\Psi^\bullet),$$

$$\forall z \in D(L), \quad \forall g \in G \qquad L_{\max}(z + \Psi^\bullet g) = Lz,$$

а оператори $\Gamma_1^{(\Psi)}$, $\Gamma_2^{(\Psi)} : D(L_{\max}) \to \mathcal{H}$ та Γ_3, $\Gamma_4 : D(L_{\max}) \to G$ − таким чином:

$$\forall z \in D(L), \qquad \forall g \in G \qquad \Gamma_i^{(\Psi)}(z + \Psi^\bullet g) = \Gamma_i z, \qquad i = 1, 2,$$

$$\Gamma_3(z + \Psi^\bullet g) = -g, \qquad \Gamma_4(z + \Psi^\bullet g) = \Psi P(z + \Psi^\bullet g),$$

де P − проектор $H_e \dot{+} \ker L \to H_e$ такий, що $\ker P = \ker L$. Відомо [13], що при зроблених припущеннях (див. (1), (2)) $L_{\min}^* = L_{\max}$. Крім цього, міркуваннями, аналогічними проведеним у [8], отримуємо, що $(\hat{H}, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2)$, де $\hat{H} = \mathcal{H} \oplus G$, $\hat{\Gamma}_1 = \Gamma_1^{(\Psi)} \oplus \Gamma_3$, $\hat{\Gamma}_2 = \Gamma_2^{(\Psi)} \oplus \Gamma_4$, є ПГЗ оператора $L_{\min}$. Нижче знайдено функцію Вейля $\hat{M}(\lambda)$ оператора $L_{\min}$, яка відповідає ПГЗ $(\hat{H}, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2)$, у припущенні, що є відомою функція Вейля $M(\lambda)$ оператора L_0, яка відповідає ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$.

3. Основні результати.

Лема 1. *Елемент* $y \in \mathcal{H}$ *є розв'язком рівняння* $L_{\max} y = \lambda y$, $\lambda \le 0$, *тоді й тільки тоді, коли існують* $\tilde{a} \in \mathcal{H}$, $\tilde{c} \in G$ *такі, що*

$$y = Z_\lambda \tilde{a} + \lambda L_\lambda \Psi^\bullet \tilde{c} + \Psi^\bullet \tilde{c}. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $L_{\max} y = \lambda y$. Маємо $L(y + \Psi^\bullet \Gamma_3 y) - \lambda(y + \Psi^\bullet \Gamma_3 y) = -\lambda \Psi^\bullet \Gamma_3 y$. Тому (див. (3)) існує $\tilde{a} \in \mathcal{H}$ таке, що $y + \Psi^\bullet \Gamma_3 y = Z_\lambda \tilde{a} - \lambda L_\lambda \Psi^\bullet \Gamma_3 y$. Поклавши $\Gamma_3 y = \tilde{c}$, отримаємо (8). Навпаки, $\forall \tilde{a} \in \mathcal{H}$, $\forall \tilde{c} \in G$

$$(L_{\max} - \lambda 1)(Z_\lambda \tilde{a} + \lambda L_\lambda \Psi^\bullet \tilde{c} + \Psi^\bullet \tilde{c}) =$$

$$= (L_0 - \lambda 1)(Z_\lambda \tilde{a} + \lambda L_\lambda \Psi^\bullet \tilde{c}) - \lambda \Psi^\bullet \tilde{c} = 0. \ \Diamond$$

Введемо такі позначення:

$$\forall \lambda \le 0 \qquad F(\lambda) = \lambda \Psi L_\lambda \Psi^\bullet + \Psi \Psi^\bullet,$$

$$\Psi(\lambda) = \Psi(Z_\lambda - Z_0). \tag{9}$$

Лема 2. $\quad \forall \lambda \le 0$

$$F(\lambda) = (F(\lambda))^* \in \mathcal{B}(G), \qquad (F(\lambda))^{-1} \in \mathcal{B}(G).$$

Д о в е д е н н я. Оскільки L_0 – додатно визначений оператор, то $\inf\limits_{\|u\|=1} (L_F u \mid u) \overset{\text{def}}{=} \gamma > 0$. Маємо

$$(L_F - \lambda 1) \ge (\gamma - \lambda) 1 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le L_\lambda \le \frac{1}{\gamma - \lambda} 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 \ge \lambda L_\lambda \ge \frac{\lambda}{\gamma - \lambda} 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{\gamma - \lambda} 1 \le \lambda L_\lambda + 1 \le 1,$$

тобто

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad \frac{\gamma}{\gamma - \lambda} (x \mid x) \le \left((\lambda L_\lambda + 1) x \mid x \right) \le (x \mid x).$$

Зокрема, якщо $x = L_F^{1/2} \Psi^\bullet g$, $g \in G$, то

$$\frac{\gamma}{\gamma - \lambda} \left\| \Psi^\bullet g \right\|_e^2 \le \left((\lambda L_\lambda + 1) L_F^{1/2} \Psi^\bullet g \mid L_F^{1/2} \Psi^\bullet g \right) \le \left\| \Psi^\bullet g \right\|_e^2.$$

Але оператори L_λ та $L_F^{1/2}$ комутують, тому

$$\forall g \in G \qquad \frac{\gamma}{\gamma - \lambda} \left\| \Psi^\bullet g \right\|_e^2 \le \left(\Psi(\lambda L_\lambda + 1) \Psi^\bullet g \mid g \right)_G \le \left\| \Psi^\bullet g \right\|_e^2.$$

Оскільки $\ker \Psi^\bullet = \{0\}$, а $R(\Psi^\bullet)$ замкнена в H_e, то $\exists \tilde{\gamma} > 0$ таке, що $\forall g \in G$ $\left\| \Psi^\bullet g \right\|_e \ge \tilde{\gamma} \| g \|_{\mathcal{H}}$. Таким чином, $F(\lambda)$ – обмежений, додатно визначений, а отже, оборотний в G і самоспряжений оператор. $\Diamond$

Лема 3. *Нехай* $\hat{Z}_\lambda$ – *фундаментальна функція оператора* $L_{\min}$, *що відповідає ПГЗ* $(\hat{H}, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2)$. *Тоді* $\forall a \in \mathcal{H}$, $\forall c \in G$ $\hat{Z}_\lambda(a, c)$ *має вигляд* (8), *де*

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ -(F(\lambda))^{-1} \Psi(\lambda) & (F(\lambda))^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Д о в е д е н н я. Зі співвідношення (4), застосованого до ПГЗ $(\hat{H}, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2)$ оператора $L_{\min}$, а також з леми 1 випливає, що $y = \hat{Z}_\lambda(a, c)$ має вигляд (8) і, крім цього, $\Gamma_2^{(\Psi)} y = a$, $\Gamma_4 y = c$. Підставляючи в ці рівності замість y вираз (8) і враховуючи (3), а також тотожності $Py = y - Z_0 \Gamma_2 y$, $\Gamma_i^{(\Psi)} \Psi^\bullet = 0$, $i = 1, 2$, отримуємо

$$\Gamma_2^{(\Psi)}(Z_\lambda \tilde{a} + \lambda L_\lambda \Psi^\bullet \tilde{c} + \Psi^\bullet \tilde{c}) = a\,,$$
$$\Gamma_4(Z_\lambda \tilde{a} + \lambda L_\lambda \Psi^\bullet \tilde{c} + \Psi^\bullet \tilde{c}) = c\,;$$

$$\tilde{a} = a\,,$$
$$\Psi P Z_\lambda \tilde{a} + \lambda \Psi P L_\lambda \Psi^\bullet \tilde{c} + \Psi P \Psi^\bullet \tilde{c} = c\,;$$

$$\tilde{a} = a\,,$$
$$\Psi(1 - Z_0 \Gamma_2) Z_\lambda \tilde{a} + \lambda \Psi L_\lambda \Psi^\bullet \tilde{c} + \Psi \Psi^\bullet \tilde{c} = c\,;$$

$$\tilde{a} = a\,,$$
$$\Psi(\lambda)\tilde{a} + F(\lambda)\tilde{c} = c\,,$$

де $F(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ такі, як у (9). Зрозуміло, що остання система і (10) рівносильні. ◊

Зауваження 1. Використовуючи резольвентну тотожність Гільберта $L_\lambda - L_F^{-1} = \lambda L_\lambda L_F^{-1} = \lambda L_F^{-1} L_\lambda$, отримаємо $\Gamma_1 L_\lambda - \Gamma_1 L_F^{-1} = \lambda \Gamma_1 L_\lambda L_F^{-1} = \lambda \Gamma_1 L_F^{-1} L_\lambda$ $\forall \lambda \in \rho(L_F)$. Переходячи до спряжених операторів, переконуємось, що

$$\forall \lambda \in \rho(L_F) \quad Z_\lambda - Z_0 = \lambda L_F^{-1} Z_\lambda = \lambda L_\lambda Z_0\,. \tag{11}$$

Зауваження 2.

$$\forall \lambda \le 0 \qquad (\Psi(\lambda))^* = \lambda Z_\lambda^* \Psi^\bullet\,. \tag{12}$$

Дійсно,

$$\forall a, b \in \mathcal{H} \quad (\Psi L_F^{-1} Z_\lambda a \mid b)_{\mathcal{H}} = (L_F^{-1} Z_\lambda a \mid \Psi^\bullet b)_e = (Z_\lambda a \mid \Psi^\bullet b) = (a \mid Z_\lambda^* \Psi^\bullet b)_{\mathcal{H}}\,,$$

тобто $(\Psi L_F^{-1} Z_\lambda)^* = Z_\lambda^* \Psi^\bullet$. Звідси і з (11) випливає (12). ◊

Теорема 1. $\forall \lambda \le 0$

$$\hat{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} M(\lambda) & (\Psi(\lambda))^* \\ 0 & -1_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ \Psi(\lambda) & F(\lambda) \end{pmatrix}^{-1}. \tag{13}$$

Д о в е д е н н я. Перш за все, нагадаємо, що $\hat{M}(\lambda) = \hat{\Gamma}_1 \hat{Z}_\lambda$ (пор. з (6)). Далі, нехай $y \in \mathcal{H}$ визначено згідно з (8). Тоді $\Gamma_1^{(\Psi)} y = M(\lambda)\tilde{a} + \lambda Z_\lambda^* \Psi^\bullet \tilde{c}$, $\Gamma_3 y = -\tilde{c}$. Враховуючи (10) і (12), переконуємось у правильності (13). ◊

Наслідок 1. $\hat{M}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\Psi\Psi^\bullet)^{-1} \end{pmatrix}.$

Наслідок 2. $\forall \lambda \le 0$

$$\hat{M}(\lambda) = \left(\begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ \Psi(\lambda) & F(\lambda) \end{pmatrix}^* \right)^{-1} \begin{pmatrix} M(\lambda) & 0 \\ 0 & -F(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ \Psi(\lambda) & F(\lambda) \end{pmatrix}^{-1}.$$

Наслідок 3. $\quad \forall\lambda \le 0$

$$\left(\hat{M}(\lambda)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \left(M(\lambda)\right)^{-1} & \left(M(\lambda)\right)^{-1}\left(\Psi(\lambda)\right)^{*} \\ \Psi(\lambda)\left(M(\lambda)\right)^{-1} & \Psi(\lambda)\left(M(\lambda)\right)^{-1}\left(\Psi(\lambda)\right)^{*} - F(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Правильність цих наслідків перевіряється за допомогою безпосередніх обчислень. Оборотність оператора $M(\lambda)$ випливає з його від'ємної визначеності (див. (7) і наслідок 2 з праці [10]). На підставі (14) неважко побудувати жорстке $\hat{L}_{\mathrm{F}}$ та м'яке $\hat{L}_{\mathrm{K}}$ розширення оператора $L_{\min}$. Для цього потрібно з'ясувати поведінку оператор-функції $\left(\hat{M}(\lambda)\right)^{-1}$ при $\lambda \to -\infty$.

Лема 4. $\quad \forall a \in \mathcal{H}$

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \left\| \lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda \left(M(\lambda)\right)^{-1} a \right\| = 0\,, \tag{15}$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \sqrt{-\lambda}\, \left\| Z_\lambda \left(M(\lambda)\right)^{-1} a \right\| = 0\,, \tag{16}$$

$$\left\| \lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda \left(M(\lambda)\right)^{-1} a \right\|^2 \le \left(a \mid -\left(M(\lambda)\right)^{-1} a\right)_{\mathcal{H}}. \tag{17}$$

Д о в е д е н н я. Беручи до уваги (3), (4), (6), (7), (11), отримуємо

$$\begin{aligned} \left\| \lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda b \right\|^2 &= \lambda^2 \left(L_F^{-1/2} Z_\lambda b \mid L_F^{-1/2} Z_\lambda b\right) = \\ &= \left(\lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda b \mid \lambda Z_\lambda b\right) = \left((Z_\lambda - Z_0) b \mid L Z_\lambda b\right) = \\ &= \left(L(Z_\lambda - Z_0) b \mid Z_\lambda b\right) - \left(\Gamma_1 (Z_\lambda - Z_0) b \mid \Gamma_2 Z_\lambda b\right)_{\mathcal{H}} + \\ &+ \left(\Gamma_2 (Z_\lambda - Z_0) b \mid \Gamma_1 Z_\lambda b\right)_{\mathcal{H}} = \lambda (Z_\lambda b \mid Z_\lambda b) - (M(\lambda) b \mid b)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Поклавши тут $b = \left(M(\lambda)\right)^{-1} a$, маємо

$\forall a \in \mathcal{H}, \quad \forall \lambda < 0$

$$\left\| \lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda \left(M(\lambda)\right)^{-1} a \right\|^2 - \lambda \left\| Z_\lambda \left(M(\lambda)\right)^{-1} a \right\|^2 = \left(a \mid -\left(M(\lambda)\right)^{-1} a\right)_{\mathcal{H}}. \tag{18}$$

Оскільки ліва частина (18) є сумою двох невід'ємних доданків, а з огляду на (7) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \left(a \mid -\left(M(\lambda)\right)^{-1} a\right) = 0$, то справджуються (15)–(17). ◊

Лема 5.

$$s - \lim_{\lambda\to-\infty} \Psi(\lambda)\left(M(\lambda)\right)^{-1} = 0\,. \tag{19}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $a \in \mathcal{H}$. Тоді (див. (9), (11), (15))

$$\begin{aligned} 0 &\le \left\| \Psi(\lambda)\left(M(\lambda)\right)^{-1} a \right\|_G = \left\| \Psi(\lambda L_F^{-1} Z_\lambda)\left(M(\lambda)\right)^{-1} a \right\|_G \le \\ &\le \|\Psi\| \left\| \lambda L_F^{-1} Z_\lambda \left(M(\lambda)\right)^{-1} a \right\|_e = \|\Psi\| \left\| \lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda \left(M(\lambda)\right)^{-1} a \right\| \underset{\lambda\to-\infty}{\longrightarrow} 0\,. \ \Diamond \end{aligned}$$

Лема 6.

$$s - \lim_{\lambda\to-\infty} \left(M(\lambda)\right)^{-1}\left(\Psi(\lambda)\right)^{*} = 0\,. \tag{20}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $a \in \mathcal{H}$. Оскільки $\Psi^{\bullet} a \in H_e = D(L_F^{1/2})$, то $\exists h \in \mathcal{H}$ (а саме, $h = L_F^{1/2} \Psi^{\bullet} a$) таке, що $\Psi^{\bullet} a = L_F^{-1/2} h$. Маємо (за (12)) $\left(M(\lambda)\right)^{-1}\left(\Psi(\lambda)\right)^{*} a = \lambda \left(M(\lambda)\right)^{-1} Z_\lambda^{*} \Psi^{\bullet} a = \lambda \left(M(\lambda)\right)^{-1} Z_\lambda^{*} L_F^{-1/2} h$, тому досить довести, що

$$s-\lim_{\lambda\to-\infty}\lambda(M(\lambda))^{-1}Z_\lambda^* L_F^{-1/2}=0. \tag{21}$$

Покажемо це. Нехай $h\in D(L_F^{1/2})$ і $L_F^{1/2}h=h_1$. Оскільки $s-\lim\limits_{\lambda\to-\infty}Z_\lambda^*=0$, то

$$\|\lambda(M(\lambda))^{-1}Z_\lambda^* L_F^{-1/2}h\|=$$

$$=\|\lambda(M(\lambda))^{-1}Z_\lambda^* L_F^{-1}h_1\|=\|(M(\lambda))^{-1}\Gamma_1(\lambda L_\lambda L_F^{-1})h_1\|=$$

$$=\|(M(\lambda))^{-1}\Gamma_1(L_\lambda-L_F^{-1})h_1\|=\|(M(\lambda))^{-1}(Z_\lambda^*-Z_0^*)h_1\|\le$$

$$\le\|(M(\lambda))^{-1}Z_\lambda^* h_1\|+\|(M(\lambda))^{-1}Z_0^* h_1\|\underset{\lambda\to-\infty}{\longrightarrow}0.$$

Крім цього, з (15) і з принципу рівномірної обмеженості випливає, що сім'я $\{\|\lambda(M(\lambda))^{-1}Z_\lambda^* L_F^{-1/2}\|\}=\{\|\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda(M(\lambda))^{-1}\|\}$ обмежена в околі $-\infty$. Звідси і з того, що $\overline{D(L_F^{-1/2})}=\mathcal{H}$, випливає (21) а, отже, й (20). ◊

Лема 7.

$$s-\lim_{\lambda\to-\infty}\Psi(\lambda)(M(\lambda))^{-1}(\Psi(\lambda))^*=0. \tag{22}$$

Д о в е д е н н я. Міркуючи так, як при доведенні попередньої леми, а також враховуючи (11), (12), отримуємо, що (22) справджується, якщо

$$\forall h\in\mathcal{H}\qquad \lim_{\lambda\to-\infty}\Psi(\lambda L_F^{-1}Z_\lambda)(M(\lambda))^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}h)=0. \tag{23}$$

Оскільки $\Psi\in\mathcal{B}(H_e,G)$, то (21) матиме місце, якщо

$$\forall h\in\mathcal{H}\qquad \|\cdot\|_e-\lim_{\lambda\to-\infty}(\lambda L_F^{-1}Z_\lambda)(M(\lambda))^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}h)=0,$$

або, що рівносильно,

$$\forall h\in\mathcal{H}\qquad \lim_{\lambda\to-\infty}(\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda)(M(\lambda))^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}h)=0 \tag{24}$$

(мається на увазі збіжність у просторі $\mathcal{H}$). Переконаємось у правильності (24). Для цього покладемо в (17) $a=\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}h$. Отримаємо

$$\|(\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda)(M(\lambda))^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2})h\|^2\le$$

$$\le(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}h\mid-(M(\lambda))^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}h))_{\mathcal{H}}=$$

$$=((-\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda)(M(\lambda))^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}h)\mid h)\le$$

$$\le\|(\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda)(M(\lambda))^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2})h\|\|h\|,$$

тобто

$$\|(\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda)(M(\lambda))^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2})h\|\le\|h\|. \tag{25}$$

Використаємо ще раз (17) при $a=\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}h$, причому вважатимемо, що $h\in D(L_F^{1/2})$, тобто $h=L_F h_1$, де $h_1\in\mathcal{H}$. Маємо

$$\|(\lambda L_F^{-1/2}Z_\lambda)(M(\lambda))^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2})h\|^2\le$$

$$\le(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1}h_1\mid-(M(\lambda))^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2})h)_{\mathcal{H}}\le$$

$$\le\|\lambda\Gamma_1 L_\lambda L_F^{-1}h_1\|_{\mathcal{H}}\|(M(\lambda))^{-1}(\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2})h\|_{\mathcal{H}}.$$

Другий з цих множників з огляду на (21) прямує до нуля при $\lambda \to -\infty$. Розглянемо перший. Використовуючи резольвентну тотожність Гільберта, отримаємо

$$\left\| \lambda \Gamma_1 L_\lambda L_F^{-1} h_1 \right\|_{\mathcal{H}} = \left\| \Gamma_1 (L_\lambda - L_F^{-1}) h_1 \right\|_{\mathcal{H}} = \left\| Z_\lambda^* g_1 - Z_0^* h_1 \right\|_{\mathcal{H}}.$$

Але (див. [10]) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} Z_\lambda^* g_1 = 0$, тому $\sup\limits_{\lambda \in [-\infty; 0]} \left\| \lambda \Gamma_1 L_\lambda L_F^{-1} g_1 \right\|_{\mathcal{H}} < +\infty$. Таким чином,

$$\forall h_1 \in \mathcal{H} \qquad \lim_{\lambda \to -\infty} (\lambda L_F^{-1/2} Z_\lambda)(M(\lambda))^{-1} (\lambda Z_\lambda^* L_F^{-1/2}) h_1 = 0.$$

Оскільки сім'я операторів у лівій частині цієї рівності з огляду на (25) є рівномірно обмеженою, то справджується (24), а, отже, й (22). ◊

Лема 8. $s-\lim\limits_{\lambda \to -\infty} F(\lambda) = 0$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи рівність $\forall h \in \mathcal{H} \quad \lim\limits_{\lambda \to -\infty} \lambda L_\lambda h = -h$ і комутативність операторів $L_F^{1/2}$ та L_λ, маємо, що $s-\lim\limits_{\lambda \to -\infty} L_F^{1/2} (\lambda L_\lambda + 1) L_F^{-1/2} = 0$. Використовуючи цей факт і міркуючи так, як в доведенні леми 5, переконуємось у правильності леми. ◊

Теорема 2. $s-\lim\limits_{\lambda \to -\infty} (\hat{M}(\lambda))^{-1} = 0$.

Ця теорема є безпосереднім наслідком з (7), а також з наслідку 3 і лем 4–7.

Наслідок 4. $s-\lim\limits_{\lambda \to -\infty} (\hat{M}(\lambda) - \hat{M}(0))^{-1} = 0$.

Д о в е д е н н я. Правильність цього твердження випливає з теореми 2 і тотожності

$$\forall \lambda < 0 \qquad (\hat{M}(\lambda) - \hat{M}(0))^{-1} = (1_{\mathcal{H}} - (\hat{M}(\lambda))^{-1} \hat{M}(0))^{-1} (\hat{M}(\lambda))^{-1}. \ \Diamond$$

Наслідок 5. $(\hat{H},\ \hat{\Gamma}_1 - \hat{M}(0)\hat{\Gamma}_2,\ \hat{\Gamma}_2)$ – жорсткий ПГЗ оператора $L_{\min}$, зокрема,

$$D(\hat{L}_F) = \{ y \in D(L_{\max}) :\ \Gamma_2^{(\Psi)} y = 0, \quad \Gamma_4 y = 0 \},$$

$$D(\hat{L}_K) = \{ y \in D(L_{\max}) :\ \Gamma_1^{(\Psi)} y = 0, \quad \Gamma_3 y + (\Psi \Psi^\bullet)^{-1} \Gamma_4 y = 0 \},$$

де $\hat{L}_F$ та $\hat{L}_K$ – відповідно жорстке та м'яке розширення оператора $L_{\min}$.

Правильність цього твердження випливає безпосередньо з результатів, викладених у [2, 10, 11].

Робота частково фінансувалася ДФФД, проект № 01.07/00172.

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
2. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и её связь с характеристической функцией. – Донецк, 1985. – 52 с. – (Препр. / АН УССР. Донец. физ.-техн. ин-т, № 85-9).
3. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41–48.
4. *Кочубей А. Н.* Про розширення додатно визначеного оператора // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 3. – С. 168–171.
5. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и её приложения // Мат. сб. – 1947. – **20**, № 3. – С. 431–495.

6. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 212 с.
7. *Мильо О. Я., Сторож О. Г.* Про умови взаємної спряженості одного класу скінченновимірних збурень додатно визначеного оператора // Мат. студії. – 1995. – Вип. 4. – С. 67–74.
8. *Мильо О. Я., Сторож О. Г.* Про функцію Вейля деяких скінченновимірних звужень додатно визначеного оператора // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 40. – С. 47–50.
9. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
10. *Сторож О. Г.* Про деякі аналітичні та асимптотичні властивості функції Вейля невід'ємного оператора // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 4. – С. 18–23.
11. *Штраус А. В.* О расширениях полуограниченного оператора // Докл. АН СССР. – 1973. – **211**, № 3. – С. 543–546.
12. *Pipa H. M., Myl'o O. Ya., Storozh O. G.* On Weyl function of semi-smooth restrictions of positively defined operator // Міжнар. школа-семінар, присв. 75-річчю проф. В. Я. Скоробогатька (Ужгород, 19–24 серп. 2002): Тези доп. – Ужгород, 2002. – С. 24–25.
13. *Pipa H. M., Storozh O. G.* On a class of densely defined restrictions of closed positively defined operators in Hilbert space // Int. Conf. dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach «Functional analysis and its applications» (L'viv, May 28–31, 2002): Book of abstracts. – Lviv, 2002. – P. 157.

О ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ПОЛУГЛАДКОГО СУЖЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОГО ОПЕРАТОРА

В терминах абстрактных краевых условий построены функция Вейля и экстремальные (т. е. фридрихсовское и крейновское) расширения полугладкого сужения замкнутого симметрического положительно определенного оператора, действующего в гильбертовом пространстве.

ON WEYL FUNCTION AND EXTREMAL EXTENSIONS OF SEMI-SMOOTH RESTRICTION OF POSITIVELY DEFINED OPERATOR

In the terms of abstract boundary conditions Weyl function and extremal extensions (i. e. Friedrichs and Krein ones) for semi-smooth restrictions of closed symmetric positively defined operator in Hilbert space are constructed.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
01.12.02